

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**Н. І. Бурау, С. О. Цибульник**

# **Математичні моделі фізичних процесів**

## **Практикум**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для студентів,  
які навчаються за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-  
інтегровані технології»,  
освітньою програмою «Комп'ютерно-інтегровані технології та системи  
навігації і керування»*

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2019

Рецензенти: *Гармаш О.В.* канд. техн. наук, доцент кафедри акустики та акустoeлектроніки КПІ ім. Ігоря Сікорського  
*Івасенко В.М.* – к. т. н., асистент кафедри наукових, аналітичних та екологічних приладів і систем КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор: *Бурау Н. І.*, док. техн. наук, професор кафедри приладів і систем орієнтації і навігації КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 0 від 00.00.2019 р.)  
за поданням Вченої ради Приладобудівного факультету (протокол № 0 від 00.00.2019 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

*Бурау Надія Іванівна, док. техн. наук, проф.  
Цибульник Сергій Олексійович, канд. техн. наук*

## Математичні моделі фізичних процесів Практикум

Бурау Н. І. Математичні моделі фізичних процесів. Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», освітньої програми «Комп'ютерно-інтегровані технології та системи навігації і керування» / Н. І. Бурау, С. О. Цибульник ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 0,98 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 53 с.

Навчальний посібник містить стислі теоретичні відомості, необхідні для виконання конкретних практичних завдань з аналізу часових та частотних характеристик фізичних процесів, приклади їх визначення за наведеними методиками, завдання для самостійної роботи студентів.

Виконання практичних завдань, пов'язаних з визначенням часових, частотних, енергетичних характеристик детермінованих процесів та моментних функцій випадкових процесів сприятиме закріпленню, поглибленню та узагальненню теоретичних основ курсу, а також сприятиме розвитку навичок самостійної творчої роботи студентів у процесі їх навчання, зокрема при виконанні контрольних, практичних, лабораторних робіт, розрахункових та дипломних робіт, при обробці даних, отриманих експериментально або шляхом математичного чи комп'ютерного моделювання.

© Н. І. Бурау, С. О. Цибульник, 2019

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. Класифікація та аналіз детермінованих процесів.....	5
2. Розкладання періодичних процесів у ряд Фур'є, спектр.....	13
3. Спектральне зображення неперіодичних процесів, перетворення Фур'є.....	22
4. Енергетичні характеристики детермінованих процесів: кореляційна функція, спектральна щільність енергії.....	27
4.1 Спектральна щільність енергії (потужності).....	27
4.2 Кореляційні функції .....	28
5. Імовірність, основні правила теорії імовірності. Середні значення та моменти випадкових величин.....	38
6. Числові характеристики (моментні функції) випадкових процесів.....	46
7. Енергетичні характеристики стаціонарних випадкових процесів.....	50
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	53

## ВСТУП

Навчальний посібник складено відповідно до чинної робочої навчальної програми кредитного модулю «Спеціальні розділи математики 2. Математичні моделі фізичних процесів» для студентів приладобудівного факультету, які навчаються за спеціальністю 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології, освітньою програмою «Комп'ютерно-інтегровані технології і системи навігації та керування». Даний навчальний посібник також може використовуватися студентами інших спеціальностей або освітніх програм.

Мета даного навчального видання – допомогти студентам в надбанні необхідних практичних навичок класифікації та аналізу детермінованих процесів, а також аналізу ймовірнісних характеристик випадкових процесів під час практичних занять.

Виконання практичних завдань, пов'язаних з визначенням часових, частотних, енергетичних характеристик детермінованих процесів та моментних функцій випадкових процесів сприятиме закріпленню, поглибленню та узагальненню теоретичних основ курсу, а також сприятиме розвитку навичок самостійної творчої роботи студентів у процесі їх навчання, зокрема при виконанні розрахункових, контрольних та практичних робіт з дисципліни «Спеціальні розділи математики».

Навчальний посібник містить стислі теоретичні відомості, необхідні для виконання конкретних практичних завдань з аналізу часових та частотних характеристик фізичних процесів, приклади їх визначення за наведеними методиками, завдання для самостійної роботи студентів.

# 1. КЛАСИФІКАЦІЯ ТА АНАЛІЗ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ПРОЦЕСІВ

**Детерміновані процеси** – це процеси, які можна описати явними математичними формулами. Наприклад, тіло (масою  $m$ ) підвішене за допомогою лінійної пружини (з коефіцієнтом жорсткості  $c$ ) до нерухокої опори, Тіло зміщується від положення рівноваги на відстань  $a$ , потім в момент часу  $t=0$  відпускається. На підставі багаторазових спостережень або ж за допомогою основних законів механіки можна встановити. Що за відсутності згасання виконується така залежність:

$$x(t) = a \cos(\omega t), t \geq 0, \quad (1.1)$$

де  $\omega = \sqrt{c/m}$ .

Рівняння (1.1) дає змогу точно визначити положення тіла в будь-який наступний момент часу. Процес, що описує рух тіла, є детермінованим.

На практиці є багато явищ, які можна описати явними математичними формулами, і які за своєю суттю є детермінованими процесами. Але є багато явищ, які породжують процеси, що не можна вважати детермінованими, бо для них неможливо точно передбачити значення у наступні моменти часу (шум, вітер, висота хвиль і т.д.). Такі процеси є випадковими за своєю сутністю, для їх опису використовують імовірнісні та статистичні підходи. Віднесення тих чи інших фізичних явищ до детермінованого чи імовірнісного типу часто є суперечливим. З точки зору практики, рішення про детермінованість чи випадковість конкретного фізичного процесу, як правило, ґрунтується на здатності відновити процес у ході контрольного експерименту. Якщо такий експеримент призводить до одних і тих самих

результатів в межах похибок), то такий процес можна вважати детермінованим. В іншому випадку – процес вважається випадковим.

Детермінований опис процесу передбачає, що є всі дані для того, щоб відтворити процес у будь-який момент часу, тобто точно передбачити часове протікання процесу  $x(t)$ . Розв'язання детермінованої задачі визначається у вигляді конкретної математичної функції часу

$$x(t) = f(t). \quad (1.2)$$

Детерміновані процеси класифікуються наступним чином:

- **періодичні** – гармонічні; полігармонічні;
- **неперіодичні** – майже періодичні; перехідні.

Для вказаних **детермінованих** процесів розглянемо форми математичного опису, основні характеристики та властивості.

Найпростішими з періодичних процесів є **гармонічні** процеси. До таких належить синусоїдальний процес, математичний опис якого має вигляд:

$$x(t) = X_0 \sin(\omega_0 t + \theta) = X_0 \sin(2\pi f_0 t + \theta), \quad (1.3)$$

де  $x(t)$  – миттєве значення процесу в момент часу  $t$ ;  $X_0$  – амплітуда;  $\omega_0$  – кругова частота, рад/с;  $f_0$  – циклічна частота, Гц;  $\theta$  – початковий фазовий кут, рад.

Інтервал часу, на якому одне повне коливання, або цикл гармонічного процесу, називається періодом  $T_0$ . Число циклів за одиницю часу називається циклічною частотою  $f_0$ . Частота і період пов'язані співвідношенням

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (1.4)$$

Якщо в рівнянні (1.3) покласти  $\theta=0$ , то отримаємо рівняння

$$x(t) = X_0 \sin 2\pi f_0 t. \quad (1.5)$$

Графічно рівняння (1.5) можна зобразити у вигляді залежності миттєвого значення від часу (рис. 1.1).

**Полігармонічні процеси** – це такі періодичні процеси, які математично описуються функцією часу, яка точно повторює свої значення через однакові проміжки часу

$$x(t) = x(t + nT), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.6)$$

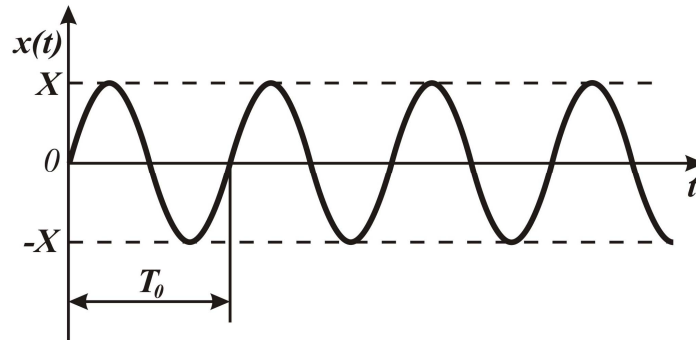


Рис. 1.1 – Реалізація гармонічного процесу

Для полі гармонічних процесів проміжок часу, протягом якого відбувається одне повне коливання, називається періодом  $T$ . Число циклів за одиницю часу – **фундаментальною частотою  $f_1$** .

Гармонічні процеси – це окремий випадок полігармонічних процесів за  $f_1 = f_0$ .

Сума двох і більше гармонічних процесів буде періодичним процесом лише тоді, коли відношення будь-яких двох частот є **раціональним числом**. У цьому випадку існує фундаментальний період, який задовольняє рівнянню (1.6).

Якщо ж відношення частот не є раціональним числом (наприклад  $2/\sqrt{50}$ ), то фундаментальний період є нескінченно великим. Такий процес має **майже періодичний** характер, але (1.6) не виконується при будь-якому скінченному  $T$ .

У відповідності до сказаного майже періодичні процеси математично визначаються як функції часу у вигляді розкладання

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi f_n t + \theta_n), \quad (1.7)$$

але відношення  $f_n/f_m$  ( $n \in (-\infty, \infty)$ ;  $m \in (-\infty, \infty)$ ;  $n \neq m$ ) не для всіх значень індексів  $n$  та  $m$  є раціональними числами.

Наприклад, процес, який породжується не пов'язаними між собою гармонічними процесами (загальна вібрація літака).

Майже періодичні процеси при вилученні з розгляду в (1.7) фазових кутів характеризуються дискретним спектром, але при цьому відношення частот не є раціональним числом.

Усі інші **неперіодичні процеси** відносяться до **перехідних**, які можна задати будь-якою функцією часу (рис. 1.2).

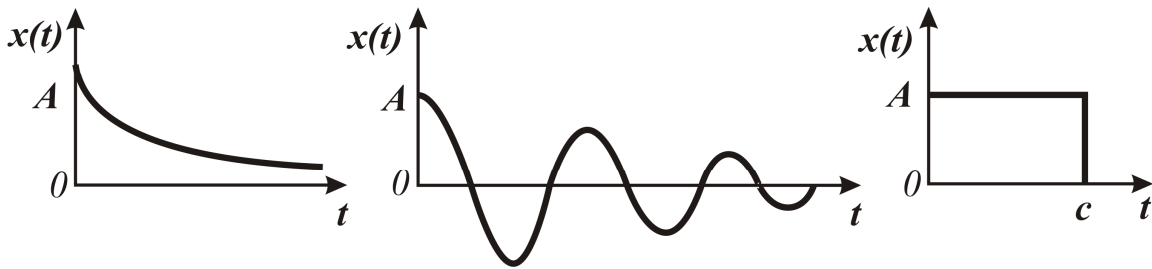


Рис. 1.2 – Приклади перехідних процесів

### Приклад 1.

Для гармонічного сигналу з періодом  $T=10$ с знайти кутову  $\omega$  та циклічну  $f$  частоти.

**Розв'язання:** Період гармонічного сигналу  $T$  є обернено пропорційним його циклічній частоті  $T = \frac{1}{f}$ , звідки  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10} = 0,1$ (Гц).

Кругова частота прямо пропорційно залежить від значення циклічної частоти гармонічного сигналу і визначається за виразом  $\omega = 2\pi f$ , для знайденого  $f$ :



$$\omega = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,1 = 0,628 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

**Відповідь:**  $f=0,1$ Гц,  $\omega=0,628$ рад/с.

### Приклад 2.

Для гармонічного сигналу з кутовою частотою  $\omega=15$ рад/с знайти період  $T$  та циклічну частоту  $f$ .

**Розв'язання:** Період гармонічного сигналу визначається за виразом

$$(4) T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{15} \approx 0,419(\text{с}).$$

Циклічна частота  $f$  обернено пропорційна періоду гармонічного сигналу  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,419} = 2,387(\text{Гц})$ .

**Відповідь:**  $T=0,419$ с,  $f=2,387$ Гц.

### Приклад 3.

Визначити, яка з наведених нижче функцій не є періодичною:

$$a) x(t) = \sin(2\pi \cdot 2t) + \sin(2\pi \cdot 4t);$$

$$б) x(t) = \sin(2\pi \cdot \sqrt{1,7t});$$

$$в) x(t) = e^{-t} \cdot \sin(2\pi \cdot 2t).$$

**Відповідь:** функція в) не є періодичною, тому що є згасаючою функцією часу та не задовольняє загальній умові періодичних функцій  $f_n(t)=f(t+nT)$ , де  $T$  – період;  $n=1, 2, 3, \dots$

### Приклад 4.

Визначити, яка з наведених нижче функцій є періодичною:

$$a) x(t) = \sin(2\pi \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 3t);$$

$$б) x(t) = 17e^{-10t} \cdot \sin(2\pi \cdot 2t) + 3e^{-0,8t} \cdot \sin(2\pi \cdot 8t);$$

$$в) x(t) = 3\sin(2\pi \cdot 0,5t) + 1,2\sin(2\pi \cdot 1,5t).$$

**Відповідь:** функція а) є періодичною, тому що складається з суми двох гармонічних функцій та відношення будь-яких двох частот є раціональним числом.

**Завдання для практичної роботи.**

1) Для гармонічного сигналу з періодом  $T=35$  с знайти кутову  $\omega$  та циклічну  $f$  частоти.

2) Для гармонічного сигналу з періодом  $T=1,7$  с знайти кутову  $\omega$  та циклічну  $f$  частоти.

3) Для гармонічного сигналу з кутовою частотою  $\omega=1,5$  рад/с знайти період  $T$  та циклічну частоту  $f$ .

4) Для гармонічного сигналу з кутовою частотою  $\omega=199$  рад/с знайти період  $T$  та циклічну частоту  $f$ .

5) Для гармонічного сигналу з циклічною частотою  $f=22$  Гц знайти період  $T$  та кутову частоту  $\omega$ .

6) Визначити, яка з наведених нижче функцій є періодичною. Обґрунтувати відповідь.

$$a) x(t) = 9 \sin(2\pi \cdot 7t) + 6 \sin(2\pi \cdot 14t) + 2,2 \sin(2\pi \cdot 49t);$$

$$б) x(t) = 3 \sin(2\pi \cdot t) + 4 \sin(2\pi \cdot 3t) + 1,3 \sin(2\pi \cdot 9t).$$

7) Визначити, яка з наведених нижче функцій є періодичною. Обґрунтувати відповідь.

$$a) x(t) = 5 \sin(2\pi \cdot 2t) + 3 \sin(2\pi \cdot 3t) + 0,8 \sin(2\pi \cdot 5t);$$

$$б) x(t) = 1,2 \sin(2\pi \cdot \sqrt{2}t) + 2,4 \sin(2\pi \cdot \sqrt{4}t).$$

8) Визначити, яка з наведених нижче функцій не є періодичною. Обґрунтувати відповідь.

$$a) x(t) = \sin(2\pi \cdot 5t) + 2 \sin(2\pi \cdot 6t);$$

$$б) x(t) = 1,1e^{-t} \sin(2\pi \cdot t) + 2 \sin(2\pi \cdot 2t).$$

9) Визначити, яка з наведених нижче функцій не є періодичною. Обґрунтувати відповідь.

$$a) x(t) = e^{-0,5} \sin(2\pi \cdot t) + 2,7e^{-0,8} \sin(2\pi \cdot t);$$

$$б) x(t) = 3e^{-3t} \sin(2\pi \cdot 2t) + 5 \sin(2\pi \cdot 7t).$$

10) Визначити, яка з наведених нижче функцій є періодичною, а яка неперіодичною. Обґрунтувати відповідь.

$$a) x(t) = \sin(2\pi \cdot t) + 2 \sin(2\pi \cdot 5t);$$

$$б) x(t) = 2 \sin(2\pi \cdot 8t);$$

$$в) x(t) = 6 \sin(2\pi \cdot \sqrt{1,7});$$

$$г) x(t) = e^{-5} \sin(2\pi \cdot \sqrt{7}t).$$

11) Для гармонічного сигналу з періодом  $T=220$  с знайти кутову  $\omega$  та циклічну  $f$  частоти.

12) Для гармонічного сигналу з періодом  $T=3,56$  с знайти кутову  $\omega$  та циклічну  $f$  частоти.

13) Для гармонічного сигналу з кутовою частотою  $\omega=75$  рад/с знайти період  $T$  та циклічну частоту  $f$ .

14) Для гармонічного сигналу з кутовою частотою  $\omega=17,12$  рад/с знайти період  $T$  та циклічну частоту  $f$ .

15) Для гармонічного сигналу з циклічною частотою  $f=133$  Гц знайти період  $T$  та кутову частоту  $\omega$ .

16) Визначити, яка з наведених нижче функцій не є періодичною. Обґрунтувати відповідь.

$$a) x(t) = 7 \sin(2\pi \cdot 3t) + 3 \sin(2\pi \cdot 9t) + 0,2 \sin(2\pi \cdot 27t);$$

$$б) x(t) = 3 \sin(2\pi \cdot 3t) + 4 \sin(2\pi \cdot 5t) + 1,3 \sin(2\pi \cdot \sqrt{9}t).$$

17) Визначити, яка з наведених нижче функцій є неперіодичною. Обґрунтувати відповідь.

$$a)x(t) = 7 \sin(2\pi \cdot 2t) + 1,3 \sin(2\pi \cdot 3t) + \sin(2\pi \cdot 4t);$$

$$б)x(t) = 0,2 \sin(2\pi \cdot 2,1t) + 0,04 \sin(2\pi \cdot 4,2t).$$

18) Визначити, яка з наведених нижче функцій є періодичною. Обґрунтувати відповідь.

$$a)x(t) = 4 \sin(2\pi \cdot \sqrt{5}t) + 2 \sin(2\pi \cdot \sqrt{6}t);$$

$$б)x(t) = 1,1e^{-2} \sin(2\pi \cdot t) + 2 \sin(2\pi \cdot 2t).$$

19) Визначити, яка з наведених нижче функцій є періодичною. Обґрунтувати відповідь.

$$a)x(t) = e^{-0,5t} \sin(2\pi \cdot t) + 2,7e^{-0,8t} \sin(2\pi \cdot t);$$

$$б)x(t) = 3e^{-3} \sin(2\pi \cdot 7t) + 5 \sin(2\pi \cdot 7t).$$

20) Визначити, яка з наведених нижче функцій є періодичною, а яка неперіодичною. Обґрунтувати відповідь.

$$a)x(t) = \sin(2\pi \cdot t) + 2 \sin(2\pi \cdot 5,5t);$$

$$б)x(t) = 2 \sin(2\pi \cdot 14t) + \sin(2\pi \cdot 20t);$$

$$в)x(t) = 6 \sin(2\pi \cdot 22);$$

$$г)x(t) = e^{-5t} \sin(2\pi \cdot \sqrt{7}t).$$

## 2. РОЗКЛАДАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ У РЯД ФУР'Є, СПЕКТР

Рівняння (1.5) графічно можна зобразити також у вигляді залежності амплітуди від частоти. Така залежність називається **частотним спектром** (рис. 2.1).

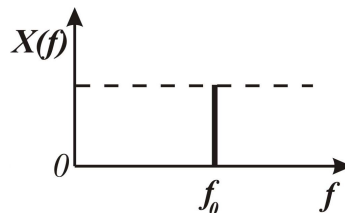


Рис. 2.1 – Спектр гармонічного процесу

Наведений частотний спектр складається з єдиної амплітуди ( $X_0$ ), розташованої на певній частоті ( $f_0$ ). Такі спектри називаються **дискретними (лінійчатими)**. Приклади: напруга на виході електричного генератора, процес обертання вихідного валу двигуна.

Як правило усі періодичні процеси можна розкласти в ряд Фур'є. Є декілька форм подання ряду.

- **Тригонометрична форма** ряду визначається за формулою [2]:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t), \quad t \in [-T/2, T/2], \quad (2.1)$$

де

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos 2\pi n f_1 t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin 2\pi n f_1 t dt,$$

$$f_1 = 1/T.$$

- **Амплітудно-фазова форма** – перетворення виразу (2.1) до вигляду [2]

$$x(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2\pi n f_1 t + \varphi_n), \quad (2.2)$$

де  $c_0 = a_0$ ,  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}$ ,  $n=1,2,\dots$

Коефіцієнти ряду (2.1) визначаються коефіцієнтами та фазою ряду (2.2)

$$a_n = c_n \cos \varphi_n, \quad b_n = c_n \sin \varphi_n. \quad (2.3)$$

Як видно з (2.2), періодичний процес є сумою сталої складової  $c_0/2$  та нескінченного числа гармонічних складових (гармонік) з амплітудами  $c_n$  та фазами  $\varphi_n$ . Усі частоти гармонічних складових кратні фундаментальній частоті  $f_1$ .

Якщо у виразі (2.2) знехтувати фазовими кутами, то ряд буде характеризуватись дискретним спектром.

- **Комплексна форма ряду Фур'є.**

Якщо в поданнях (2.1) та (2.2) тригонометричні функції замінити показниковими та перейти до розгляду комплексних величин, то можна отримати **комплексну форму** запису ряду Фур'є. Для цього використовуються тотожності Ейлера [2]:

$$\begin{aligned} \exp(j2\pi n f_1 t) &= \cos 2\pi n f_1 t + j \sin 2\pi n f_1 t, \\ \exp(-j2\pi n f_1 t) &= \cos 2\pi n f_1 t - j \sin 2\pi n f_1 t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тоді

$$\begin{aligned} &a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t = \\ &= a_n \frac{\exp(j2\pi n f_1 t) + \exp(-j2\pi n f_1 t)}{2} + b_n \frac{\exp(j2\pi n f_1 t) - \exp(-j2\pi n f_1 t)}{2j} = \\ &= \frac{a_n - j b_n}{2} \exp(j2\pi n f_1 t) + \frac{a_n + j b_n}{2} \exp(-j2\pi n f_1 t) \end{aligned}$$

Введемо до розгляду комплексно-спряжені величини:

$$X[n] = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad X^*[n] = X[-n] = \frac{a_n + jb_n}{2},$$

тоді ряд (2.1) можемо записати у вигляді:

$$x(t) = X[0] + \sum_{n=1}^{\infty} X[n] \exp(j2\pi n f_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} X^*[n] \exp(-j2\pi n f_1 t), \quad (2.5)$$

де  $X[0]=a_0/2$ .

Так як  $b_n$  є непарною функцією від  $n$ , то  $X^*[n] = X[-n]$  і

$$\sum_{n=1}^{\infty} X^*[n] \exp(-j2\pi n f_1 t) = \sum_{n=1}^{\infty} X[n] \exp(j2\pi n f_1 t).$$

Тоді підсумовуючи в (2.5) при усіх  $n$  від  $-\infty$  до  $+\infty$ , включаючи й  $n=0$ , отримуємо комплексну форму ряду Фур'є [2]

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \exp(j2\pi n f_1 t); \quad (2.6)$$

$$X[n] = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j2\pi n f_1 t) dt. \quad (2.7)$$

Множина коефіцієнтів  $X[n]$  ряду (2.6) утворює **спектр функції**  $x(t)$ , а процес їх визначення за виразом (2.7) називається **спектральним аналізом (або гармонічним аналізом)**.  $X[0]$  – це **середнє значення** функції  $x(t)$ ,  $X[1]$  – називається **комплексною амплітудою основної складової**, або основної гармоніки. Циклічна частота основної гармоніки є величиною, обернено пропорційною до періоду основної гармоніки  $T$ , який є найменшим ненульовим числом, що задовольняє співвідношенню  $x(t) = x(t \pm nT)$ . При  $n > 1$  величину  $X[n]$  називають комплексною амплітудою  $n$ -тої гармоніки  $x(t)$ .

Комплексна амплітуда  $X[n]$  (2.7) визначається при підстановці виразів для  $a_n$  та  $b_n$  з (2.1) у вираз

$$X[n] = \frac{a_n - jb_n}{2}.$$

Оскільки  $X[n]$  є комплексними величинами ( $[n]$  – означає ціле число), то для їх опису можна використати подання:

$$X[n] = |X[n]| \exp(-j\varphi_n), \quad (2.8)$$

де  $|X[n]| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} c_n$ ;  $\varphi_n = \arctg(b_n / a_n) = \arg X[n]$ ,

або у вигляді:

$$X[n] = \operatorname{Re} X[n] - j \operatorname{Im} X[n], \quad (2.9)$$

де  $\operatorname{Re} X[n] = \frac{1}{2} a_n$ ,  $\operatorname{Im} X[n] = \frac{1}{2} b_n$ .

Якщо порівняти отримані подання та значення коефіцієнтів ряду Фур'є при тригонометричній (амплітудно-фазовій) та комплексній формах, то отримаємо:

- при  $n=0$   $X[0]=c_0/2$ , тобто  $c_0=2 X[0]$ ;
- $X[n]$  визначається як величина, що є сумою відповідних складових при додатному та від'ємному  $n$ , звідси  $c_n=X[n]$  для  $n \neq 0$ .

При переході від тригонометричної форми до комплексної **зі штучним введенням в розгляд області від'ємних частот** амплітудні значення коефіцієнтів розкладання зменшуються вдвоє.

Таким чином, періодичний сигнал має дискретний (лінійчастий) спектр.

В загальному випадку необхідно використовувати два графіки: дійсну та уявні частини  $X[n]$ , чи модуль та аргумент  $X[n]$ .

Для процесів, які описуються дійсними функціями, із властивості спряженості коефіцієнтів випливає, що **дійсні** складові й **амплітуди** спектра є **парними** функціями частоти (або індексу  $n$ ), а **уявні** складові та **фа-**



**зові кути – непарні** функції. Тому для дійсних процесів зображується тільки частина спектру з додатними частотами. Якщо  $x(t)$  – парна функція ( $x(t) = x(-t)$ ), то  $X[n]$  – дійсні і ряд складається тільки з косинусів. Якщо  $x(t)$  – непарна функція, то  $X[n]$  – уявні і ряд містить тільки синуси.

### Приклад 1.

Знайти розкладання у ряд Фур'є прямокутної функції

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t \leq \pi \end{cases} \text{ з періодом } T=2\pi, \text{ яка визначена на інтервалі } [-\pi; \pi].$$

**Розв'язання:** У першу чергу при розкладанні в ряд Фур'є періодичної функції необхідно перевірити її парність-непарність, оскільки ці властивості впливають на кількість ненульових коефіцієнтів розкладання.

$$f(-t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq -t \leq 0 \\ 1, & 0 < -t \leq \pi \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \pi \\ 1, & -\pi \leq t < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{функція ні парна, ні непарна.}$$

Отже, необхідно знайти всі коефіцієнти розкладання в ряд Фур'є.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dt = \frac{t}{2\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi - 0}{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(2\pi f_1 t) dt = \left| \begin{array}{l} \text{Для періодичних процесів з періодом } T = 2\pi \\ \text{базова частота } f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}, \text{ отже, } 2\pi f_1 = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt = \frac{\sin(nt)}{\pi n} \Big|_0^{\pi} = \frac{\sin(n\pi) - \sin(0)}{\pi n} = \left| \sin(n\pi) = 0, \sin(0) = 0 \right| = \frac{0}{\pi n} = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \frac{-\cos(nt)}{\pi n} \Big|_0^{\pi} = -\frac{\cos(n\pi) - \cos(0)}{\pi n} =$$

$$= \left| \cos(n\pi) = (-1)^n, \cos(0) = 1 \right| = -\frac{(-1)^n - 1}{\pi n} = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} = \frac{1 + (-1)(-1)^n}{\pi n} =$$

$$= \frac{1 + (-1)^{n+1}}{\pi n}$$

**Відповідь:**  $f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(nt).$

**Приклад 2.**

Періодичний процес утворений сумою трьох гармонічних процесів з частотами 15, 30 і 60Гц. Визначити, на яких гармоніках розкладання в ряд Фур'є даного процесу матиме ненульові коефіцієнти.

**Розв'язання:** Періодичний процес, утворений сумою трьох гармонічних процесів з частотами 15Гц, 30Гц і 60Гц, аналітично описується виразом:

$$f(t) = \cos(2\pi \cdot 15t) + \cos(2\pi \cdot 30t) + \cos(2\pi \cdot 60t).$$

Відповідно до амплітудно-фазової форми запису ряду Фур'є  $x(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2\pi n f_1 t + \varphi_n)$  маємо  $c_0 = \varphi_n = 0$ ;  $n_1 f_1 = 15$ ;  $n_2 f_1 = 30$ ;  $n_3 f_1 = 60$ , де  $n$  – номер ненульової гармоніки розкладання.  $f_1$  – найбільший спільний дільник частот, що присутні у сигналі. Для заданих частот  $f_1 = 15 \text{ Гц}$ . Отже, визначимо гармоніки з ненульовими коефіцієнтами розкладання в ряд Фур'є:

$$n_1 = \frac{15}{f_1} = \frac{15}{15} = 1, \quad n_2 = \frac{30}{f_1} = \frac{30}{15} = 2, \quad n_3 = \frac{60}{f_1} = \frac{60}{15} = 4.$$

**Відповідь:**  $n=1, 2, 4.$

**Завдання для практичної роботи.**

1) Знайти розкладання у ряд Фур'є функції  $f(t) = t$  з періодом  $T=2\pi$ , яка визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

2) Знайти розкладання у ряд Фур'є функції  $f(t) = t^2$  з періодом  $T=2\pi$ , яка визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

3) Знайти розкладання у ряд Фур'є функції  $f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + t, & -\pi \leq t \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} - t, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$  з

періодом  $T=2\pi$ , яка визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

4) Знайти розкладання у ряд Фур'є функції  $f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq t \leq -\frac{\pi}{2} \\ 0, & -\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \end{cases}$  з

періодом  $T=2\pi$ , яка визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

5) Знайти розкладання у ряд Фур'є функції  $f(t) = \cos(\omega t)$  з періодом  $T=2\pi$ , яка визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

6) Періодичний процес утворений сумою трьох гармонічних процесів з частотами 15 Гц, 25 Гц і 30 Гц. Визначити, на яких гармоніках розкладання в ряд Фур'є даного процесу матиме ненульові коефіцієнти.

7) Періодичний процес утворений сумою трьох гармонічних процесів з частотами 4 Гц, 8 Гц і 11 Гц. Визначити, на яких гармоніках розкладання в ряд Фур'є даного процесу матиме ненульові коефіцієнти.

8) Періодичний процес утворений сумою трьох гармонічних процесів з частотами 26 Гц, 52 Гц і 117 Гц. Визначити, на яких гармоніках розкладання в ряд Фур'є даного процесу матиме ненульові коефіцієнти.

9) Періодичний процес утворений сумою трьох гармонічних процесів з частотами 20 Гц, 40 Гц і 140 Гц. Визначити, на яких гармоніках розкладання в ряд Фур'є даного процесу матиме ненульові коефіцієнти.

10) Періодичний процес утворений сумою трьох гармонічних процесів з частотами 400 Гц, 800 Гц і 1200 Гц. Визначити, на яких гармоніках розкладання в ряд Фур'є даного процесу матиме ненульові коефіцієнти.

11) Знайти розкладання у ряд Фур'є функції  $f(t) = 3t$  з періодом  $T=2\pi$ , яка визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

12) Знайти розкладання у ряд Фур'є функції  $f(t) = 9t^2$  з періодом  $T=2\pi$ , яка визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

13) Знайти розкладання у ряд Фур'є функції  $f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + t, & \pi \leq t \leq 0 \\ \frac{\pi}{3} - t, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$  з

періодом  $T=2\pi$ , яка визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

14) Знайти розкладання у ряд Фур'є функції  $f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq t \leq -\frac{\pi}{2} \\ 0, & -\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \end{cases}$  з

періодом  $T=2\pi$ , яка визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

15) Знайти розкладання у ряд Фур'є функції  $f(t) = \sin(\omega t)$  з періодом  $T=2\pi$ , яка визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

16) Періодичний процес утворений сумою трьох гармонічних процесів з частотами 12 Гц, 28 Гц і 32 Гц. Визначити, на яких гармоніках розкладання в ряд Фур'є даного процесу матиме ненульові коефіцієнти.

17) Періодичний процес утворений сумою трьох гармонічних процесів з частотами 14 Гц, 21 Гц і 42 Гц. Визначити, на яких гармоніках розкладання в ряд Фур'є даного процесу матиме ненульові коефіцієнти.

18) Періодичний процес утворений сумою трьох гармонічних процесів з частотами 100 Гц, 200 Гц і 300 Гц. Визначити, на яких гармоніках розкладання в ряд Фур'є даного процесу матиме ненульові коефіцієнти.

19) Періодичний процес утворений сумою трьох гармонічних процесів з частотами 18 Гц, 36 Гц і 104 Гц. Визначити, на яких гармоніках розкладання в ряд Фур'є даного процесу матиме ненульові коефіцієнти.

20) Періодичний процес утворений сумою трьох гармонічних процесів з частотами 350 Гц, 560 Гц і 630 Гц. Визначити, на яких гармоніках розкладання в ряд Фур'є даного процесу матиме ненульові коефіцієнти.

### 3. СПЕКТРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ НЕПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ, ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

У загальному випадку неперіодичні процеси не мають дискретного спектру – це їх важлива особливість. Для таких процесів можна отримати неперервне спектральне зображення шляхом застосування зображення Фур'є, яке є узагальненням ряду Фур'є.

Якщо у перетворенні Фур'є спрямувати період  $T \rightarrow \infty$  і у виразах (2.6) та (2.7) перейти до неперервної частоти (поточної частоти аналізу)  $f=n/T$ , а також замінивши позначення  $X[n]$  на  $X[f]$ , отримаємо наступні математичні залежності [2]:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt, \quad (3.1)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df. \quad (3.2)$$

Вираз (3.2) називається **спектральною функцією (характеристикою)** процесу  $x(t)$ . Вона не залежить від часу і є комплексною функцією частоти (яка визначається для додатних та від'ємних значень). Вигляд спектральної функції залежить лише від **форми** (аналітичного виразу) сигналу  $x(t)$ .

Вираз (3.2) – це **інтегральне перетворення Фур'є**, а разом вирази (3.1) та (3.2) складають **пару перетворень Фур'є**. При цьому (3.1) – це пряме перетворення, а (3.2) – обернене перетворення (або **інтеграл Фур'є**).

В інтегралі Фур'є підінтегральний вираз будемо розглядати як елементарне коливання з нескінченно малою амплітудою

$$dc \exp(j2\pi ft)$$

тоді можна записати  $X(f)df=dc$  звідки

$$X(f) = \frac{dc}{df}.$$

Тобто  $X(f)$  пропорційна похідній від амплітуди по частоті, або ж **щільності** амплітуди по частотному спектру. Тому  $X(f)$  за виразом (3.1) **називається спектральною щільністю (СЩ)** неперіодичної функції.

Таким чином, інтеграл Фур'є (3.2) визначає процес  $x(t)$  як нескінчену суму нескінченно малих коливальних складових на всіх частотах. Тому СЩ має неперервний (суцільний) вигляд.

Іноді пара перетворень Фур'є записується як функція не циклічної  $(f)$ , а кругової частоти  $\omega = 2\pi f$ . Тоді, враховуючи  $f = \omega/2\pi$ , а  $df = \frac{1}{2\pi}d\omega$ , вирази (3.1) та (3.2) запишемо у вигляді

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt, \quad (3.3)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (3.4)$$

Спектральна характеристика (функція, щільність)  $X(\omega)$  є комплексною величиною  $X(\omega) = X(j\omega)$  і має наступні подання:

- Алгебраїчна форма

$$X(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (3.5)$$

- показникова форма (полярна)

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| \exp[j\phi(\omega)]. \quad (3.6)$$

У наведених виразах  $P(\omega)$  та  $Q(\omega)$  відповідно дійсна та уявна частини СЩ, а  $|X(j\omega)|$  та  $\varphi(\omega)$  – модуль та аргумент СЩ:

$$|X(j\omega)| = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)},$$

тому  $X(j\omega)$  називається комплексним спектром, а  $|X(j\omega)|$  – просто спектром аперіодичної функції.

### Приклад.

Знайти спектральну функцію прямокутного імпульсу

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

**Розв'язання:** Спектральну функцію неперіодичного процесу можна визначити за виразом (3.3):

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{\tau} = -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega\tau} - e^0) = \frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{j\omega} = \\ &= \frac{1 - \cos(\omega\tau) + j \sin(\omega\tau)}{j\omega} = \frac{j - j \cos(\omega\tau) + j^2 \sin(\omega\tau)}{j^2 \omega} = -\frac{j - \cos(\omega\tau) - \sin(\omega\tau)}{\omega} = \\ &= \frac{\sin(\omega\tau) + j \cos(\omega\tau) - j}{\omega} = \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} + j \frac{\cos(\omega\tau) - 1}{\omega}. \end{aligned}$$

Перейдемо до показникової форми запису. Для цього виділимо дійсну та уявну частини:

$$P(\omega) = \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}, \quad Q(\omega) = \frac{\cos(\omega\tau) - 1}{\omega}.$$

Знайдемо модуль перетворення Фур'є:



$$\begin{aligned}
|F(j\omega)| &= \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\frac{\sin^2(\omega\tau)}{\omega^2} + \frac{(\cos(\omega\tau) - 1)^2}{\omega^2}} = \\
&= \sqrt{\frac{\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau) - 2\cos(\omega\tau) + 1}{\omega^2}} = \left| \frac{\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau) - 2\cos(\omega\tau) + 1}{\omega} \right| = \\
&= \sqrt{\frac{1 + 1 - 2\cos(\omega\tau)}{\omega^2}} = \frac{\sqrt{2 - 2\cos(\omega\tau)}}{\omega} = \frac{\sqrt{2(1 - \cos(\omega\tau))}}{\omega} = \left| \frac{1 - \cos(\omega\tau)}{\omega} \right| = \\
&= \frac{\sqrt{2 \cdot 2\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}}{\omega} = \frac{2\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega}.
\end{aligned}$$

Знайдемо фазовий кут за виразом:

$$\begin{aligned}
\varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{\cos(\omega\tau) - 1}{\omega}}{\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}} = \operatorname{arctg} \frac{\cos(\omega\tau) - 1}{\sin(\omega\tau)} = \operatorname{arctg} \frac{-2\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\sin(\omega\tau)} = \\
&= \left| \sin\left(\frac{2\omega\tau}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right| = -\operatorname{arctg} \frac{2\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} = -\operatorname{arctg} \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} = \\
&= -\operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right) = -\frac{\omega\tau}{2}.
\end{aligned}$$

Отже, спектр неперіодичної функції  $f(t)$  має такий вигляд:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = \frac{2\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}.$$

**Відповідь:**  $F(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}.$

### Завдання для практичної роботи.

Знайти спектральну функцію  $F(j\omega)$  функції  $f(t) = A \cdot e^{-t^2/2a^2}$ . Варіанти даних наведено у табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Варіанти індивідуальних завдань

Варіант	A	a	Варіант	A	a
1	94	8	11	63	3
2	22	2	12	77	8
3	63	9	13	195	3
4	47	5	14	71	7
5	95	7	15	13	1
6	74	8	16	45	9
7	48	2	17	74	3
8	1	6	18	82	8
9	80	9	19	36	1
10	43	1	20	90	5

## 4. ЕНЕРГЕТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ПРОЦЕСІВ: КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ, СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ЕНЕРГІЇ

### 4.1 Спектральна щільність енергії (потужності)

Енергія будь-якого фізичного процесу  $x(t)$  визначається за виразом:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt, \quad (4.1)$$

Відповідно до (3.4) запишемо вираз для  $x(t)$  у вигляді інтегралу Фур'є [2]:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega,$$

де  $X(\omega)$  – спектральна характеристика процесу.

З урахуванням  $x(t)$  вираз (4.1) для енергії запишемо у вигляді [2]:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \right] dt.$$

Замінімо порядок інтегрування:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(j\omega t) dt \right] d\omega,$$

інтеграл в квадратних дужках має значення:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(j\omega t) dt = X(-j\omega) = X^*(\omega),$$

тому вираз для енергії набуває вигляду [2]

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) X^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.2)$$

Вираз (4.2) – це загальне подання (зображення) теореми Парсеваля (теореми енергії),  $E$  – повна енергія.

Якщо врахувати, що  $\omega = 2\pi f$ , то можна записати:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df. \quad (4.3)$$

Вирази (4.1)-(4.3) – це формулювання закону збереження енергії відповідно в часовій та частотній областях.

Тоді функція [2]

$$S_x(\omega) = |X(\omega)|^2, S_x(f) = \frac{|X(\omega)|^2}{2\pi} = |X(f)|^2 \quad (4.4)$$

описує розподіл енергії за частотою для детермінованого процесу і називається **спектральною щільністю енергії (потужності) чи спектральною енергетичною функцією**.

Квадрат модуля – це парна функція частоти, тоді можна в (4.3) перейти до інтегрування від 0 до  $\infty$ , відповідно подвоївши значення інтеграла:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-0}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_{-0}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-0}^{+\infty} G_x(f) df,$$

де  $G_x(f) = |X(f)|^2 = S_x(f)$  – відповідає **фізичній спектральній щільності**.

## 4.2 Кореляційні функції

Енергетичні характеристики окремого процесу, або двох взаємопов'язаних процесів оцінюються за допомогою кореляційних функцій.

**Автокореляційною функцією (АКФ)** називається функція, що визначає ступінь зв'язку між значенням процесу  $x(t)$  в кожний даний момент часу  $t$  та його значеннями в моменти часу, що зміщені відносно  $t$  на величину  $\tau$ . Для обмежених в часі процесів АКФ визначається залежністю [2]:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt. \quad (4.5)$$

Для  $\tau=0$ :

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = E_x,$$

що збігається з енергією процесу.

Таким чином, фізично  $R_x(\tau)$  – це енергія взаємодії коливань  $x(t)$  та  $x(t+\tau)$ . Максимум енергії має місце при  $\tau=0$  і дорівнює енергії коливань  $x(t)$ . Тому часто на практиці АКФ нормують по енергії:

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{E_x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt}.$$

Для необмежених за часом процесів (наприклад, періодичних) інтеграл (4.5) розходиться, тому АКФ для таких процесів визначається за виразом:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t+\tau)dt. \quad (4.6)$$

### Властивості АКФ:

- максимум АКФ при  $\tau=0$  і дорівнює енергії, максимум нормованої АКФ дорівнює 1;
- для обмежених за енергією та часом коливальних процесів АКФ – згасаюча функція (не обов'язково монотонна);
- для коливань, тривалість яких обмежена інтервалом  $T$ , АКФ дорівнює 0 за межами інтервалу  $2T$ ;
- АКФ – симетрична функція:  $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ ;

- для реальних неперервних коливань АКФ має першу похідну, яка дорівнює 0 при  $\tau=0$ ;

**Взаємна кореляційна функція (ВКФ)** двох процесів  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  характеризує ступінь зв'язку значення процесу  $x_1(t)$  в дані моменти часу  $t$  і значень процесу  $x_2(t)$  в моменти часу, що зміщені на величину  $\tau$  відносно даних моментів часу  $t$ .

Для обмежених за часом процесів  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  маємо [2]:

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tau)x_2(t)dt. \quad (4.7)$$

Для необмежених за часом процесів:

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1(t)x_2(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1(t-\tau)x_2(t)dt. \quad (4.8)$$

Отримаємо залежності АКФ та СЩ. Для цього розглянемо процеси  $x_1(t)=x(t)$  та  $x_2(t)=x(t+\tau)$ . Для введених процесів перетворення Фур'є матиме вигляд:  $X(\omega)$  та  $X(\omega) = X(\omega)\exp(j\omega\tau)$ . Тоді з урахуванням залежності

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$$

отримаємо наступний вираз:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \exp(j\omega\tau)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega. \quad (4.9)$$

Тоді з виразу (4.9) маємо [2]

$$S_x(\omega) = |X(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau. \quad (4.10)$$

Згідно теореми Парсеваля, (4.10) – це СЩ енергії процесу  $x(t)$ . **Вирази (4.9) та (4.10) – це пара перетворень Фур'є, якими встановлюється зв'язок між АКФ та СЩ для детермінованих процесів.**

### Приклад 1.

Знайти кореляційну функцію  $R_f(\tau)$  та спектральну щільність потужності  $S(\omega)$  функції  $f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + t, -\pi \leq t \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} - t, 0 < t \leq \pi \end{cases}$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

**Розв'язання:** Кореляційна функція періодичного процесу визначається за виразом (4.6):

$$R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t + \tau) dt .$$

Обмежимо часовий інтервал одним періодом, тоді:

$$\begin{aligned} R_f(\tau) &= \frac{1}{T_*} \int_{-\frac{T_*}{2}}^{\frac{T_*}{2}} f(t) f(t + \tau) dt = \frac{1}{T_*} \left[ \int_{-\frac{T_*}{2}}^0 \left( \frac{\pi}{2} + t \right) \left( \frac{\pi}{2} + t + \tau \right) dt + \int_0^{\frac{T_*}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - t \right) \left( \frac{\pi}{2} - t - \tau \right) dt \right] = \\ &= \frac{1}{T_*} \left[ \int_{-\frac{T_*}{2}}^0 \left( \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{2} \tau + \frac{\pi}{2} t + t^2 + t\tau \right) dt + \int_0^{\frac{T_*}{2}} \left( \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} t - \frac{\pi}{2} \tau - \frac{\pi}{2} t + t^2 + t\tau \right) dt \right] = \\ &= \frac{1}{T_*} \left[ \int_{-\frac{T_*}{2}}^0 \left( \frac{\pi^2}{4} + \pi t + \frac{\pi}{2} \tau + t^2 + t\tau \right) dt + \int_0^{\frac{T_*}{2}} \left( \frac{\pi^2}{4} - \pi t - \frac{\pi}{2} \tau + t^2 + t\tau \right) dt \right] = \left[ \int_{-\frac{T_*}{2}}^0 x(t) dt + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\frac{T_*}{2}} x(t) dt \right] = \frac{1}{T_*} \left[ \int_{-\frac{T_*}{2}}^{\frac{T_*}{2}} t^2 dt + \int_{-\frac{T_*}{2}}^{\frac{T_*}{2}} t\tau dt + \int_{-\frac{T_*}{2}}^{\frac{T_*}{2}} \frac{\pi^2}{4} dt + \int_{-\frac{T_*}{2}}^0 \pi t dt + \int_{-\frac{T_*}{2}}^0 \frac{\pi}{2} \tau dt - \int_0^{\frac{T_*}{2}} \pi t dt - \right. \\ &\left. - \int_0^{\frac{T_*}{2}} \frac{\pi}{2} \tau dt \right] = \frac{1}{T_*} \left[ \frac{t^3}{3} \Big|_{-\frac{T_*}{2}}^{\frac{T_*}{2}} + \frac{\tau}{2} t^2 \Big|_{-\frac{T_*}{2}}^{\frac{T_*}{2}} + \frac{\pi^2}{4} t \Big|_{-\frac{T_*}{2}}^{\frac{T_*}{2}} + \frac{\pi}{2} t^2 \Big|_0^{\frac{T_*}{2}} + \frac{\pi}{2} \tau t \Big|_{-\frac{T_*}{2}}^0 - \frac{\pi}{2} t^2 \Big|_0^{\frac{T_*}{2}} - \frac{\pi}{2} \tau t \Big|_0^{\frac{T_*}{2}} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= |T_* = 2\pi| &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi^3 - (-\pi)^3}{3} + \tau \frac{\pi^2 - (-\pi)^2}{2} + \frac{\pi^2}{4} (\pi - (-\pi)) + \frac{\pi}{2} (0 - (-\pi)^2) + \right. \\
&+ \left. \frac{\pi}{2} \tau (0 - (-\pi)) - \frac{\pi}{2} (\pi^2 - 0) - \frac{\pi}{2} \tau (\pi - 0) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{2\pi^3}{3} + \tau \cdot \frac{0}{2} + \frac{\pi^2 \cdot 2\pi}{4} - \frac{\pi^3}{2} + \right. \\
&+ \left. \frac{\pi^2}{2} \tau - \frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^2}{2} \tau \right] = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2\pi^3}{3} + \frac{2\pi^3}{4} - \pi^3 \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{8\pi^3 + 6\pi^3 - 12\pi^3}{12} = \frac{2\pi^3}{24} = \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

Визначимо спектральну щільність потужності:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2}{12} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{\pi^2}{12} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau = \delta(\omega) \right| = \frac{\pi^2}{12} \delta(\omega).$$

**Відповідь:**  $R_f(\tau) = \frac{\pi^2}{12}$ ,  $S(\omega) = \frac{\pi^2}{12} \delta(\omega)$ .

### Приклад 2.

Знайти кореляційну функцію  $R_f(\tau)$  та спектральну щільність потужності  $S(\omega)$  функції  $f(t) = Ae^{-at}$ .

**Розв'язання:** Кореляційна функція неперіодичного процесу визначається за виразом (4.5):

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t + \tau) dt.$$

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-at} Ae^{-a\tau - at} dt = A^2 e^{-a\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} e^{-at} dt = A^2 e^{-a\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at} dt = A^2 e^{-a\tau} \cdot \left( -\frac{1}{2a} \right) \cdot e^{-2at} \Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Розглянемо тільки область  $t > 0$ :

$$R_f(\tau) = -\frac{A^2 e^{-a\tau}}{2a} e^{-2at} \Big|_0^{\infty} = -\frac{A^2 e^{-a\tau}}{2a} (e^{-\infty} - e^0) = |e^{-\infty} = 0| = -\frac{A^2 e^{-a\tau}}{2a} (0 - 1) = \frac{A^2 e^{-a\tau}}{2a}.$$

Визначимо спектральну щільність потужності:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2 e^{-a\tau}}{2a} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{A^2}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{A^2}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} (\cos(\omega\tau) -$$



$$-j \sin(\omega\tau)) dt = \frac{A^2}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) - e^{-a\tau} j \sin(\omega\tau)) dt = \frac{A^2}{2a} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} j \sin(\omega\tau) dt \right) = \frac{A^2}{2a} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \sin(\omega\tau) dt \right).$$

Розглянемо кожен інтеграл окремо:

$$\begin{aligned} 1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt &= \left| \begin{array}{l} U = e^{-a\tau} \quad dV = \cos(\omega\tau) dt \\ dU = -ae^{-a\tau} dt \quad V = \frac{1}{\omega} \sin(\omega\tau) \end{array} \right| = \frac{1}{\omega} e^{-a\tau} \sin(\omega\tau) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin(\omega\tau) (-a) e^{-a\tau} dt = \frac{1}{\omega} e^{-a\tau} \sin(\omega\tau) \Big|_0^{\infty} + \frac{a}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \sin(\omega\tau) dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} U = e^{-a\tau} \quad dV = \sin(\omega\tau) dt \\ dU = -ae^{-a\tau} dt \quad V = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega\tau) \end{array} \right| = \frac{1}{\omega} (e^{-\infty} \sin(\infty) - e^{-0} \sin(0)) + \frac{a}{\omega} \left( -\frac{1}{\omega} e^{-a\tau} \cdot \right. \\ &\cdot \cos(\omega\tau) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\omega} \cos(\omega\tau) (-a) e^{-a\tau} dt \Big) = \frac{1}{\omega} (0 - 0) + \frac{a}{\omega} \left( -\frac{1}{\omega} e^{-a\tau} \cdot \cos(\omega\tau) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \right. \\ &- \frac{a}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt \Big) = \frac{a}{\omega} \left( -\frac{1}{\omega} (e^{-\infty} \cdot \cos(\infty) - e^{-0} \cdot \cos(0)) - \frac{a}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt \right) = \\ &= -\frac{a}{\omega^2} (0 - 1) - \frac{a^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt = \frac{a}{\omega^2} - \frac{a^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt. \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt &= \frac{a}{\omega^2} - \frac{a^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt; \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt + \frac{a^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt &= \frac{a}{\omega^2}; \\ \left( 1 + \frac{a^2}{\omega^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt &= \frac{a}{\omega^2}; \\ \frac{\omega^2 + a^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt &= \frac{a}{\omega^2}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt &= \frac{a}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^2}{a^2 + \omega^2}; \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt = \frac{a}{a^2 + \omega^2}.$$

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \sin(\omega\tau) dt = \left| \begin{array}{l} U = e^{-a\tau} \quad dV = \sin(\omega\tau) dt \\ dU = -ae^{-a\tau} dt \quad V = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega\tau) \end{array} \right| = \left( -\frac{1}{\omega} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\omega} \cos(\omega\tau) (-a) e^{-a\tau} dt = -\frac{1}{\omega} (e^{-\infty} \cdot \cos(\infty) - e^{-0} \cdot \cos(0)) + \frac{a}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt =$$

$$= -\frac{1}{\omega} (0 - 1) + \frac{a}{\omega} \cdot \frac{a}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} - \frac{a^2}{\omega(a^2 + \omega^2)} = \frac{(a^2 + \omega^2) - a^2}{\omega(a^2 + \omega^2)} = \frac{a^2 + \omega^2 - a^2}{\omega(a^2 + \omega^2)} =$$

$$= \frac{\omega^2}{\omega(a^2 + \omega^2)} = \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}.$$

$$S(\omega) = \frac{A^2}{2a} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \sin(\omega\tau) dt \right) = \frac{A^2}{2a} \left( \frac{a}{a^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \right) =$$

$$= \frac{A^2 a}{2a(a^2 + \omega^2)} - j \frac{A^2 \omega}{2a(a^2 + \omega^2)}.$$

Перейдемо до показникової форми:

$$P(\omega) = \frac{A^2 a}{2a(a^2 + \omega^2)}; \quad Q(\omega) = -\frac{A^2 \omega}{2a(a^2 + \omega^2)}.$$

$$|S(\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\frac{A^4 a^2}{4a^2(a^2 + \omega^2)^2} + \frac{A^4 \omega^2}{4a^2(a^2 + \omega^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{A^4 a^2}{4a^2(a^2 + \omega^2)^2} + \frac{A^4 \omega^2}{4a^2(a^2 + \omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{A^4 a^2 + A^4 \omega^2}{4a^2(a^2 + \omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{A^4 (a^2 + \omega^2)}{4a^2(a^2 + \omega^2)^2}} = \frac{A^2}{2a} \cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}.$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{-\frac{A^2 \omega}{2a(a^2 + \omega^2)}}{\frac{A^2 a}{2a(a^2 + \omega^2)}} = -\arctg \frac{A^2 \omega 2a(a^2 + \omega^2)}{A^2 a 2a(a^2 + \omega^2)} = -\arctg \frac{\omega}{a}.$$

Отже, вираз спектральної щільності потужності приймає наступний вигляд:

$$S(\omega) = \frac{A^2}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-j\arctg \frac{\omega}{a}}.$$

$$\text{Відповідь: } R_f(\tau) = \frac{A^2 e^{-a\tau}}{2a}, \quad S(\omega) = \frac{A^2}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-j\arctg \frac{\omega}{a}}.$$

### Завдання для практичної роботи.

1) Знайти кореляційну функцію  $R_f(\tau)$  функції  $f(t) = t$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

2) Знайти кореляційну функцію  $R_f(\tau)$  функції  $f(t) = t^2$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

3) Знайти кореляційну функцію  $R_f(\tau)$  функції  $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

4) Знайти спектральну щільність потужності  $S(\omega)$  функції  $f(t) = t$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

5) Знайти спектральну щільність потужності  $S(\omega)$  функції  $f(t) = t^2$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

6) Знайти спектральну щільність потужності  $S(\omega)$  функції  $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

7) Знайти кореляційну функцію  $R_f(\tau)$  функції  $f(t) = t$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

8) Знайти кореляційну функцію  $R_f(\tau)$  функції  $f(t) = t^2$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

9) Знайти кореляційну функцію  $R_f(\tau)$  функції  $f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$ ,

яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

10) Знайти спектральну щільність потужності  $S(\omega)$  функції  $f(t) = t$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

11) Знайти спектральну щільність потужності  $S(\omega)$  функції  $f(t) = t^2$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

12) Знайти спектральну щільність потужності  $S(\omega)$  функції  $f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

13) Знайти кореляційну функцію  $R_f(\tau)$  функції  $f(t) = t$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

14) Знайти кореляційну функцію  $R_f(\tau)$  функції  $f(t) = t^2$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

15) Знайти кореляційну функцію  $R_f(\tau)$  функції  $f(t) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \leq t \leq 0 \\ \pi, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

16) Знайти спектральну щільність потужності  $S(\omega)$  функції  $f(t) = t$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

17) Знайти спектральну щільність потужності  $S(\omega)$  функції  $f(t) = t^2$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

18) Знайти спектральну щільність потужності  $S(\omega)$  функції  $f(t) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \leq t \leq 0 \\ \pi, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

19) Знайти кореляційну функцію  $R_f(\tau)$  функції  $f(t) = t$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

20) Знайти спектральну щільність потужності  $S(\omega)$  функції  $f(t) = t$ , яка має період  $T=2\pi$  та визначена на інтервалі  $[-\pi; \pi]$ .

## 5. ІМОВІРНІСТЬ, ОСНОВНІ ПРАВИЛА ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТІ. СЕРЕДНІ ЗНАЧЕННЯ ТА МОМЕНТИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

У природі є багато фізичних явищ, які не можна описати чи задати явною математичною формулою, бо кожне їх спостереження дає інший результат, тобто кожне спостереження буде лише одним з множини можливих результатів.

Усі отримані залежності такого явища від часу будуть випадково відрізнятися одна від одної і будуть в сукупності являти собою випадкове явище, або ж випадковий процес. Тобто, випадкові явища (процеси) складаються з множини окремих варіантів будь-яких залежностей, або ж реалізацій. Тому на практиці для опису таких процесів зручно **користуватись чисельними характеристиками випадкової величини (ВВ) – моментами розподілу**. Вони являють собою статистичні середні.

Середнє значення ВВ називається **математичним сподіванням (МС) ВВ** і позначається

$$M[X] = \bar{X}. \quad (5.1)$$

Для неперервної ВВ МС визначається інтегралом [2]

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (5.2)$$

За виразом (5.2) можна знайти МС будь-якої функції від  $X$ , наприклад степеневий  $\varphi(x) = (x - c)^r$ , де  $c$  – стала величина,  $r = 0, 1, 2, \dots$ . Визначені таким чином числа називаються **моментами  $r$ -того порядку випадкової величини  $X$  відносно сталої  $c$** .

- **Початковим моментом  $m_r(X)$**  називається МС  **$r$ -того ступеню ВВ**, тобто МС функції  $\varphi(x)$  за умови  $c=0$  [2]:

$$m_r(X) = M[X^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} X^r f(x) dx. \quad (5.3)$$

Зокрема:

$$m_0(X) = M[X^0] = \int_{-\infty}^{+\infty} X^0 f(x) dx = 1;$$

$$m_1(X) = M[X^1] = \int_{-\infty}^{+\infty} X^1 f(x) dx = M[X] \quad \text{— це математичне сподівання}$$

ВВ;

$$m_2(X) = M[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 f(x) dx = M[X^2] \quad \text{— за моментом другого порядку}$$

знаходиться середній квадрат ВВ, він пропорційний середній потужності, а корінь з нього характеризує середнє (ефективне) значення ВВ.

- Якщо  $C = \bar{X}$ , то різниця  $(X - \bar{X})$  — є відхиленням ВВ від МС і називається **центрованою ВВ**. **Центральним моментом**  $\mu_r(X)$  називається МС **r-того** ступеню відхилення ВВ від її МС (центрованої ВВ), тобто МС функції  $\varphi(x)$  за умови  $C = \bar{X}$ :

$$\mu_r(X) = M[(X - \bar{X})^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \bar{X})^r f(x) dx. \quad (5.4)$$

Зокрема:

$$\mu_0(X) = 1;$$

$$\mu_1(X) = M[(X - \bar{X})] = M[X] - M[\bar{X}] = \bar{X} - \bar{X} = 0;$$

$$\mu_2(X) = M[(x - \bar{X})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^2 f(x) dx. \quad (5.5)$$

Вираз (5.5) визначає **дисперсію ВВ**, яка є мінімальним центральним моментом другого порядку серед інших.

За визначенням маємо

$$\mu_2(X) = M[(X - C)^2] = M[X^2] - 2CM[X] + C^2,$$

для того, щоб дістати мінімум цього виразу для  $C$ , необхідно, щоб виконувалась рівність:

$$\frac{dM[(X - C)^2]}{dC} = 0,$$

звідки  $C = \bar{X}$ .

**Дисперсія** процесу (чи ВВ) виділяється серед інших моментів і має окреме позначення  $D(X) = \mu_2(X)$ .

Якщо ВВ – дискретна послідовність, то вирази (5.3) та (5.4) записуються у вигляді:

$$m_r(X) = M[X^r] = \sum_i X_i^r p_i, \quad (5.6)$$

$$\mu_r(X) = M[(X - \bar{X})^r] = \sum_i (X_i - \bar{X})^r p_i. \quad (5.7)$$

де  $X_i$  – значення ВВ в  $i$ -тій реалізації;  $p_i$  – ймовірність того, що ВВ дорівнює  $X_i$ .

Зокрема:

$$m_1(X) = M[X^1] = \sum_i X_i p_i = M[X] \text{ – математичне сподівання ВВ;}$$

$$m_2(X) = M[X^2] = \sum_i X_i^2 p_i = M[X^2] \text{ – середній квадрат ВВ.}$$

Розглянемо центровану ВВ  $\overset{o}{X} = X - \bar{X}$ .

**Дисперсія ВВ** – числова характеристика, яка дорівнює математичному сподіванню квадрата центрованої ВВ.

$$D(X) = M\left[\overset{o}{X}^2\right] = M[(X - \bar{X})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \bar{X})^2 f(x) dx. \quad (5.8)$$

Запишемо дисперсію в іншому вигляді:



$$D(X) = M[(X - \bar{X})^2] = M[X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2] = M[X^2] - 2\bar{X}\bar{X} + \bar{X}^2 = m_2(X) - (\bar{X})^2 \quad (5.9)$$

Таким чином, **дисперсія** – це різниця між середнім квадратом ВВ і квадратом її МС. Дисперсія характеризує міру розсіяння значень ВВ відносно МС і має розмірність квадрата ВВ.

**Середнє квадратичне відхилення (СКВ) ВВ** (стандартне відхилення) – це додатне значення квадратного кореня з дисперсії (має розмірність ВВ):

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}. \quad (5.10)$$

### Приклад 1.

Визначити математичне сподівання  $M[X]$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{7; 4; 9; 6; 8\}$ .

**Розв’язання:** Математичне сподівання дискретної випадкової величини визначається за наступною формулою:

$$M[X] = \sum_{i=1}^n X_i p_i,$$

де  $X_i$  – значення випадкової величини в  $i$ -тій реалізації;  $p_i$  – ймовірність того, що випадкова величина дорівнює  $X_i$ .

Ймовірність  $p_i = \frac{n}{N}$ , де  $n$  – кількість однакових подій, наприклад, дискретна випадкова величина декілька разів приймає одне й те ж значення;  $N$  – загальна кількість подій. Оскільки кожне значення випадкової величини є унікальним (зустрічається тільки один раз), то ймовірності  $p_i$  будуть рівними й становитимуть 20%, тобто  $p_i = \frac{1}{5} = 0,2$ . Отже, визначимо математичне сподівання

$$M[X] = 0,2 \cdot (7 + 4 + 9 + 6 + 8) = 6,8$$

**Відповідь:**  $M[X] = 6,8$ .

### **Приклад 2.**

Визначити дисперсію  $D(X)$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{1; 5; 3; 3; 9; 7\}$ .

**Розв'язання:** Дисперсія дискретної випадкової величини визначається за наступною формулою:

$$D(X) = m_2(X) - [m_1(X)]^2 = M[X^2] - (M[X])^2,$$

де  $m_2(X)$  – середній квадрат випадкової величини;  $[m_1(X)]^2$  – квадрат математичного сподівання.

Початковий момент другого порядку (середній квадрат випадкової величини) обчислюється наступним чином:

$$m_2(X) = M[X^2] = \sum_{i=1}^n X_i^2 p_i.$$

Отже, визначимо дисперсію з урахуванням того, що ймовірність появи значення «3» становить  $2/6$  або  $1/3$ , тоді як для кожного іншого значення ймовірність однакова й становить  $p_i = \frac{1}{6}$ .

$$D(X) = (1^2 + 5^2 + 9^2 + 7^2) \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} - \left[ 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(1 + 5 + 9 + 7) \right]^2 = 29 - 21,8 = 7,2$$

**Відповідь:**  $D(X) = 7,2$ .

### **Приклад 3.**

Визначити середньоквадратичне відхилення  $\sigma_x$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{1; 17; 9; 5; 11\}$  та рівними ймовірностями.

**Розв'язання:** Середньоквадратичне відхилення дискретної випадкової величини визначається за наступною формулою:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

Імовірність появи кожного значення дискретної випадкової величини однакова й становить  $p_i = \frac{1}{5} = 0,2$ . Розрахуємо дисперсію

$$D(X) = (1^2 + 17^2 + 9^2 + 5^2 + 11^2) \cdot 0,2 - [(1 + 17 + 9 + 5 + 11) \cdot 0,2]^2 = 103,4 - 73,96 = 29,44$$

Отже, визначимо середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{29,44} = 5,43.$$

**Відповідь:**  $\sigma_x = 5,43$ .

### **Завдання для практичної роботи.**

1) Визначити математичне сподівання  $M[X]$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{18; 21; 21; 20; 20\}$ .

2) Визначити математичне сподівання  $M[X]$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{4; 1; 4; 3; 4; 5; 2; 1; 7\}$ .

3) Визначити математичне сподівання  $M[X]$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{44; 85; 27; 51; 64\}$ .

4) Визначити дисперсію  $D(X)$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{22; 35; 22; 35; 29\}$ .

5) Визначити дисперсію  $D(X)$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{118; 90; 40; 80\}$ .

6) Визначити дисперсію  $D(X)$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{15; 15; 15; 20; 20; 21\}$ .

7) Визначити середньоквадратичне відхилення  $\sigma_x$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{77;85;90;77\}$ .

8) Визначити середньоквадратичне відхилення  $\sigma_x$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{5;1;5;2;5;1;2;2\}$ .

9) Визначити середньоквадратичне відхилення  $\sigma_x$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{11;17;11;16;22;27;16;16\}$ .

10) Визначити математичне сподівання  $M[X]$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{5;2;3;2;5;1\}$ .

11) Визначити математичне сподівання  $M[X]$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{33;43;46;33;46;38;31;49;33;36\}$ .

12) Визначити математичне сподівання  $M[X]$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{18;35;23;12;35\}$ .

13) Визначити дисперсію  $D(X)$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{9;3;10;5;10\}$ .

14) Визначити дисперсію  $D(X)$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{54;84;34;54\}$ .

15) Визначити дисперсію  $D(X)$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{66;58;68;55;58;55\}$ .

16) Визначити середньоквадратичне відхилення  $\sigma_x$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{5;2;5;3\}$ .

17) Визначити середньоквадратичне відхилення  $\sigma_x$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{11;8;14;8;9;11;12;14\}$ .

18) Визначити середньоквадратичне відхилення  $\sigma_x$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{24;10;14;16;22;16;25;24\}$ .

19) Визначити середньоквадратичне відхилення  $\sigma_x$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{19;34;22;2;17;29;30;32\}$ .

20) Визначити середньоквадратичне відхилення  $\sigma_x$  дискретної випадкової величини з наступними можливими значеннями  $X = \{17;25;36;38;44;38;37;42\}$ .

## 6. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ (МОМЕНТНІ ФУНКЦІЇ) ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Моментні функції – це статистичні середні значення випадкових процесів (ВП). Подібно до числових характеристик ВВ маємо для ВП [2]:

- **Середнє значення (МС) ВП (моментна функція першого порядку)**

$$M[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x, t) dx = \bar{x}(t) \quad (6.1)$$

- **Середній квадрат ВП (мом. Функція другого порядку)**

$$M[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x, t) dx = \bar{x}^2(t) = \psi_x^2(t) \quad (6.2)$$

- **Кореляційна функція (змішана мом. функція другого порядку)**

$$M[x(t_1)x(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 = R_x(t_1, t_2) \quad (6.3)$$

- **Дисперсія (центральна мом. функція другого порядку)**

$$M[(x(t) - \bar{x}(t))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x}(t))^2 f_1(x, t) dx = D_x(t) = \sigma_x^2(t) \quad (6.4)$$

- **Коваріаційна функція (центральна змішана мом функція другого порядку)**

$$M[(x(t_1) - \bar{x}(t_1))(x(t_2) - \bar{x}(t_2))] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t_1) - \bar{x}(t_1))(x(t_2) - \bar{x}(t_2)) f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 = K_x(t_1, t_2) \quad (6.5)$$

- **Середній квадрат процесу**

$$\psi_x^2(t) = \sigma_x^2(t) + (\bar{x}(t))^2 \quad (6.6)$$

Дисперсія і середній квадрат збігаються, якщо  $\bar{x}(t) = 0$ . При цьому:

$$R_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2).$$

Якщо  $\bar{x}(t) \neq 0$ , то  $R_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + \bar{x}(t_1)\bar{x}(t_2)$ .

Якщо  $t_1 = t_2 = t$ , то

$$R_x(t, t) = M[x(t)x(t)] = M[x^2(t)] = \psi_x^2(t)$$

$$\begin{aligned} K_x(t, t) &= M[(x(t) - \bar{x}(t))(x(t) - \bar{x}(t))] = M[(x(t) - \bar{x}(t))^2] = \\ &= D_x(t) = \sigma_x^2(t) \end{aligned}$$

Для двох ВП  $x(t)$  та  $y(t)$  крім моментних функцій кожного з процесів визначають взаємну кореляційну (або коваріаційну) функцію (сумісна мом. функція другого порядку):

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M[x(t_1)y(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf_2(x, y, t_1, t_2) dx dy \quad (6.7)$$

### Завдання для практичної роботи.

1) Визначити кореляційну функцію  $R_x(t_1, t_2)$  випадкового процесу при  $t_1 = t_2 = t$ .

2) Визначити коваріаційну функцію  $K_x(t_1, t_2)$  випадкового процесу при  $t_1 = t_2 = t$ .

3) Чому дорівнює дисперсія випадкового процесу, якщо математичне сподівання рівне 0?

4) Чому дорівнює середній квадрат випадкового процесу при  $\bar{x}(t) = 0$ ?

5) Визначити кореляційну функцію  $R_x(t_1, t_2)$  випадкового процесу при  $\bar{x}(t) \neq 0$ .

6) Визначити кореляційну функцію  $R_x(t_1, t_2)$  випадкового процесу при  $t_1 = t_2 = t$ .

7) Визначити коваріаційну функцію  $K_x(t_1, t_2)$  випадкового процесу при  $t_1 = t_2 = t$ .

8) Чому дорівнює дисперсія випадкового процесу, якщо математичне сподівання рівне 0?

9) Чому дорівнює середній квадрат випадкового процесу при  $\bar{x}(t) = 0$ ?

10) Визначити кореляційну функцію  $R_x(t_1, t_2)$  випадкового процесу при  $\bar{x}(t) \neq 0$ .

11) Визначити кореляційну функцію  $R_x(t_1, t_2)$  випадкового процесу при  $t_1 = t_2 = t$ .

12) Визначити коваріаційну функцію  $K_x(t_1, t_2)$  випадкового процесу при  $t_1 = t_2 = t$ .

13) Чому дорівнює дисперсія випадкового процесу, якщо математичне сподівання рівне 0?

14) Чому дорівнює середній квадрат випадкового процесу при  $\bar{x}(t) = 0$ ?

15) Визначити кореляційну функцію  $R_x(t_1, t_2)$  випадкового процесу при  $\bar{x}(t) \neq 0$ .



16) Визначити кореляційну функцію  $R_x(t_1, t_2)$  випадкового процесу при  $t_1 = t_2 = t$ .

17) Визначити коваріаційну функцію  $K_x(t_1, t_2)$  випадкового процесу при  $t_1 = t_2 = t$ .

18) Чому дорівнює дисперсія випадкового процесу, якщо математичне сподівання рівне 0?

19) Чому дорівнює середній квадрат випадкового процесу при  $\bar{x}(t) = 0$ ?

20) Визначити кореляційну функцію  $R_x(t_1, t_2)$  випадкового процесу при  $\bar{x}(t) \neq 0$ .

## 7. ЕНЕРГЕТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Як і при аналізі детермінованих процесів, ВП характеризуються перетворенням Фур'є. Для ВП з нульовим середнім (для спрощення) можна записати його подання у вигляді інтегралу Фур'є:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (7.1)$$

де випадкові амплітуди  $X(\omega)$  є спектральною функцією процесу і визначаються оберненим перетворенням Фур'є:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (7.2)$$

Енергетичною характеристикою процесу (7.1) є КФ, яка для нульового СЗ збігається з коваріаційною функцією. Для стаціонарних ВП вона визначається як

$$M[x(t_1)x(t_2)] = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau) \quad (7.3)$$

Якщо (7.1) підставити в (7.3), отримаємо

$$R_x(t_2 - t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' M[X(\omega)X(\omega')] \exp j(\omega t_2 - \omega' t_1) \quad (7.4)$$

Рівність (7.4) справедлива (залежить лише від різниці  $\tau = t_2 - t_1$ ) за умови  $\omega = \omega'$ . При  $t_2 = t_1$  ліва частина виразу (7.4) дорівнює дисперсії, тобто відмінна від нуля.

Це означає, що при  $\omega = \omega'$

$$M[X(\omega)X(\omega')] = M[X^2(\omega)] \neq 0$$

і ця кореляція має вигляд

$$M[X(\omega)X(\omega')] = M[X^2(\omega)]\delta(\omega - \omega') \quad (7.5)$$

Якщо (7.5) підставити в (7.4) і врахувати фільтруючі властивості  $\delta$ -функції, то отримаємо:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' M[X^2(\omega)] \frac{1}{2\pi} \exp j(\omega t_2 - \omega' t_1) \delta(\omega - \omega') = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad \tau = t_2 - t_1 \end{aligned} \quad (7.6)$$

де

$$S_x(\omega) = M[X^2(\omega)] \frac{1}{2\pi}. \quad (7.7)$$

З (7.6) визначається, що  $S_x(\omega)$  є амплітудою Фур'є для КФ випадкового процесу. **Це твердження називається теоремою Вінера-Хінчина.**

Якщо в(7.6) покласти  $\tau = t_2 - t_1 = 0$ , то отримаємо

$$R_x(0) = \sigma_x^2 = D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega, \quad (\tau = t_2 - t_1 = 0) \quad (7.8)$$

Тобто,  $S_x(\omega)$  є компонентою дисперсії, яка належить до інтервалу частот  $(\omega, \omega + d\omega)$ . Так як дисперсія фізично виражає енергію процесу, то  $S_x(\omega)$  називається **спектральною енергетичною функцією або спектральною щільністю енергії.**

**Формули Вінера-Хінчина** пов'язують між собою пару інтегральних перетворень Фур'є:

- Обернене ПФ  $R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega,$  (7.9)

Пряме ПФ  $S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$  (7.10)

**Завдання для практичної роботи.**

Знайти фізичну (однобічну) спектральну щільність випадкового процесу  $f(t) = A \cdot n(t) \cdot \cos(\omega t)$  ( $n(t)$  – стаціонарний білий шум з кореляційною функцією  $R(\tau) = \frac{N}{2} \delta(\tau)$ ). Варіанти даних наведено в табл. 7.1.

Таблиця 7.1 – Варіанти індивідуальних завдань

Варіант	A	$\omega$	N	Варіант	A	$\omega$	N
1	37	40	9	11	78	14	1
2	61	32	1	12	36	11	2
3	32	126	5	13	89	44	7
4	71	87	3	14	62	36	9
5	89	42	8	15	43	22	2
6	65	22	9	16	76	27	1
7	37	39	10	17	60	49	7
8	28	89	7	18	50	91	6
9	31	97	4	19	75	3	5
10	56	13	6	20	58	31	4

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач [Текст] / С.И. Баскаков. – М.: Высшая школа, 2002. – 214 с.
2. Бублик Г.Ф. Фізичні процеси в приладах і системах: Навч. посібник [Текст] / Г.Ф. Бублик. – К.: Либідь, 1997. – 200 с.
3. Бендат Дж. Применение корреляционного и спектрального анализа [Текст] / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
4. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника [Текст] / В.И. Тихонов. – М.: Сов. радио, 1966. – 678 с.