

АЛГОРИТМИ МЕТОДУ ПІКАРА ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ КІНЕМАТИЧНИХ РІВНЯНЬ У КВАТЕРНІОНАХ

Вступ

Досліджування методів чисельного інтегрування кінематичних рівнянь орієнтації твердого тіла за алгоритмами, поданими в існуючій літературі ([1], [2]), нашоується на деякі труднощі, пов'язані з невідповідністю заявлених порядків методу чисельного інтегрування з результатами, що виявляються при моделюванні цих алгоритмів на ЕОМ.

Так у [1] запропоновані такі формули алгоритмів чисельного інтегрування :

- метод другого порядку:

$$N_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_1 - \frac{1}{8} |\nabla \Theta_1|^2,$$

- метод третього порядку:

$$N_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_1 - \frac{1}{8} |\nabla \Theta_1|^2 + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_1 \times \nabla^2 \Theta_1) - \frac{1}{48} |\nabla \Theta_1|^2 \nabla \Theta_1,$$

- метод четвертого порядку:

$$N_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_1 - \frac{1}{8} |\nabla \Theta_1|^2 + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_1 \times \nabla^2 \Theta_1) - \frac{1}{48} |\nabla \Theta_1|^2 \nabla \Theta_1 + \frac{1}{48} (\nabla \Theta_1 \times \nabla^3 \Theta_1) - \frac{1}{192} |\nabla \Theta_1|^2 \nabla^2 \Theta_1 + \frac{1}{384} |\nabla \Theta_1|^4 + \dots$$

Моделювання за цими формулами дає результати, що наведені на рис. 1, 2.

Як впливає з аналізу цих результатів, метод, що заявлений як метод четвертого порядку, таким не є, а поводить себе як метод третього порядку. Тому виникла потреба більш ретельно побудувати алгоритми чисельного інтегрування. Статтю присвячено розробці алгоритмів чисельного інтегрування кінематичного рівняння у кватерніонах методом послідовних наближень Пікара і моделюванню цих алгоритмів на ЕОМ з метою встановлення істинного порядку алгоритму і порівняння з іншими відомими алгоритмами.

Постановка задачі

Кінематичне рівняння орієнтації у кватерніонах, як відомо, має вид:

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = \frac{1}{2} \Lambda(t) \circ \omega(t),$$

де $\Lambda = \lambda_0 + \mathbf{i}\lambda_X + \mathbf{j}\lambda_Y + \mathbf{k}\lambda_Z$ - кватерніон повороту об'єкта, $\omega(t) = 0 + \mathbf{i}\omega_X(t) + \mathbf{j}\omega_Y(t) + \mathbf{k}\omega_Z(t)$ - вектор-кватерніон з проекцій кутової швидкості об'єкта на осі, пов'язані з об'єктом, \circ - позначка кватерніонного множення. За методом Пікара чисельний розв'язок цього диференційного рівняння зазвичай відшукується у вигляді

$$\Lambda_{n+1} = \Lambda_n \circ N_{n+1},$$

де Λ_n - значення кватерніона повороту на n -му кроці інтегрування; Λ_{n+1} - шукане значення цього кватерніона на наступному $(n+1)$ -му кроці інтегрування, причому N_{n+1} є значенням розв'язку рівняння

$$N(t) = 1 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t N(\xi) \circ \omega(\xi) d\xi \quad (1)$$

у момент часу $t = t_{n+1} = t_n + h$.

Рівняння (1), у відповідності з методом Пікара, розв'язується послідовними наближеннями.

Побудова наближених розв'язків допоміжного рівняння до четвертого наближення

Перше наближення.

У нульовому наближенні прийемо $N_{(0)}(t) = 1$. Підставивши це у праву частину (1), одержимо розв'язок рівняння (1) у першому наближенні:

$$N_{(1)}(t) = 1 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t N_{(0)}(\xi) \circ \omega(\xi) d\xi = 1 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t \omega(\xi) d\xi \quad (2)$$

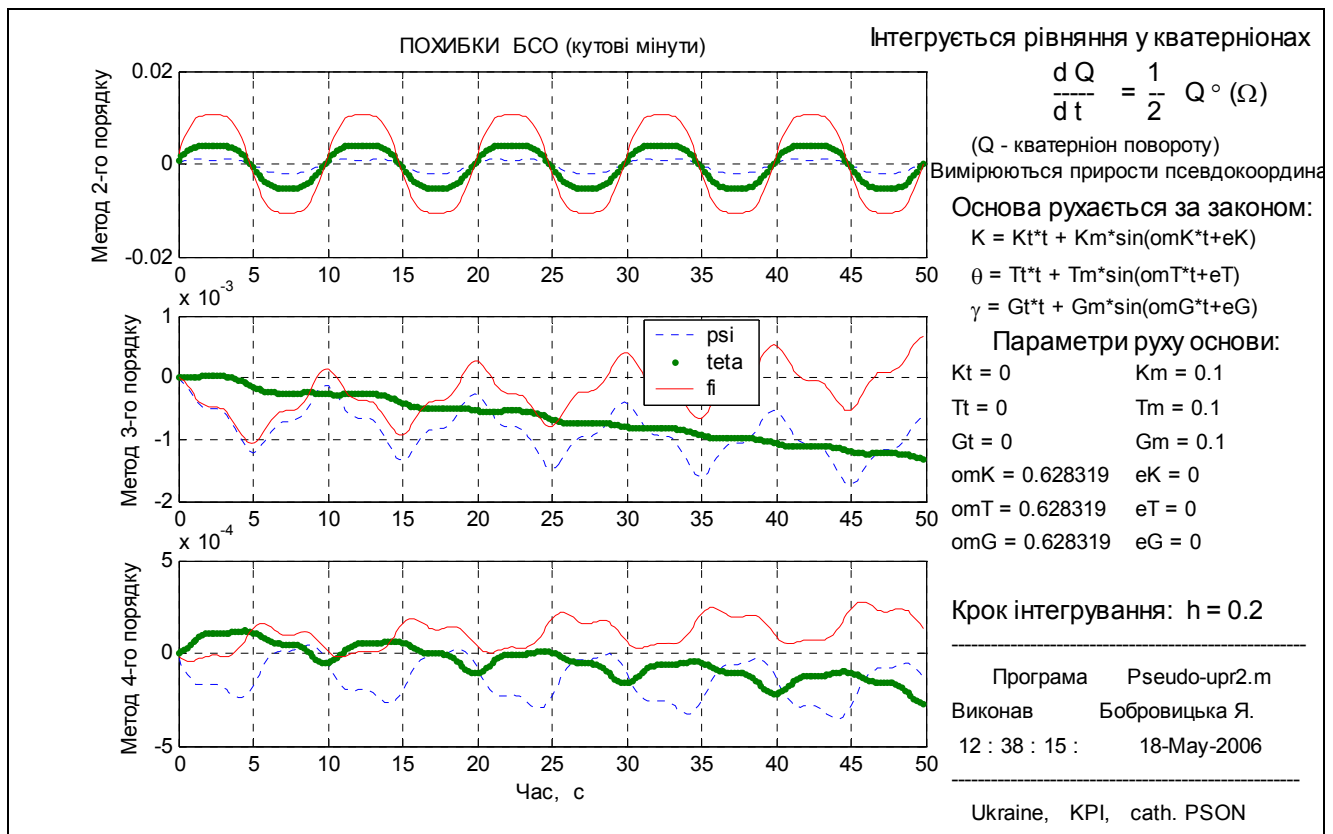


Рис. 1. Похибки алгоритмів за [1] при значенні кроку $h=0,2$ с

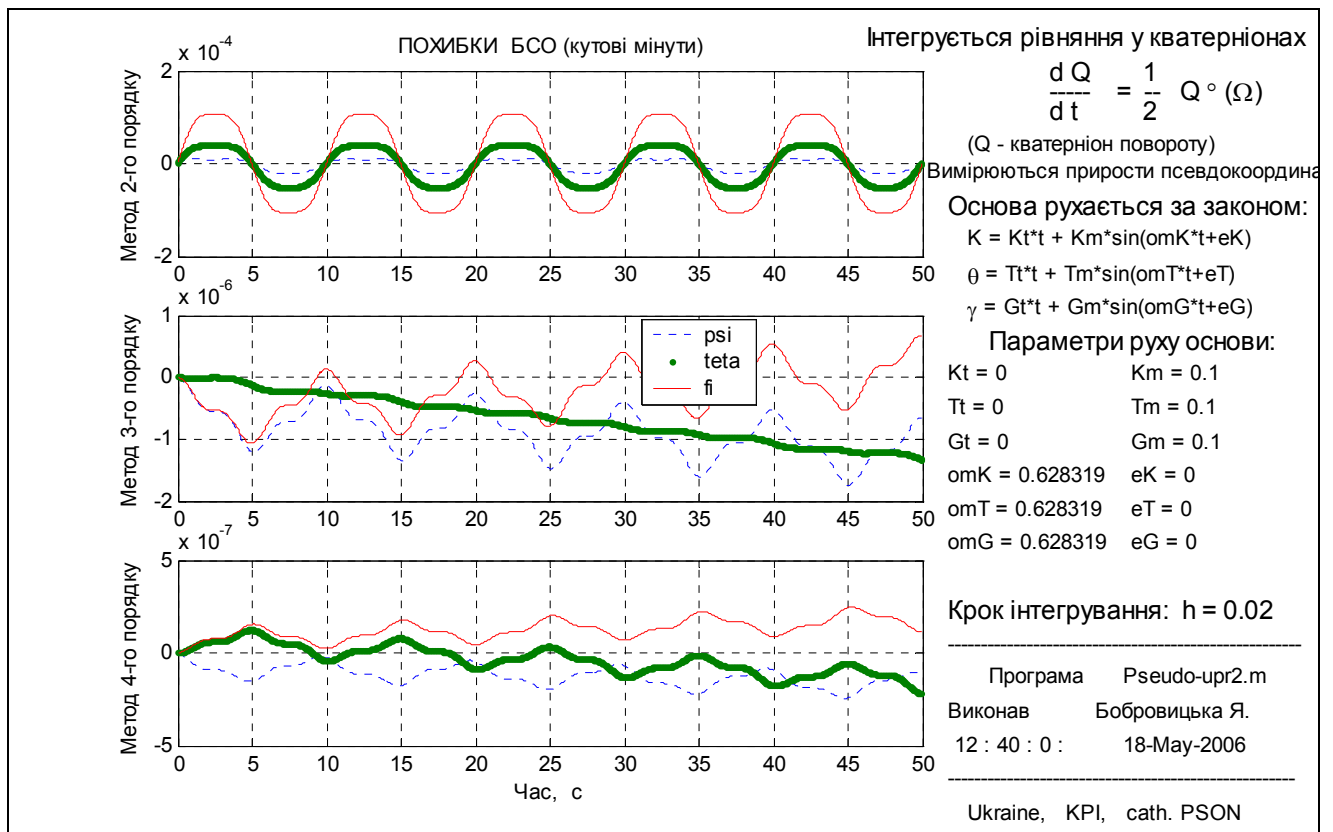


Рис. 2. Похибки алгоритмів за [1] при значенні кроку $h=0,02$ с

Друге наближення.

$$\begin{aligned}
 N_{(2)}(t) &= 1 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t N_{(1)}(\xi) \circ \omega(\xi) d\xi = 1 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t \left[1 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{\xi} \omega(\eta) d\eta \right] \circ \omega(\xi) d\xi = \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t \omega(\xi) d\xi + \frac{1}{4} \int_{t_n}^t \left[\int_{t_n}^{\xi} \omega(\eta) d\eta \right] \circ \omega(\xi) d\xi .
 \end{aligned} \tag{3}$$

Третє наближення.

$$\begin{aligned}
 N_{(3)}(t) &= 1 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t N_{(2)}(\xi) \circ \omega(\xi) d\xi = 1 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t \left(1 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{\xi} \omega(\eta) d\eta \right) \circ \omega(\xi) d\xi = \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t \left[1 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{\xi} \omega(\eta) d\eta + \frac{1}{4} \int_{t_n}^{\xi} \left(\int_{t_n}^{\eta} \omega(\zeta) d\zeta \right) \circ \omega(\eta) d\eta \right] \circ \omega(\xi) d\xi + \\
 &\quad + \frac{1}{8} \int_{t_n}^t \left[\int_{t_n}^{\xi} \left(\int_{t_n}^{\eta} \left(\int_{t_n}^{\zeta} \omega(\zeta) d\zeta \right) \circ \omega(\eta) d\eta \right) \circ \omega(\xi) d\xi \right] .
 \end{aligned} \tag{4}$$

Четверте наближення.

$$\begin{aligned}
 N_{(4)}(t) &= 1 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t N_{(3)}(\xi) \circ \omega(\xi) d\xi = \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t \omega(\xi) d\xi + \frac{1}{4} \int_{t_n}^t \left(\int_{t_n}^{\xi} \omega(\eta) d\eta \right) \circ \omega(\xi) d\xi + \\
 &+ \frac{1}{8} \int_{t_n}^t \left[\int_{t_n}^{\xi} \left(\int_{t_n}^{\eta} \left(\int_{t_n}^{\zeta} \omega(\zeta) d\zeta \right) \circ \omega(\eta) d\eta \right) \circ \omega(\xi) d\xi \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{16} \int_{t_n}^t \left\{ \int_{t_n}^{\xi} \left[\int_{t_n}^{\eta} \left[\int_{t_n}^{\zeta} \left(\int_{t_n}^{\nu} \omega(\nu) d\nu \right) \circ \omega(\zeta) d\zeta \right] \circ \omega(\eta) d\eta \right] \circ \omega(\xi) d\xi \right\} .
 \end{aligned} \tag{5}$$

Побудова алгоритмів чисельного інтегрування з точністю до четвертого порядку мализни

Обмежуючись у подальшому відшукуванням алгоритмів чисельного інтегрування з точністю не більше за четвертий порядок мализни відносно малої величини кроку інтегрування, припустимо, що в діапазоні від t_n до t_{n+1} (від $\tau = 0$ до $\tau = h$) вектор $\vec{\omega} = \mathbf{i}\omega_x + \mathbf{j}\omega_y + \mathbf{k}\omega_z$ вимірюваних проекцій кутової швидкості об'єкту залежить від часу за законом:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_o + 2\vec{\varepsilon} \cdot \tau + 3\vec{a} \cdot \tau^2 + 4\vec{b} \cdot \tau^3, \tag{6}$$

де $\vec{\omega}_o$, $\vec{\varepsilon}$, \vec{a} і \vec{b} - постійні вектори, значення яких визначається шляхом поліноміального інтерполювання по вимірних значеннях кутової швидкості (чи інтеграла від неї) на кількох попередніх кроках інтегрування.

З врахуванням цього відшукаємо інтеграли, що входять у (5), залишаючи члени не вище за четвертий порядок мализни відносно малого кроку інтегрування.

$$\int_{t_n}^t \vec{\omega}(\xi) d\xi = \int_0^{\tau} (\vec{\omega}_o + 2\vec{\varepsilon} \cdot \xi + 3\vec{a} \cdot \xi^2 + 4\vec{b} \cdot \xi^3) d\xi = \vec{\omega}_o \cdot \tau + \vec{\varepsilon} \cdot \tau^2 + \vec{a} \cdot \tau^3 + \vec{b} \cdot \tau^4. \tag{7}$$

Далі, використовуючи знайдений вираз (7), відшукаємо наступні інтеграли, нехтуючи членами більш високого порядку аніж четвертий відносно малої величини:

$$\int_0^{\tau} \left(\int_0^{\xi} \omega(\eta) d\eta \right) \circ \omega(\xi) d\xi \approx$$

$$\approx -\frac{1}{2}|\vec{\omega}_o|^2 \tau^2 + \frac{1}{3}(-3\vec{\omega}_o \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega}_o \times \vec{\varepsilon})\tau^3 + \frac{1}{2}(-2\vec{\omega}_o \cdot \vec{a} + \vec{\omega}_o \times \vec{a} - |\vec{\varepsilon}|^2)\tau^4.$$

Наступний (потрійний) інтеграл матиме вигляд:

$$\int_0^\tau \int_0^\xi \int_0^\eta (\int \omega(\zeta) d\zeta) \circ \omega(\eta) d\eta \circ \omega(\xi) d\xi \approx -\frac{1}{6}|\vec{\omega}_o|^2 \vec{\omega}_o \tau^3 - \frac{1}{6}[|\vec{\omega}_o|^2 \vec{\varepsilon} + 2(\vec{\omega}_o \cdot \vec{\varepsilon})\vec{\omega}_o] \tau^4.$$

Нарешті четвертий інтеграл набуде наступного виду:

$$\int_0^\tau \int_0^\xi \int_0^\eta \int_0^\zeta (\int \omega(\nu) d\nu) \circ \omega(\zeta) d\zeta \circ \omega(\eta) d\eta \circ \omega(\xi) d\xi \approx \frac{1}{24}|\vec{\omega}_o|^4 \tau^4.$$

У підсумку, з точністю до малих четвертого порядку величина N_{n+1} визначається формулою

$$\begin{aligned} N_{n+1} = & 1 + \frac{1}{2}(\vec{\omega}_o \cdot \vec{h} + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{h}^2 + \vec{a} \cdot \vec{h}^3 + \vec{b} \cdot \vec{h}^4) + \\ & + \frac{1}{4}[-\frac{1}{2}|\vec{\omega}_o|^2 h^2 + \frac{1}{3}(-3\vec{\omega}_o \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega}_o \times \vec{\varepsilon})h^3 + \frac{1}{2}(-2\vec{\omega}_o \cdot \vec{a} + \vec{\omega}_o \times \vec{a} - |\vec{\varepsilon}|^2)h^4] + \\ & + \frac{1}{8}\{-\frac{1}{6}|\vec{\omega}_o|^2 \vec{\omega}_o h^3 - \frac{1}{6}[|\vec{\omega}_o|^2 \vec{\varepsilon} + 2(\vec{\omega}_o \cdot \vec{\varepsilon})\vec{\omega}_o]h^4\} + \frac{1}{16}(\frac{1}{24}|\vec{\omega}_o|^4 h^4). \end{aligned} \quad (8)$$

Залишаючи члени до другого порядку мализни включно, одержуємо формулу для методу Пікара другого порядку:

$$N_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\vec{\omega}_o \cdot \vec{h} + \frac{1}{2}(\vec{\varepsilon} - \frac{1}{4}|\vec{\omega}_o|^2)h^2. \quad (9)$$

Аналогічно одержимо формулу для методу Пікара третього порядку:

$$N_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\vec{\omega}_o \cdot \vec{h} + \frac{1}{2}(\vec{\varepsilon} - \frac{1}{4}|\vec{\omega}_o|^2)h^2 + \frac{1}{2}[\vec{a} + \frac{1}{6}(-3\vec{\omega}_o \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega}_o \times \vec{\varepsilon} - \frac{1}{4}|\vec{\omega}_o|^2 \vec{\omega}_o)]h^3. \quad (10)$$

Метод Пікара четвертого порядку визначається формулою (8)

$$\begin{aligned} N_{n+1} = & 1 + \frac{1}{2}\vec{\omega}_o \cdot \vec{h} + \frac{1}{2}(\vec{\varepsilon} - \frac{1}{4}|\vec{\omega}_o|^2)h^2 + \\ & + \frac{1}{2}[\vec{a} + \frac{1}{6}(-3\vec{\omega}_o \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega}_o \times \vec{\varepsilon} - \frac{1}{4}|\vec{\omega}_o|^2 \vec{\omega}_o)]h^3 + \\ & + \frac{1}{2}[b + \frac{1}{4}(-2\vec{\omega}_o \cdot \vec{a} + \vec{\omega}_o \times \vec{a} - |\vec{\varepsilon}|^2) - \frac{1}{24}(|\vec{\omega}_o|^2 \vec{\varepsilon} + 2(\vec{\omega}_o \cdot \vec{\varepsilon})\vec{\omega}_o) + \frac{1}{192}|\vec{\omega}_o|^4]h^4. \end{aligned} \quad (11)$$

Конкретизація значень постійних векторів коефіцієнтів в алгоритмах для випадку вимірювань вектору псевдокоординат

Нехай безпосередньо на кожному кроці інтегрування вимірюється величина псевдокоординат, тобто інтегралів від проекцій кутової швидкості об'єкта на координатні осі:

$$\Theta(t_n, \tau) = \int_{t_n}^{t_n+\tau} \omega(\xi) d\xi. \quad (...)$$

Безпосередньо на кожному кроці вимірюється величина

$$\Delta\Theta_{n+1} = \Theta(t_n, h) - \Theta(t_n, 0) = \int_{t_n}^{t_n+h} \omega(\xi) d\xi. \quad (...)$$

Покладаючи попередню залежність (6) вектора кутової швидкості від часу, прийемо, що залежність вектора псевдокоординат має вид:

$$\Theta(t_n, \tau) = \omega_o \cdot \tau + \varepsilon \cdot \tau^2 + a \cdot \tau^3 + b \cdot \tau^4. \quad (...)$$

Розпишемо значення цієї величини у моменти часу $\tau = h, 0, -h, -2h$

$$\Theta(t_n, h) = \Theta_1 = \omega_o \cdot h + \varepsilon \cdot h^2 + a \cdot h^3 + b \cdot h^4;$$

$$\Theta(t_n, 0) = \Theta_o = 0;$$

$$\Theta(t_n, -h) = \Theta_{-1} = -\omega_o \cdot h + \varepsilon \cdot h^2 - a \cdot h^3 + b \cdot h^4;$$

$$\Theta(t_n, -2h) = \Theta_{-2} = -2\omega_o \cdot h + 4\varepsilon \cdot h^2 - 8a \cdot h^3 + 16b \cdot h^4;$$

$$\Theta(t_n, -3h) = \Theta_{-3} = -3\omega_o \cdot h + 9\varepsilon \cdot h^2 - 27a \cdot h^3 + 81b \cdot h^4.$$

Через те, що на кожному кроці безпосередньо вимірюється кількість імпульсів протягом відповідного кроку, тобто різниці між сусідніми значеннями цієї величини, перейдемо до рівнянь відносно таких різниць:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_o + h\varepsilon + h^2a + h^3b = \frac{1}{h} \nabla \Theta_1 \\ \omega_o - h\varepsilon + h^2a - h^3b = \frac{1}{h} \nabla \Theta_o \\ \omega_o - 3h\varepsilon + 7h^2a - 15h^3b = \frac{1}{h} \nabla \Theta_{-1} \\ \omega_o - 5h\varepsilon + 19h^2a - 65h^3b = \frac{1}{h} \nabla \Theta_{-2} \end{array} \right. \quad (12)$$

Ці рівняння і є основою для обчислення невідомих коефіцієнтів ω_o , ε , a і b .

Метод другого порядку

Для побудови метода другого порядку достатньо припустити наступну залежність від часу

$$\Theta = \omega_o \cdot \tau + \varepsilon \cdot \tau^2. \quad (...)$$

Тому замість рівнянь (12) можна розглядати впливаючі з них рівняння:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_o + h\varepsilon = \frac{1}{h} \nabla \Theta_1 \\ \omega_o - h\varepsilon = \frac{1}{h} \nabla \Theta_o \end{array} \right.$$

розв'язуючи які, знайдемо

$$\omega_o = \frac{1}{2h} (\nabla \Theta_1 + \nabla \Theta_o); \quad \varepsilon = \frac{1}{2h^2} \nabla^2 \Theta_1 = \frac{1}{2h^2} (\nabla \Theta_1 - \nabla \Theta_o). \quad (13)$$

Метод третього порядку

Тепер припускатимемо наступну залежність від часу

$$\Theta = \omega_o \cdot \tau + \varepsilon \cdot \tau^2 + a \cdot \tau^3. \quad (...)$$

Рівняння (12) замінюються на такі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_o + h\varepsilon + h^2a = \frac{1}{h} \nabla \Theta_1 \\ \omega_o - h\varepsilon + h^2a = \frac{1}{h} \nabla \Theta_o \\ \omega_o - 3h\varepsilon + 7h^2a = \frac{1}{h} \nabla \Theta_{-1} \end{array} \right. \quad (...)$$

Віднімаючи сусідні рівняння, дійдемо двох рівнянь відносно різниць другого порядку

$$\left\{ \begin{array}{l} 2h\varepsilon = \frac{1}{h} (\nabla \Theta_1 - \nabla \Theta_o) = \frac{1}{h} \nabla^2 \Theta_1 \\ 2h\varepsilon - 6h^2a = \frac{1}{h} (\nabla \Theta_o - \nabla \Theta_{-1}) = \frac{1}{h} \nabla^2 \Theta_o \end{array} \right. \quad (...)$$

розв'язуючи які, знайдемо

$$\varepsilon = \frac{1}{2h^2} \nabla^2 \Theta_1 = \frac{1}{2h^2} (\nabla \Theta_1 - \nabla \Theta_o); \quad a = \frac{1}{6h^3} \nabla^3 \Theta_1 = \frac{1}{6h^3} (\nabla^2 \Theta_1 - \nabla^2 \Theta_o). \quad (14)$$

У відповідності до першого рівняння (38), одержимо значення останнього коефіцієнта

$$\omega_o = \frac{1}{h} (\nabla \Theta_1 - \frac{1}{2} \nabla^2 \Theta_1 - \frac{1}{6} \nabla^3 \Theta_1). \quad (15)$$

Метод четвертого порядку

Побудуємо на основі рівнянь (12) рівняння у різницях другого порядку:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2h\varepsilon + 2h^3b = \frac{1}{h} (\nabla \Theta_1 - \nabla \Theta_o) = \frac{1}{h} \nabla^2 \Theta_1 \\ 2h\varepsilon - 6h^2a + 14h^3b = \frac{1}{h} (\nabla \Theta_o - \nabla \Theta_{-1}) = \frac{1}{h} \nabla^2 \Theta_o \\ 2h\varepsilon - 12h^2a + 50h^3b = \frac{1}{h} (\nabla \Theta_{-1} - \nabla \Theta_{-2}) = \frac{1}{h} \nabla^2 \Theta_{-1} \end{array} \right. \quad (16)$$

Аналогічно побудуємо рівняння у різницях третього порядку

$$\begin{cases} 6h^2a - 12h^3b = \frac{1}{h}(\nabla^2\Theta_1 - \nabla^2\Theta_o) = \frac{1}{h}\nabla^3\Theta_1 \\ 6h^2a - 36h^3b = \frac{1}{h}(\nabla^2\Theta_o - \nabla^2\Theta_{-1}) = \frac{1}{h}\nabla^3\Theta_o \end{cases} \quad (17)$$

З (17) випливає:

$$b = \frac{1}{24h^4}(\nabla^3\Theta_1 - \nabla^3\Theta_o) = \frac{1}{24h^4}\nabla^4\Theta_1; \quad a = \frac{1}{6h^3}(\nabla^3\Theta_1 + \frac{1}{2}\nabla^4\Theta_1). \quad (18)$$

Перше рівняння (16) дозволяє визначити коефіцієнт ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{2h^2}(\nabla^2\Theta_1 - \frac{1}{12}\nabla^4\Theta_1),$$

а перше рівняння (12) - коефіцієнт ω_o :

$$\omega_o = \frac{1}{h}\nabla\Theta_1 - h\varepsilon - h^2a - h^3b = \frac{1}{h}(\nabla\Theta_1 - \frac{1}{2}\nabla^2\Theta_1 - \frac{1}{6}\nabla^3\Theta_1 - \frac{1}{12}\nabla^4\Theta_1). \quad (19)$$

Побудова алгоритмів

Поєднаємо одержані результати у єдиний алгоритм для другого, третього та четвертого порядків. Для цього підставимо значення коефіцієнтів у вирази (9), (10) та (11) відповідно порядкам алгоритмів.

У подальшому для відшукування алгоритмів будемо обмежуватися членами до четвертого порядку мализни відносно величини ∇ .

Для випадку вимірювання приростів псевдокоординат вираз алгоритму другого порядку визначиться у такій спосіб:

$$\begin{aligned} N_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2}\omega_o \cdot h + \frac{1}{2}(\varepsilon - \frac{1}{4}|\omega_o|^2)h^2 = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2h}(\nabla\Theta_1 + \nabla\Theta_o) \cdot h + \frac{1}{2}(\frac{1}{2h^2}\nabla^2\Theta_1 - \frac{1}{4}|\frac{1}{2h}(\nabla\Theta_1 + \nabla\Theta_o)|^2)h^2 \end{aligned}$$

Остаточно одержимо:

$$N_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\nabla\Theta_1 - \frac{1}{32}|\nabla\Theta_1 + \nabla\Theta_o|^2 \quad (18)$$

Перейдемо до формулювання алгоритмів третього порядку на основі формули (10).

$$N_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\omega_o \cdot h + \frac{1}{2}(\varepsilon - \frac{1}{4}|\omega_o|^2)h^2 + \frac{1}{2}[a + \frac{1}{6}(-3\omega_o \cdot \varepsilon + \omega_o \times \varepsilon - \frac{1}{4}|\omega_o|^2\omega_o)]h^3$$

Використовуючи вирази (14) і (15), одержимо алгоритм для випадку вимірювання приростів псевдокоординат:

$$N_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\nabla\Theta_1 - \frac{1}{8}|\nabla\Theta_1|^2 - \frac{1}{48}|\nabla\Theta_1|^2 \cdot \nabla\Theta_1 + \frac{1}{24}\nabla\Theta_1 \times \nabla^2\Theta_1. \quad (19)$$

Для випадку вимірювання приростів псевдокоординат вираз алгоритму четвертого порядку визначиться у такій спосіб:

$$\begin{aligned} N_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2}\nabla\Theta_1 - \frac{1}{8}|\nabla\Theta_1|^2 - \frac{1}{48}|\nabla\Theta_1|^2 \cdot \nabla\Theta_1 + \frac{1}{24}\nabla\Theta_1 \times \nabla^2\Theta_1 + \\ &+ \frac{1}{48}\nabla\Theta_1 \times \nabla^3\Theta_1 + \frac{1}{384}|\nabla\Theta_1|^4. \end{aligned} \quad (20)$$

Моделювання

На рис. 3, 4 подані результати моделювання алгоритмів за формулами (18), (19), (20).

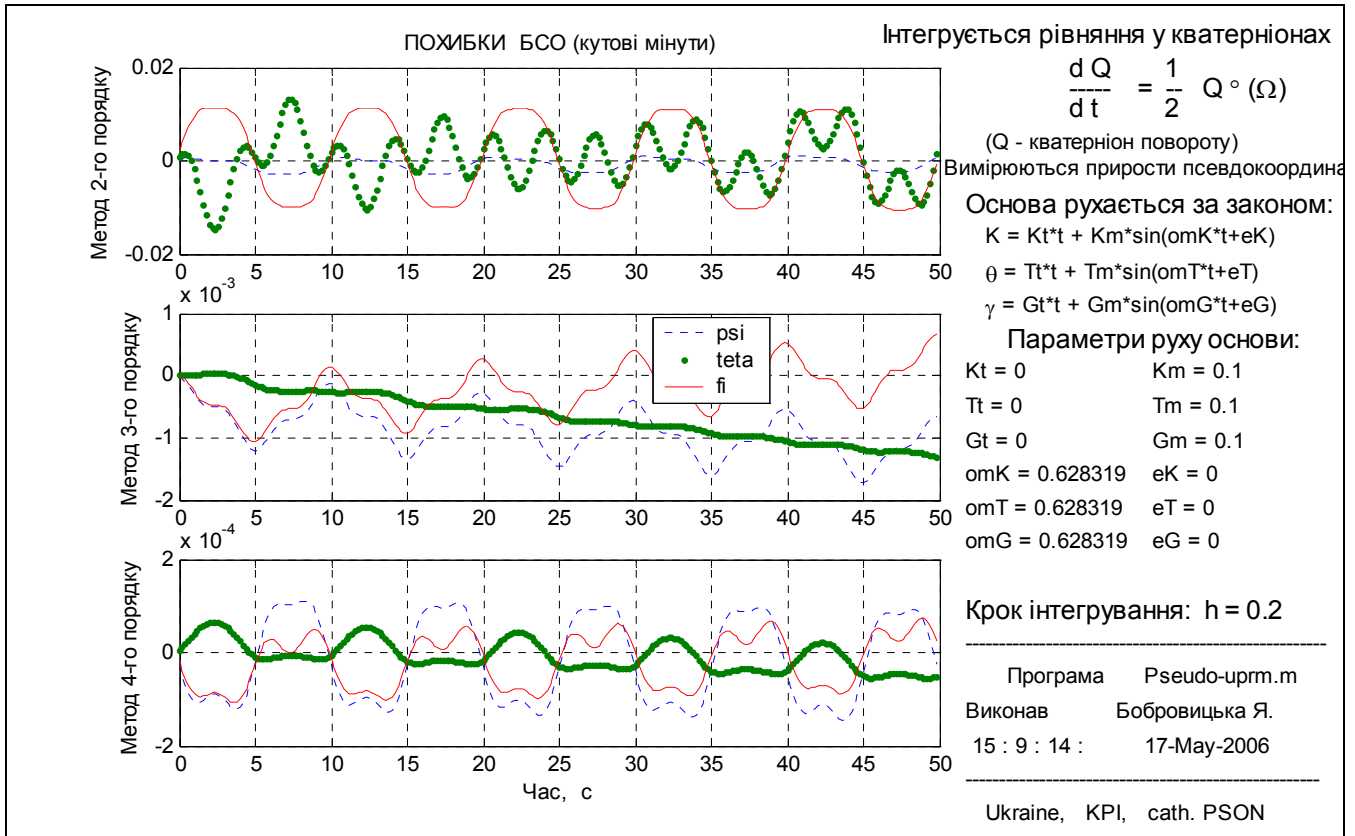


Рис. 3

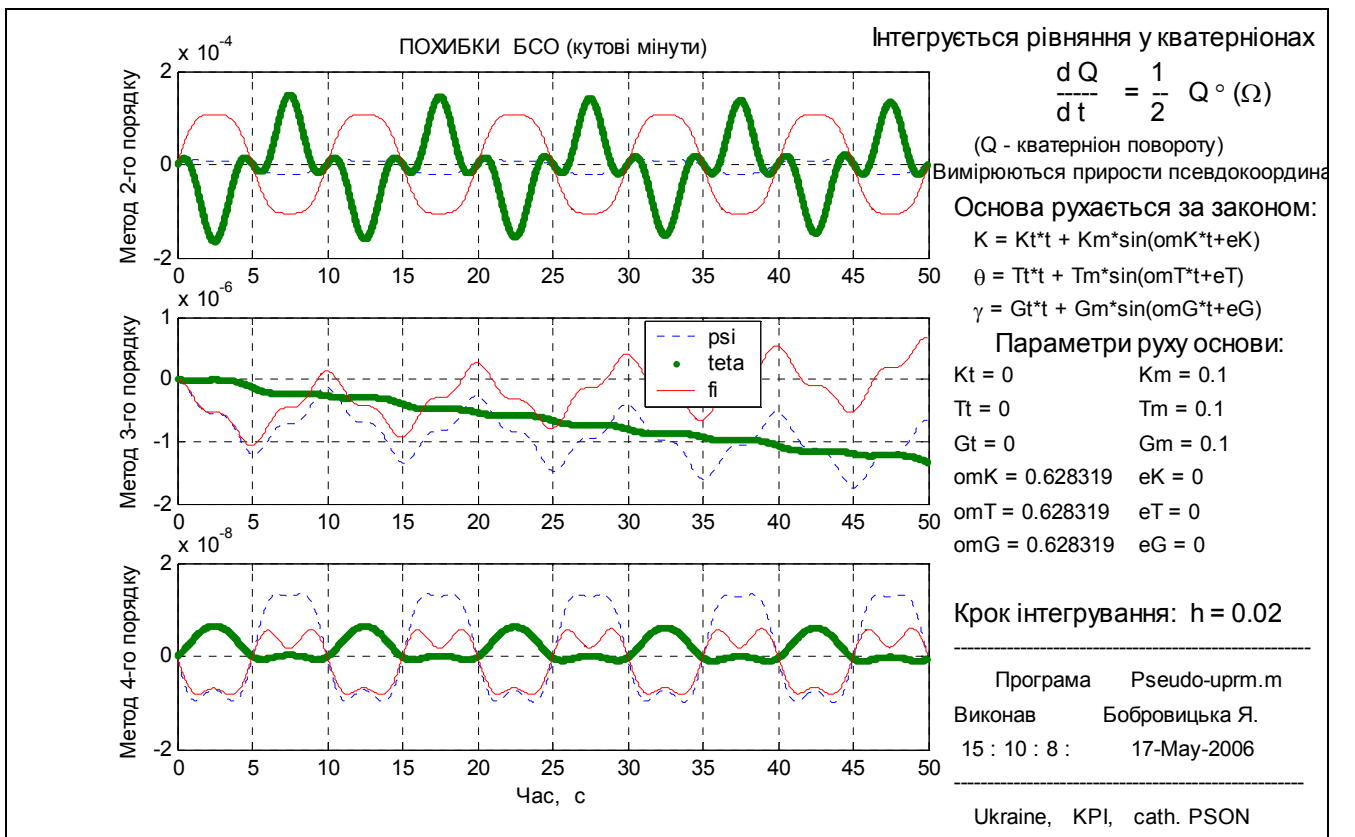


Рис. 4

Зазначимо, що у [2] наведені інші у порівнянні з [1] формули алгоритмів:

- метод другого порядку:

$$N_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_1 - \frac{1}{8} (\nabla \Theta_1)^2$$

- метод третього порядку:

$$N_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_1 - \frac{1}{48} \nabla \Theta_1 (\nabla \Theta_1)^2 - \frac{1}{8} (\nabla \Theta_1)^2 + \frac{1}{24} \nabla \Theta_1 \times \nabla^2 \Theta_1$$

- метод четвертого порядку:

$$\begin{aligned} N_{n+1} = & [1 - \frac{1}{8} (\nabla \Theta_1)^2 + \frac{1}{16} (\nabla^2 \Theta_1)^2 + \dots] + \\ & + \frac{1}{2} \nabla \Theta_1 - \frac{1}{48} \nabla \Theta_1 (\nabla \Theta_1)^2 + \frac{1}{64} \nabla \Theta_1 (\nabla^2 \Theta_1)^2 + \frac{1}{48} \nabla \Theta_1 (\nabla \Theta_1 \cdot \nabla^2 \Theta_1) - \\ & - \frac{1}{96} (\nabla \Theta_1)^2 \nabla^2 \Theta_1 + \frac{1}{24} \nabla \Theta_1 \times \nabla^2 \Theta_1 + \frac{1}{48} \nabla \Theta_1 \times \nabla^3 \Theta_1 + \frac{1}{144} \nabla \Theta_1 \times \nabla^4 \Theta_1 \end{aligned}$$

Результати моделювання за цими алгоритмами наведені на рис. 5, 6.

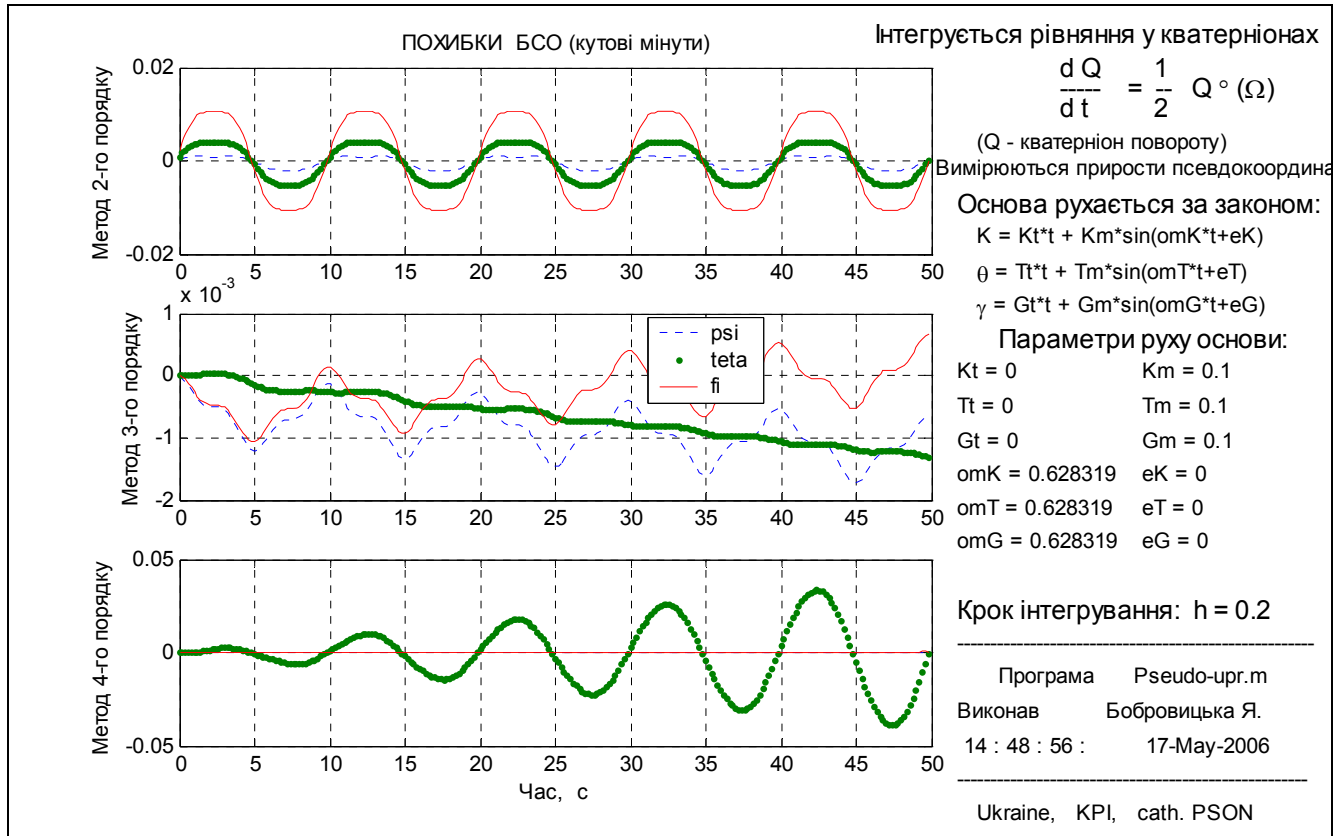


Рис.5

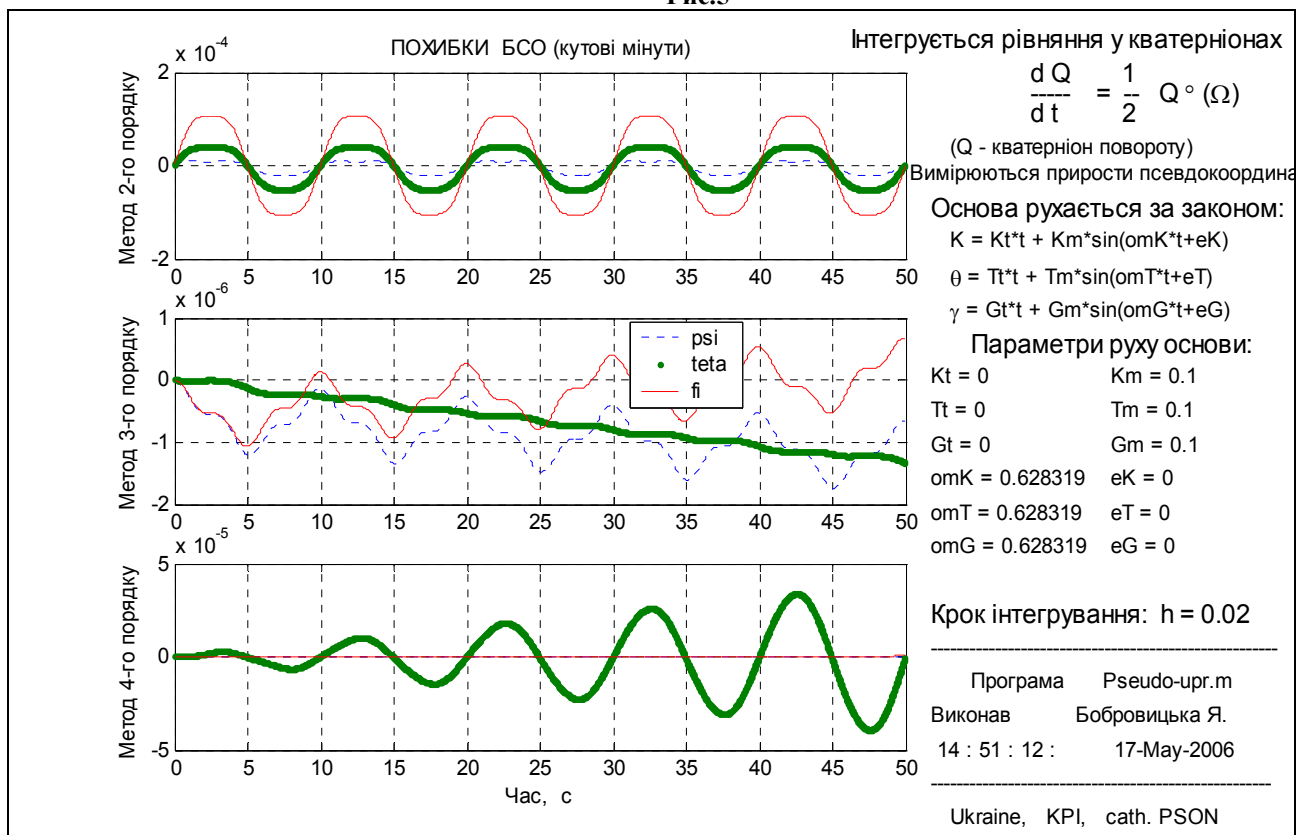


Рис. 6

Як бачимо, алгоритм четвертого порядку не є таким, крім того він розходиться.
У той же час алгоритми за запропонованими формулами (див. рис. 3, 4) відповідають заявленим порядкам.

Висновки

Література

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М.: Наука, 1992. – 280 с.

Опубликовано: Наукові вісті НТУУ "КПІ", № 6(50), 2006. – с. 113-119