

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»

Кафедра приладів і систем орієнтації і навігації

*Ю. Ф. Лазарєв*

# **ТЕОРІЯ ГІРОСКОПІВ**

## **Практикум**

Рекомендовано  
Вченою Радою приладобудівного факультету  
НТУУ «КПІ»  
як навчальний посібник

***Київ – НТУУ "КПІ" – 2013***

**УДК 681.3(0.75)**  
**Л17**

Відповідальний редактор

*БОНДАР Павло Михайлович*, к. т. н., доцент,  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»

**Лазарєв Ю. Ф.**

Л17                    Теорія гіроскопів. Практикум / Електронний навчальний посібник. –  
Київ: НТУУ "КПІ", 2013. – 38 с.

Наведено опис завдань з кінематики і розрахунку головних динамічних величин твердих тіл, параметрів руху гіроскопічних приладів і пристроїв. Полегшенню виконання цих завдань прислужуються подані теоретичні відомості і методичні вказівки.

Головною метою практикуму є прищеплення студентам вміння проводити наукові (теоретичні) дослідження нелінійних механічних систем.

Призначено для студентів технічних університетів. Може бути використано для курсового і дипломного проектування.

# Зміст

<b>1. Визначення головних динамічних величин.....</b>	<b>4</b>
1.1. Теоретичні відомості.....	4
1.1.1. Імпульс.....	4
1.1.2. Момент імпульсу.....	4
1.1.3. Кінетична енергія.....	6
1.2. Завдання.....	7
1.3. Методичні вказівки.....	8
1.3.1. Визначення періодів коливань математичного маятника.....	8
1.3.2. Визначення моменту інерції планети.....	8
1.3.3. Визначення кінетичного моменту і кінетичної енергії власного обертання планети.....	8
1.3.4. Визначення періоду обертання супутника планети на низькій орбіті.....	9
1.3.5. Визначення орбітального кінетичного моменту та орбітальної кінетичної енергії планети.....	10
1.3.6. Визначення орбітального моменту інерції планети відносно центрального тіла.....	10
1.3.7. Визначення кінетичного моменту та кінетичної енергії кулі і велосипеда, що котяться.....	10
<b>2. Кінематика, гіроскопічний момент, прецесія, нутація.....</b>	<b>12</b>
2.1. Теоретичні відомості.....	12
2.1.1. Визначення положення тіла у просторі.....	12
2.1.2. Кінематика поворотів.....	14
2.1.3. Визначення матриці напрямних косинусів.....	15
2.1.4. Правило диференціювання вектора, заданого в рухомій системі координат.....	16
2.1.5. Рівняння руху, закон прецесії та гіроскопічний момент.....	17
2.1.6. Нутація гіроскопа.....	19
2.2. Завдання.....	20
2.2.1. Кінематика поворотів.....	20
2.2.2. Швидкості і прискорення.....	22
2.2.3. Гіроскопічний момент.....	23
2.2.4. Прецесія і нутація.....	24
2.3. Методичні вказівки.....	27
2.3.1. Визначення матриці напрямних косинусів.....	27
2.3.2. Визначення швидкості і прискорення точки.....	28
2.3.3. Визначення гіроскопічного моменту.....	30
2.3.4. Визначення параметрів нутації.....	30
<b>3. Поводження гіроскопічних чутливих елементів.....</b>	<b>31</b>
3.1. Теоретичні відомості.....	31
3.1.1. Частоти власних коливань.....	31
3.1.2. Параметри руху чутливих елементів.....	32
3.2. Завдання.....	35
3.2.1. Визначення частот власних коливань.....	35
3.2.2. Визначення параметрів руху чутливих елементів.....	36
<b>Додаток. Параметри планет.....</b>	<b>38</b>

# 1. Визначення головних динамічних величин

## 1.1. Теоретичні відомості

### 1.1.1. Імпульс

Імпульсом (кількістю руху) матеріальної точки називають вектор, що дорівнює добутку маси цієї точки на вектор її абсолютної швидкості:

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v},$$

де  $m$  – маса матеріальної точки,  $\mathbf{v}$  – її швидкість.

Імпульсом системи матеріальних точок є сума векторів імпульсів окремих матеріальних точок.

Якщо система складається з  $n$  матеріальних точок масою  $m_i$  зі швидкостями  $\mathbf{v}_i$ , то імпульс системи дорівнює:

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i.$$

Для суцільного твердого тіла дійсне таке співвідношення

$$\mathbf{Q} = \int_{(V)} \frac{d\mathbf{r}}{dt} dm = \frac{d}{dt} \int_{(V)} \mathbf{r} dm = \frac{d}{dt} (m\mathbf{r}_C) = m\mathbf{v}_C, \quad (1.1)$$

де  $\mathbf{r}_C$  – радіус-вектор центра мас тіла  $\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \left( \int_{(V)} \mathbf{r} dm \right)$ ;  $m$  – маса тіла,  $m = \int_{(V)} dm$ .

Отже, імпульс тіла дорівнює добутку його маси на абсолютну швидкість його центру мас.

Швидкість центра мас можна виразити через швидкість полюса  $\mathbf{v}_O$  і кутову швидкість  $\boldsymbol{\omega}$  тіла:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C, \quad (1.2)$$

де  $\boldsymbol{\rho}_C$  – радіус-вектор центра мас тіла відносно полюса  $O$  (припускаємо, що він нерухомий відносно тіла). Тому більш розгорнуто можна подати імпульс тіла у такий спосіб:

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_C = m(\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C) = m\left(\mathbf{v}_O + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}\right).$$

У цьому варіанті  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  і  $\mathbf{k}$  – орти координатних осей  $x$ ,  $y$  і  $z$ , пов'язаних з тілом;  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  і  $\omega_z$  проекції вектора  $\boldsymbol{\omega}$ ;  $x_C$ ,  $y_C$  і  $z_C$  – проекції вектора  $\boldsymbol{\rho}_C$  на осі системи координат  $xuz$ .

### 1.1.2. Момент імпульсу

Моментом імпульсу матеріальної точки відносно довільної точки  $S$  називають векторний добуток радіус-вектора  $\mathbf{r}$  цієї точки відносно точки  $S$  на вектор імпульсу цієї точки

$$\mathbf{K}_S = \mathbf{r} \times \mathbf{Q} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

Для матеріальної точки суцільного тіла з вельми малою масою це може бути записано так:

$$d\mathbf{K}_S = \mathbf{r} \times d\mathbf{Q} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm.$$

Момент імпульсу системи матеріальних точок визначають як векторну суму моментів імпульсу окремих точок системи відносно тієї самої точки. Для суцільного тіла матимемо:

$$\mathbf{K}_S = \int_{(V)} d\mathbf{K}_S = \int_{(V)} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm.$$

Радіус-вектор точки  $\mathbf{r}$  відносно точки  $S$  пов'язаний з радіус-вектором  $\mathbf{r}_O$  полюса  $O$  відносно цієї точки та радіус-вектором  $\boldsymbol{\rho}$  матеріальної точки відносно полюса  $O$  у такий спосіб:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}. \quad (1.3)$$

Тому матимемо:

$$\mathbf{K}_S = \int_{(V)} (\mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{v} dm = \mathbf{r}_O \times \int_{(V)} \mathbf{v} dm + \int_{(V)} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v} dm.$$

Другий доданок справа являє собою момент імпульсу  $\mathbf{K}_O$  відносно полюса  $O$ , тому

$$\mathbf{K}_S = \mathbf{r}_O \times \mathbf{Q} + \mathbf{K}_O.$$

Ця формула пов'язує моменти імпульсу системи відносно двох різних точок.

Вектор моменту імпульсу відносно полюса за умови, що полюс  $O$  є нерухомим у тілі, і з використанням виразу (1.2) для швидкості точки тіла можна подати у вигляді:

$$\mathbf{K}_O = \int_{(V)} \boldsymbol{\rho} \times (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm = m \boldsymbol{\rho}_C \times \mathbf{v}_O + \mathbf{K}_O^\omega, \quad (1.4)$$

де  $\boldsymbol{\rho}_C$  – радіус-вектор центра мас тіла відносно полюса  $O$  і позначено

$$\mathbf{K}_O^\omega = \int_{(V)} \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm.$$

Частина  $\mathbf{K}_O^\omega$  кінетичного моменту залежить лише від кутової швидкості тіла. Тому її доцільно назвати *обертальною частиною моменту імпульсу*. Навпаки, перша складова моменту імпульсу (1.4) визначається лише абсолютною швидкістю полюса, і її можна називати *поступальною частиною моменту імпульсу*. Отже, у загальному випадку момент імпульсу тіла складається з двох частин – поступальної та оберальної.

Обертальна частина вектора моменту імпульсу найпростіше подається через її проєкції на осі будь-якої системи координат, наприклад,  $xyz$ :

$$\begin{aligned} K_{OX}^\omega &= J_{OX} \omega_X + J_{OXY} \omega_Y + J_{OXZ} \omega_Z; \\ K_{OY}^\omega &= J_{OXY} \omega_X + J_{OY} \omega_Y + J_{OYZ} \omega_Z; \\ K_{OZ}^\omega &= J_{OXZ} \omega_X + J_{OYZ} \omega_Y + J_{OZ} \omega_Z, \end{aligned} \quad (1.5)$$

де величини

$$J_{OX} = \int_{(V)} (y^2 + z^2) dm; \quad J_{OY} = \int_{(V)} (x^2 + z^2) dm; \quad J_{OZ} = \int_{(V)} (x^2 + y^2) dm; \quad (1.6)$$

$$J_{OXY} = - \int_{(V)} xy dm; \quad J_{OXZ} = - \int_{(V)} xz dm; \quad J_{OYZ} = - \int_{(V)} yz dm \quad (1.7)$$

являють собою так звані моменти інерції тіла: (1.6) – відносно координатних осей; (1.7) – відцентрові моменти інерції.

Три скалярні рівності можна подати як одну матричну

$$\mathbf{K}_{OP}^\omega = I_{OP} \boldsymbol{\Omega}_P, \quad (1.8)$$

де позначено

$$\mathbf{K}_{OP}^{\omega} = \begin{bmatrix} K_{OX}^{\omega} \\ K_{OY}^{\omega} \\ K_{OZ}^{\omega} \end{bmatrix}; \quad I_{OP} = \begin{bmatrix} J_{OX} & J_{OXY} & J_{OXZ} \\ J_{OXY} & J_{OY} & J_{OYZ} \\ J_{OXZ} & J_{OYZ} & J_{OZ} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Omega}_P = \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Квадратна матриця  $I_{OP}$  є матрицею моментів інерції тіла. Вона, як це впливає з виразів (1.7), завжди є симетричною. Уздовж діагоналі матриці містяться моменти інерції тіла відносно відповідних координатних осей, які дорівнюють сумі добутку мас матеріальних точок, що складають тіло, на квадрат відстані між точкою і відповідною координатною віссю. Тому для будь-якого реального тіла вони є додатними величинами і не можуть дорівнювати нулеві. Зовні діагоналі розміщені відцентрові моменти інерції тіла (їх ще називають добутками інерції). Як впливає з їх визначення (1.7), вони можуть бути як додатними, так і від'ємними, а також дорівнювати нулю.

Якщо система координат  $Oxyz$  жорстко пов'язана з тілом, матриця моментів інерції є незмінною у часі за будь-якого руху тіла у просторі.

### 1.1.3. Кінетична енергія

Кінетичну енергію матеріальної точки можна визначити як половину скалярного добутку абсолютної швидкості точки на її кількість руху:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m v^2.$$

Кінетичну енергію системи матеріальних точок визначають як алгебричну суму кінетичних енергій окремих матеріальних точок, які складають цю систему:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{Q}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2.$$

Для точки суцільного тіла кінетична енергія тіла визначиться інтегралом:

$$T = \int_{(V)} dT = \frac{1}{2} \int_{(V)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{Q}.$$

Якщо обрати у якості полюса деяку точку  $O$  самого тіла, можна скористатися формулою (1.2) для швидкості поточної точки тіла. Тоді дійдемо формули

$$T = \frac{1}{2} \int_{(V)} (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot d\mathbf{Q} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{Q} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_O). \quad (1.10)$$

Це співвідношення пов'язує кінетичну енергію тіла з раніше визначеними векторами імпульсу і моменту імпульсу тіла: *подвійна кінетична енергія тіла дорівнює половині суми скалярних добутків абсолютної швидкості полюса на імпульс тіла і абсолютної кутової швидкості тіла на момент імпульсу тіла відносно цього полюса.*

## 1.2. Завдання

**Задача 1.1.** Для планети, вказаної викладачем, і параметри якої наведені у таблицях Додатку, припускаючи, що планета є твердою, а радіус інерції планети дорівнює  $4/7$  від радіусу її поверхні, розрахувати:

- а) період  $T_m$  коливання математичного маятника довжиною  $L = 1$  м, розташованого на поверхні планети;
- б) момент інерції  $J$  планети;
- в) власний кінетичний момент  $H$  планети;
- г) кінетичну енергію  $T$  власного обертання планети;
- д) період обертання  $T_c$  супутника планети, висота обертання якого над поверхнею планети дорівнює нулеві;
- е) довжину математичного маятника, період власного коливання якого дорівнює періоду обертання супутника планети на низькій орбіті.

**Задача 1.2.** Для планети, вказаної викладачем, і параметри якої наведені у таблицях Додатку, розрахувати:

- а) кінетичний момент  $H_o$  обертання планети по її орбіті;
- б) орбітальний момент інерції  $J_o$  планети відносно центрального тіла;
- в) кінетичну енергію  $T_o$  орбітального руху планети.

**Задача 1.3.** Суцільна куля діаметром 10 см і масою 100 г котиться по площині зі швидкістю  $V = 1$  м/с. Визначити її повний кінетичний момент та кінетичну енергію.

**Задача 1.4.** Порожня куля діаметром 10 см і масою 100 г котиться по площині зі швидкістю  $V = 1$  м/с. Визначити її повний кінетичний момент та кінетичну енергію.

**Задача 1.5.** Колеса велосипеда мають діаметр 1 м, і масу 1 кг. Велосипед котиться по площині зі швидкістю  $V = 1$  м/с. Визначити повний кінетичний момент велосипеда та його кінетичну енергію. Маса велосипеда 4 кг.

### 1.3. Методичні вказівки

При проведенні розрахунків потрібно дотримуватися таких правил:

- 1) спочатку запишіть остаточну відповідь у формульному вигляді; не робіть проміжних обчислень, – часто при підстановці в остаточну формулу деякі величини взаємно скорочуються; це дозволяє значно скоротити час розв'язування;
- 2) при обчисленнях спочатку перевірте фізичну розмірність даних (вони мають бути подані в одній системі одиниць) і одержуваного результату (розмірність результату обчислень має збігатися з розмірністю отримуваної величини).

#### 1.3.1. Визначення періодів коливань математичного маятника

Період коливань математичного маятника, який міститься на поверхні деякої планети, визначається формулою

$$T_{mmPl} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_{Pl}}},$$

де  $l$  – довжина математичного маятника;  $g_{Pl}$  – прискорення вільного падіння на поверхні планети.

#### 1.3.2. Визначення моменту інерції планети

Момент інерції планети відносно її центру може бути визначений лише наближено. Тому зазвичай використовують такі спрощення:

- 1) планета є кулею;
- 2) планета є твердою кулею;
- 3) ця куля є однорідною за густиною.

Ці припущення у загальному випадку не справджуються (особливо для рідких або газових планет), але як перше наближення до оцінки дійсного моменту інерції можуть бути застосовані.

Момент інерції  $J_{Pl}$  твердого тіла відносно деякого центру  $O$  у загальному випадку може бути визначений за формулою

$$J_{Pl} = m_{Pl} r_{inPlO}^2,$$

де  $m_{Pl}$  – маса планети;  $r_{inPlO}$  – радіус інерції планети відносно того самого центра  $O$ .

Для однорідної за густиною кулі її радіус інерції відносно її центра дорівнює  $4/7$  радіусу поверхні планети

$$r_{inPlO} = \frac{4}{7} R_{Pl}.$$

#### 1.3.3. Визначення кінетичного моменту і кінетичної енергії власного обертання планети

Власний кінетичний момент планети дорівнює добутку її моменту інерції на кутову швидкість її власного обертання

$$H_{Pl} = J_{Pl} \omega_{Pl}.$$

Для його визначення потрібно попередньо визначити момент інерції планети відносно її центра.

Кінетична енергія власного обертання планети визначається так

$$T_{Pl} = \frac{1}{2} J_{Pl} \omega_{Pl}^2.$$



### 1.3.4. Визначення періоду обертання супутника планети на низькій орбіті

При визначенні періоду обертання супутника планети слід застосовувати такі припущення:

- 1) орбіта супутника є коловою з центром кола у центрі мас планети;
- 2) радіус орбіти супутника дорівнює радіусу поверхні планети.

Утримання супутника на коловій орбіті може здійснюватися у разі постійної рівноваги сили тяжіння супутника до центра планети через гравітацію та відцентрової сили, що "діє" на супутник внаслідок його обертання навколо центра планети.

Сила тяжіння на поверхні планети визначається співвідношенням

$$P = mg_{Pl},$$

де  $m$  – маса супутника;  $g_{Pl}$  – прискорення вільного падіння на поверхні планети.

Відцентрова сила, що "діє" на супутник внаслідок його руху за колом навколо центру планети зі швидкістю  $V_c$  дорівнює

$$F = m \frac{V_c^2}{R_{Pl}},$$

де  $R_{Pl}$  – радіус орбіти супутника, тобто у розглядуваному разі – радіус планети.

Щоб виразити цю силу через період обертання супутника слід скористатися відомими співвідношеннями

$$V_c = \omega_c R_{Pl}. \quad \omega_c = \frac{2\pi}{T_c},$$

де  $\omega_c$  та  $T_c$  кутова швидкість і період обертання супутника навколо планети.

Тому остаточною формулою для визначення періоду обертання низького супутника планети матиме вигляд

$$T_c = 2\pi \sqrt{\frac{R_{Pl}}{g_{Pl}}}.$$

За цією формулою для визначення періоду потрібно знати радіус планети і її прискорення сили тяжіння на поверхні.

Вельми цікаво відмітити, що насправді період обертання низького супутника не залежить ані від розміру планети, ані від її маси, а визначається лише середньою густиною планети. Дійсно, з закону всесвітнього тяжіння випливає

$$g_{Pl} = \gamma \frac{M_{Pl}}{R_{Pl}^2},$$

де  $\gamma$  – гравітаційна стала;  $M_{Pl}$  – маса планети. У власну чергу масу планети можна визначити як масу кулі

$$M_{Pl} = \rho_{Pl} \frac{4}{3} \pi R_{Pl}^3,$$

де  $\rho_{Pl}$  – середня густина маси планети.

Враховуючи це, отримаємо

$$T_c = \pi \sqrt{\frac{3}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{\rho_{Pl}}}.$$

Використовуючи останній вираз, слід пам'ятати, що значення гравітаційної сталої дорівнює

$$\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}.$$

### 1.3.5. Визначення орбітального кінетичного моменту та орбітальної кінетичної енергії планети

Орбітальний кінетичний момент планети дорівнює добутку орбітального моменту інерції  $J_{oPl}$  планети на кутову швидкість  $\omega_{oPl}$  її обертового руху по орбіті навколо центрального тіла:

$$H_{oPl} = J_{oPl} \omega_{oPl}.$$

Для визначення його величини потрібно визначити момент інерції планети відносно центрального тіла, а також обчислити орбітальну кутову швидкість за формулою

$$\omega_{oPl} = \frac{2\pi}{T_{oPl}},$$

де  $T_{oPl}$  – відомий період обертання планети.

Кінетичну енергію орбітального руху планети можна знайти, припускаючи планету матеріальною точкою. За цієї умови вона виражається формулою:

$$T_{oPl} = \frac{1}{2} M_{Pl} \omega_{oPl}^2.$$

### 1.3.6. Визначення орбітального моменту інерції планети відносно центрального тіла

При визначенні орбітального моменту інерції планети відносно центрального тіла можна вважати, що планета являє собою матеріальну точку, тобто нехтувати розмірами планети у порівнянні з відстанню її до центрального тіла:

$$J_{oPl} = M_{Pl} R_{oPl}^2,$$

де  $M_{Pl}$  – маса планети;  $R_{oPl}$  – радіус орбіти планети.

### 1.3.7. Визначення кінетичного моменту та кінетичної енергії кулі і велосипеда, що котяться

Кінетичний момент твердого тіла у загальному випадку визначається співвідношенням (1.4). Щоб ним скористатися, перш за все слід обрати полюс.

При розв'язанні задачі зручніше за все обрати як полюс центр мас кулі (або велосипеда). Тоді  $\rho_C \equiv 0$ , і перша складова у правій частині зникає, і формула (1.4) набуває вигляду

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{K}_C^\omega = J_C \boldsymbol{\omega}, \quad (1.4)$$

де  $J_C$  – момент інерції кулі відносно її центру,  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор кутової швидкості обертання тіла.

Величина кутової швидкості обертання залежить від швидкості  $V$  руху центра мас кулі та від її радіусу  $R$ :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{V}{R}.$$

Величина моменту інерції залежить від зосередженості маси всередині її.

Якщо маса рівномірно розподілена по об'єму кулі, то момент інерції кулі відносно будь-якої осі, що проходить через центр кулі, визначається формулою:

$$J_C = \frac{2}{5} mR^2.$$

У разі, коли уся маса зосереджена у тонкій зовнішній сфері, момент інерції кулі дорівнює

$$J_C = \frac{2}{3} mR^2.$$

У випадку велосипеда є два рівні кінетичні моменти двох коліс, кожний з яких визначається формулою (1.4). Але моменти інерції коліс визначаються за формулою

$$J_C = mR^2,$$

внаслідок того, що маса колеса практично повністю зосереджена в його ободі.

Кінетична енергія кулі, що котиться, у відповідності до виразу (1.10) складається з двох складових:

- 1) обумовленої поступальним рухом кулі сумісно з її центром мас

$$T_1 = \frac{1}{2} \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{Q} = \frac{1}{2} mV^2;$$

- 2) обумовленої обертальним рухом кулі

$$T_2 = \frac{1}{2} J_C \omega^2.$$

Аналогічно, кінетична енергія велосипеда складається з кінетичної енергії поступального руху усього велосипеда зі швидкістю  $V$ :

$$T_1 = \frac{1}{2} m_{bc} V^2,$$

де  $m_{bc}$  – маса усього велосипеда, а також подвійної кінетичної енергії обертального руху колеса велосипеда

$$T_2 = J_C \omega^2.$$

## 2. Кінематика, гіроскопічний момент, прецесія, нутація

### 2.1. Теоретичні відомості

#### 2.1.1. Визначення положення тіла у просторі

Оберемо у рухомому тілі довільну точку  $O$  і вважатимемо її початком системи координат  $xuz$ , жорстко пов'язаної з тілом (рис. 2.1). Цю систему координат називатимемо *рухомою* ( $P$ ), а її початок  $O$  – *полюсом*. Координати  $x$ ,  $y$  та  $z$  довільної точки  $M$  тіла у такій рухомій системі є відомими і незмінними протягом руху.

Рух твердого тіла вважається відомим, якщо відомі в довільний момент часу координати  $\xi$ ,  $\eta$  і  $\zeta$  будь-якої його точки в абсолютній системі  $S$ . Якщо (рис. 2.1)  $\mathbf{r}_O\{\xi_O, \eta_O, \zeta_O\}$  і  $\mathbf{r}\{\xi, \eta, \zeta\}$  – радіуси-вектори полюса  $O$  і довільної точки  $M$  в абсолютній системі  $S$ , а  $\boldsymbol{\rho}\{x, y, z\}$  – радіус-вектор цієї точки відносно полюса  $O$ , то, очевидно, матимемо

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}. \quad (2.1)$$

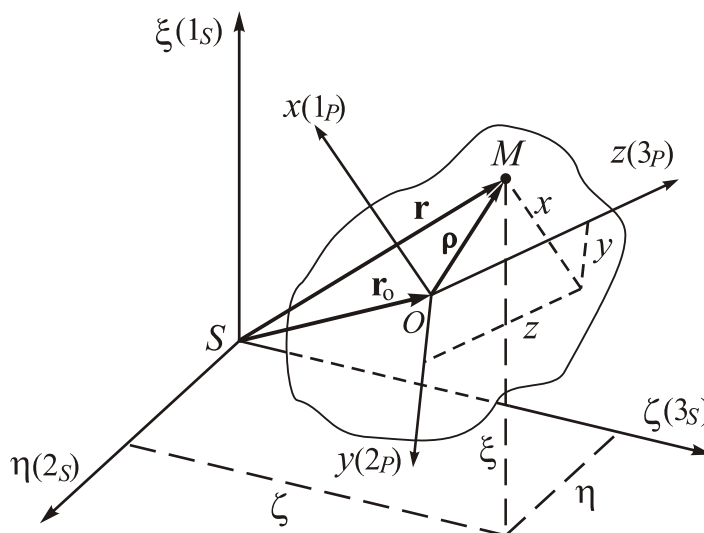


Рис. 1.2. Визначення положення точки твердого тіла

Якщо позначити одиничні вектори осей  $x$ ,  $y$  і  $z$  через  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  і  $\mathbf{k}$  відповідно, то вираз (2.1) можна подати у вигляді

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z. \quad (2.2)$$

Проекції ортів  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  та  $\mathbf{k}$  на осі координатної системи  $\xi\eta\zeta$  дорівнюють напрямним косинусам між осями системи  $xuz$  і осями системи  $\xi\eta\zeta$ . З урахуванням цього векторну рівність (2.2) можна подати у вигляді трьох скалярних:

$$\begin{cases} \xi = \xi_O + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z; \\ \eta = \eta_O + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z; \\ \zeta = \zeta_O + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases} \quad (2.3)$$

де використано позначення

$$a_{11} = \mathbf{i}_\xi = \cos(x, \xi); \quad a_{12} = \mathbf{j}_\xi = \cos(y, \xi); \quad a_{13} = \mathbf{k}_\xi = \cos(z, \xi);$$

$$a_{21} = \mathbf{i}_\eta = \cos(x, \eta); \quad a_{22} = \mathbf{j}_\eta = \cos(y, \eta); \quad a_{23} = \mathbf{k}_\eta = \cos(z, \eta);$$

$$a_{31} = \mathbf{i}_\zeta = \cos(x, \zeta); \quad a_{32} = \mathbf{j}_\zeta = \cos(y, \zeta); \quad a_{33} = \mathbf{k}_\zeta = \cos(z, \zeta).$$

Формули (2.3) є загальними рівняннями руху твердого тіла, вони безпосередньо виражають координати будь-якої його точки в опорній системі відліку як функції часу. У ці рівняння, окрім постійних за величиною координат  $x$ ,  $y$  і  $z$ , входять дванадцять функцій часу, а саме: три координати полюса  $O - \xi_O, \eta_O$  і  $\zeta_O$ , і дев'ять напрямних косинусів  $a_{ij}$ , які зручно подавати таблицею:

$A^{SP}$	$x(1_P)$	$y(2_P)$	$z(3_P)$
$\xi(1_S)$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$\eta(2_S)$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$\zeta(3_S)$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

Очевидно, що цю таблицю можна розглядати як матрицю  $A^{SP}$  напрямних косинусів рухомої системи координат  $P$  ( $x, y, z$ ) відносно нерухомої системи  $S$  ( $\xi, \eta, \zeta$ ):

$$A^{SP} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

**Увага!** Зверніть увагу на спосіб подання матриці напрямних косинусів переходу від системи координат  $S$  до системи координат  $P$ . Вгорі позначення матриці записуються позначення спочатку первинної ( $S$ ), а потім – кінцевої ( $P$ ) систем координат. По рядках матриці записуються напрямні косинуси відповідних осей первинної системи координат ( $S$ ), а по стовпцях – напрямні косинуси відповідних осей кінцевої ( $P$ ), так що елемент матриці на перетинанні  $i$ -того рядка з  $j$ -тим стовпцем дорівнює косинусу кута між віссю  $I_S$  і віссю  $J_P$ :

$$a_{ij} = \cos(\mathbf{I}_S, \mathbf{J}_P).$$

Лінійне перетворення координат (2.3) можна записати у вигляді матричної рівності:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Позначаючи стовпцеві матриці

$$R_S = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}; \quad R_{OS} = \begin{bmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{bmatrix}; \quad R_P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

замість (2.4) дістаємо

$$R_S = R_{OS} + A^{SP} R_P,$$

або

$$R_S - R_{OS} = A^{SP} R_P, \quad (2.5)$$

Співвідношення (2.5) характеризує перехід від координат точки  $M$  у рухомій системі  $P$  до координат тієї самої точки у нерухомій системі  $S$ , тобто перетворення із системи  $xuz$  у систему  $\xi\eta\zeta$ .

Дев'ять елементів матриці напрямних косинусів не є незалежними. Передусім сума квадратів напрямних косинусів будь-якої осі (наприклад  $x$ ,  $y$  або  $z$ ) у декартовій системі координат (наприклад,  $\xi\eta\zeta$ ) дорівнює одиниці, бо вона визначає квадрат модуля одиничного вектора відповідної осі:

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1; \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1; \quad a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1. \quad (2.6)$$

Оскільки будь-які дві координатні осі системи координат є перпендикулярними одна до одній, то  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$ ;  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$ ;  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$ , з чого випливають очевидні рівності:

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0; \quad a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0; \quad (2.7)$$

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0.$$

Узагальнюючи, можна висновити:

**матриця напрямних косинусів завжди є ортогональною, тобто її добуток на матрицю транспоновану їй дорівнює одиничній матриці**

$$A^{SP} \cdot (A^{SP})^T = E. \quad (2.8)$$

Цю властивість слід використовувати для перевірки правильності отриманої матриці напрямних косинусів.

## 2.1.2. Кінематика поворотів

Зазвичай як незалежні параметри повороту одного твердого тіла (системи координат) відносно іншого (другої системи координат) використовуються кути послідовних поворотів навколо координатних осей системи координат. Перший поворот здійснюється навколо будь-якої з трьох координатних осей первинної (наприклад нерухомої) системи координат, другий – навколо нового положення однієї з двох координатних осей, що не використані при першому повороті, третій поворот – навколо нового положення будь якої з двох осей, не використаних у другому повороті.

Для опису послідовності поворотів зручно застосовувати такий запис:

$$S \xrightarrow[\substack{\psi \\ 1_S}]{\vartheta} T \xrightarrow[\substack{\vartheta \\ 2_T}]{\vartheta} K \xrightarrow[\substack{\varphi \\ 1_K}]{\varphi} P.$$

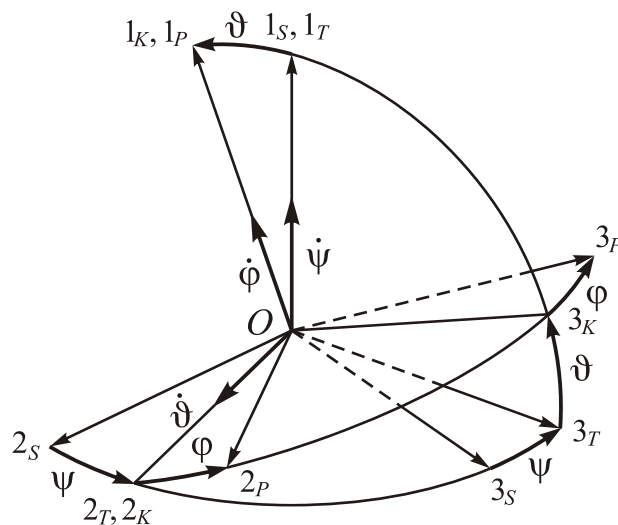


Рис. 2.2. Послідовність поворотів Ейлера

Над стрілкою, що вказує напрямок переходу від однієї системи координат до іншої, вказано позначення кута відповідного повороту, а під нею – позначення осі цього повороту. Картину поворотів, яка відповідає цій послідовності, показано на рис. 2.2.

Для опису кутової орієнтації рухомих об'єктів (наземного транспорту, літаків, ракет, суден і т. п.) більш розповсюджена така послідовність:

$$S \xrightarrow[\substack{\psi \\ 1_S}]{} T \xrightarrow[\substack{\vartheta \\ 2_T}]{} K \xrightarrow[\substack{\phi \\ 3_K}]{} P,$$

яку зображено на рис. 2.3.

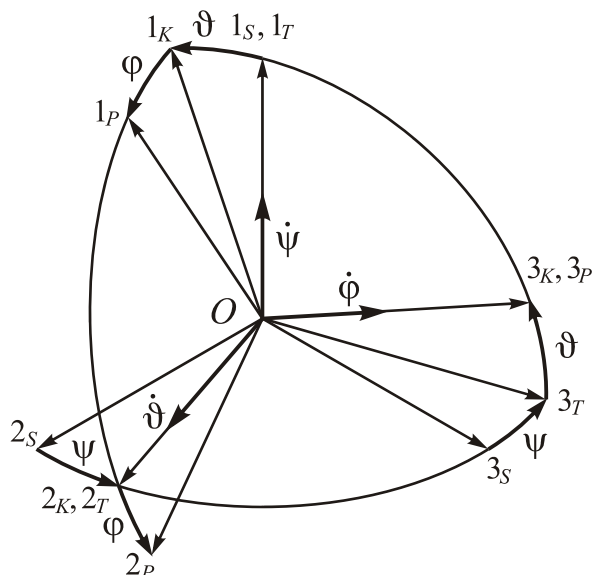


Рис. 2.3. Послідовність поворотів Крилова

У цьому разі повороти здійснюються послідовно навколо усіх трьох координатних осей. Таку послідовність називають кутами Крилова.

### 2.1.3. Визначення матриці напрямних косинусів

Визначити матрицю напрямних косинусів – це означає виразити усі елементи цієї матриці через кути обраної послідовності поворотів.

Є два основні способи це зробити: матричний і використання теореми косинусів сферичної тригонометрії.

Розглянемо *матричний спосіб*.

Припустимо, що здійснюється послідовний перехід від системи координат  $S$  до системи  $T$ , потім до системи  $K$  і нарешті – до системи  $P$ . Кожний з таких переходів перетворює деякий вектор  $\mathbf{r}$ :

$$R_S = A^{ST} R_T; \quad R_T = A^{TK} R_K; \quad R_K = A^{KP} R_P,$$

де  $R$  – матриця-стовпець з проєкцій вектора  $\mathbf{r}$  у системі координат, що показана індексом при матриці;  $A^{ST}$ ,  $A^{TK}$  і  $A^{KP}$  – матриці напрямних косинусів відповідно між системами координат  $S$  і  $T$ ,  $T$  і  $K$ ,  $K$  і  $P$ . Із цих співвідношень випливає рівність:

$$R_S = A^{ST} A^{TK} A^{KP} R_P.$$

Такий самий перехід від системи  $S$  до системи  $P$  можна описати за допомогою результуючої матриці  $A^{SP}$  напрямних косинусів:

$$R_S = A^{SP} R_P.$$

Порівнюючи отриману рівність з попередньою, дістанемо співвідношення, яке пов'язує матрицю результуючого повороту з матрицями складових послідовних поворотів:

$$A^{SP} = A^{ST} A^{TK} A^{KP}. \quad (2.9)$$

Отже, *матриця напрямних косинусів результуючого повороту дорівнює добутку матриць напрямних косинусів складових поворотів, записаних зліва направо у порядку здійснення самих поворотів.*

Другий спосіб – застосування *теорему косинусів сферичного трикутника.*

Сферичним трикутником називається фігура, що утворюється на поверхні сфери одиничного радіусу перетинанням трьох дуг великого круга (рис. 2.4).

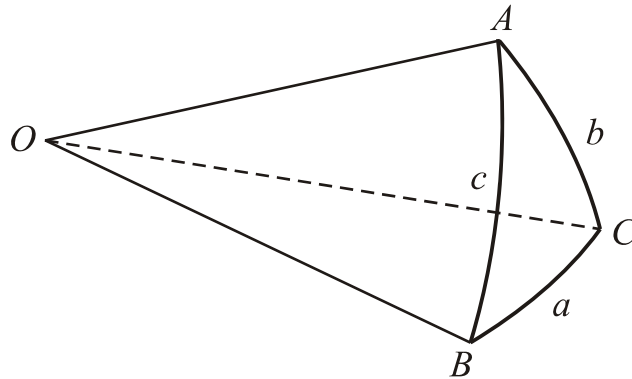


Рис. 2.4. Сферичний трикутник

Дуги  $AB$ ,  $BC$  і  $CA$  називаються сторонами трикутника. Вони вимірюються відповідними центральними кутами  $AOB$ ,  $BOC$  і  $COA$  (де  $O$  – центр сфери). Кутами  $ABC$ ,  $BAC$  і  $BCA$  сферичного трикутника є двогранні кути, утворені площинами:  $AOB$  і  $AOC$  – для вершини  $A$ ,  $AOB$  і  $BOC$  – для вершини  $B$ ,  $AOC$  і  $BOC$  – для вершини  $C$ .

Позначимо сторони сферичного трикутника проти вершин  $A$ ,  $B$  і  $C$  відповідно через  $a$ ,  $b$  і  $c$ , а двогранні кути при вершинах – великими літерами латиниці, що позначають відповідну вершину. Тоді формулу *теорему косинусів сферичного трикутника* можна записати у вигляді

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \quad (2.10)$$

Теорему можна сформулювати так:

*косинус будь-якої сторони сферичного трикутника дорівнює добутку косинусів двох інших його сторін, складеному з добутком синусів цих сторін і косинусу двогранного кута, протилежного шуканій стороні.*

#### 2.1.4. Правило диференціювання вектора, заданого в рухомій системі координат

Якщо деякий вектор  $\mathbf{a}$  відомий своїми проекціями на осі деякої системи координат  $P$ , то його похідна за часом в умовно нерухомій системі координат  $S$  визначається співвідношенням

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}_P \mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{a}. \quad (2.11)$$

Перший доданок у правій частині називають *локальною похідною вектора*. Він характеризує відносну швидкість вектора (його швидкість відносно рухомої системи координат  $P$ ). Другий доданок визначається вектором  $\boldsymbol{\omega}^P$  кутової швидкості рухомої сис-



теми  $P$  відносно нерухомої системи координат  $S$ . Цей доданок визначає переносну швидкість вектора, обумовлену обертанням рухомої системи.

Отже, правило диференціювання вектора, визначеного в обертовій системі координат, можна сформулювати так:

*похідна за часом вектора у нерухомій системі координат дорівнює сумі локальної похідної вектора і векторного добутку вектора кутової швидкості обертової системи координат відносно нерухомої на сам вектор.*

У проекціях на осі рухомої системи координат векторне співвідношення (2.11) має вигляд трьох скалярних виразів:

$$\begin{cases} \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_x = \frac{da_x}{dt} + \omega_y^P a_z - \omega_z^P a_y \\ \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_y = \frac{da_y}{dt} + \omega_z^P a_x - \omega_x^P a_z \\ \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_z = \frac{da_z}{dt} + \omega_x^P a_y - \omega_y^P a_x \end{cases} \quad (2.12)$$

Застосовуючи це правило до радіуса-вектора  $\mathbf{r}$  матеріальної точки в нерухомій системі координат, можна визначити вектор  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  швидкості цієї точки відносно цієї системи координат:

$$\mathbf{v} = \frac{\tilde{d}_P \mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{r}.$$

Аналогічно визначається вектор прискорення  $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$  точки відносно нерухомої системи:

$$\mathbf{w} = \frac{\tilde{d}_P \mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{v}.$$

Щоб застосовувати на практиці це правило, дослідникові потрібно попередньо задатися рухомою системою координат (виходячи з міркувань зручності дослідження) і визначити з цього проекції її кутової швидкості  $\boldsymbol{\omega}^P$ .

### 2.1.5. Рівняння руху, закон прецесії та гіроскопічний момент

Якщо застосувати правило диференціювання вектора до закону моментів

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O,$$

отримаємо таку його форму

$$\frac{\tilde{d}_P \mathbf{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O.$$

Цей вираз можна деталізувати, врахувавши співвідношення (1.4)

$$\frac{\tilde{d}_P \mathbf{K}_O^\omega}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{K}_O^\omega = \mathbf{M}_O - m\boldsymbol{\rho}_C \times \mathbf{w}_O. \quad (2.13)$$

Ця форма закону моментів є найбільш зручною, бо в права частина рівняння залежить не від повного моменту імпульсу, а лише від його оберտальної частини  $\mathbf{K}_O^\omega$ , яка визначається співвідношеннями (1.5)...(1.8).

Іноді, при дослідженні руху триступневих гіроскопічних пристроїв, замість повних рівнянь раціональніше користуватися наближеними, так званими прецесійними рівняннями. Вони виходять з рівняння (2.13), якщо використати припущення, що обертальна частина  $\mathbf{K}_O^\omega$  кінетичного моменту (яка називається власним кінетичним моментом  $\mathbf{H}$ ) дорівнює його проекції на головну вісь гіроскопа. За цього припущення рівняння (2.13) перетворюється на таке наближене

$$\frac{\tilde{d}_P \mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{H} = \mathbf{M}_O^*, \quad (2.14)$$

яке презентує *прецесійні рівняння гіроскопа*. При цьому у склад моменту сил  $\mathbf{M}_O^* = \mathbf{M}_O - m\mathbf{r}_C \times \mathbf{w}_O$  входить момент сили інерції, що виникає відносно полюса  $O$  внаслідок руху точки підвісу з прискоренням  $\mathbf{w}_O$ .

Якщо в якості рухомої системи координат  $P$  використати так звані осі Резаля  $xuz$ , одна з осей якої ( $z$ ) збігається з головною віссю гіроскопа (а, отже, й з вектором  $\mathbf{H}$  власного кінетичного моменту гіроскопа, векторне рівняння (2.14) рівносильне трьом скалярним рівнянням

$$\begin{cases} H\omega_y = M_x^* \\ -H\omega_x = M_y^* \\ \frac{dH}{dt} = M_z^* \end{cases}, \quad (2.15)$$

де  $\omega_x$  і  $\omega_y$  являють собою проекції кутової швидкості гіроскопа на площину, перпендикулярну головній осі.

У припущенні незмінності у часі величини власного кінетичного моменту гіроскопа, локальна похідна від вектора власного кінетичного моменту дорівнюватиме нулю

$$\frac{\tilde{d}_P \mathbf{H}}{dt} \equiv 0, \text{ а рівняння (2.15) набуде вигляду}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{pr} \times \mathbf{H} = \mathbf{M}_O^*. \quad (2.16)$$

Це рівняння подає в векторній формі *закон прецесії*. Величина  $\boldsymbol{\omega}_{pr}$  є кутовою швидкістю осей Резаля і називається *кутовою швидкістю прецесії гіроскопа*.

У багатьох випадках прецесійних рівнянь цілком достатньо для аналізу руху триступневих гіроскопів.

З рівняння (2.16) випливає, що *коли на гіроскоп з трьома ступенями вільності діє момент зовнішніх сил, вектор його власного кінетичного моменту прагне найкоротшим шляхом сполучитися з вектором діючого моменту сил і рухається до нього з постійною кутовою швидкістю прецесії*.

Ця властивість суттєво відрізняє гіроскоп від звичайного твердого тіла. Останнє при дії на нього моменту зовнішнього сил починає обертатися навколо осі дії цього моменту з кутовим прискоренням, пропорційним величині діючого моменту сил.

У відповідності до *принципу Даламбера* рівняння (2.16) можна подати у такий спосіб:  $\mathbf{M}_O + \mathbf{M}_{gr} = 0$ .

Величина

$$\mathbf{M}_{gr} = -\boldsymbol{\omega}_{pr} \times \mathbf{H} = \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}_{pr} \quad (2.17)$$

є моментом сил інерції коріолісового прискорення, з яким рухаються точки гіроскопа при його прецесії. Її називають *гіроскопічним моментом*. *Гіроскопічний момент – це момент*

сил опору гіроскопа дії на нього зовнішнього оточення, яке викликає рух його головної осі з кутовою швидкістю  $\omega_{pr}$ .

Гіроскопічний момент напрямлений так, що він ніби прагне найкоротшим шляхом сполучити вектор власного кінетичного моменту гіроскопа з вектором кутової швидкості прецесії (правило Жуковського).

### 2.1.6. Нутація гіроскопа

Під нутацією розуміють власний рух гіроскопа, який може спостерігатися як вільний рух гіроскопа, коли на гіроскоп не діють моменти зовнішніх сил, або власні коливання при дії на гіроскоп постійного моменту сил.

У разі вільного руху симетричного зрівноваженого гіроскопа нутація спричиняється наявністю початкової екваторіальної кутової швидкості  $\omega_e$  гіроскопа. У власну чергу екваторіальна кутова швидкість може виникнути внаслідок ударного моменту імпульсу сили  $M_e \cdot \Delta t$ :

$$\omega_e = \frac{M_e \cdot \Delta t}{J_e},$$

де  $M_e$  – ударний момент сил;  $\Delta t$  – термін дії ударного моменту сил;  $J_e$  – екваторіальний момент інерції гіроскопа.

В результаті дії такого ударного імпульсу вектор початкового (до удару) кінетичного моменту  $\mathbf{H}$  гіроскопа отримує приріст  $\Delta \mathbf{K} = J_e \cdot \boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{M}_e \cdot \Delta t$ , завдяки чому вектор кінетичного моменту приймає значення  $\mathbf{K} = \mathbf{H} + \Delta \mathbf{K} = \mathbf{H} + J_e \cdot \boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{H} + \mathbf{M}_e \cdot \Delta t$ , стрибком змінюючи своє положення у просторі на кут

$$\Delta \vartheta = \arctg \frac{J_e \omega_e}{H} \approx \frac{J_e \omega_e}{H} = \frac{M_e \Delta t}{H}.$$

Після такого ударного імпульсу гіроскоп стає вільним. Тому, у відповідності до закону моментів, вектор  $\mathbf{K}$  залишатиметься незмінним як за величиною, так і за напрямком. Головна ж вісь гіроскопа (ГОГ), складаючи у початкову мить з вектором  $\mathbf{K}$  кут  $\Delta \vartheta$ , у подальшому здійснюватиме навколо нього обертання з кутовою швидкістю

$$\lambda \approx \frac{H}{J_e} \quad (2.18)$$

за конусом з кутом розхилом  $2 \Delta \vartheta$ . Такий конічний рух ГОГ у просторі можна розглядати як коливання ГОГ з частотою  $\lambda$  навколо двох взаємно перпендикулярних осей з амплітудою

$$\vartheta_m = \Delta \vartheta \approx \frac{J_e \omega_e}{H} = \frac{M_e \Delta t}{H}. \quad (2.19)$$

Розглянемо інший випадок, – на гіроскоп, головна вісь як до того була нерухомою, раптово прикладений постійний екваторіальний момент сил  $M_e$ . У цьому разі гіроскоп здійснюватиме вимушену прецесію з кутовою швидкістю

$$\omega_{pr} = \frac{M_e}{H}, \quad (2.20)$$

яке супроводжується нутаційними коливаннями з частотою  $\lambda$  (2.18) і амплітудою

$$\vartheta_m \approx \frac{M_e J_e}{H^2}. \quad (2.21)$$

## 2.2. Завдання

### 2.2.1. Кінематика поворотів

**Задача 2.1.** Зобразити кінематику поворотів, яка характеризує перехід від первісної системи координат  $\xi\eta\zeta$  до кінцевої  $xuz$ . Розташувати первісну систему координат відповідно до таблиці 2.1, послідовність поворотів – відповідно до таблиці 2.2. Кути поворотів позначити відповідно до таблиці 2. 3. Проміжні системи координат позначити  $\xi_1\eta_1\zeta_1$  та  $\xi_2\eta_2\zeta_2$ .

Знайти матрицю напрямних косинусів системи  $xuz$  у системі  $\xi\eta\zeta$ . Задачу розв'язати двома способами: використовуючи теорему косинусів сферичної тригонометрії і матричним способом.

Перевірити виконання співвідношень між напрямними косинусами.

Таблиця 2.1.

№ варіанта	1	2	3
Розташувати вертикаль вісь	$\xi$	$\eta$	$\zeta$

Таблиця 2.2.

№ повороту	Варіант											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\eta$	$\eta$	$\eta$	$\eta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$
2	$\zeta_1$	$\eta_1$	$\eta_1$	$\zeta_1$	$\xi_1$	$\zeta_1$	$\xi_1$	$\zeta_1$	$\eta_1$	$\xi_1$	$\eta_1$	$\xi_1$
3	$\eta_2$	$\zeta_2$	$\xi_2$	$\xi_2$	$\zeta_2$	$\xi_2$	$\eta_2$	$\eta_2$	$\xi_2$	$\eta_2$	$\zeta_2$	$\zeta_2$

Таблиця 2.3.

№ повороту	Варіант											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\eta$	$\eta$	$\eta$	$\eta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$	$\zeta$
2	$\zeta_1$	$\eta_1$	$\eta_1$	$\zeta_1$	$\xi_1$	$\zeta_1$	$\xi_1$	$\zeta_1$	$\eta_1$	$\xi_1$	$\eta_1$	$\xi_1$
3	$\eta_2$	$\zeta_2$	$\xi_2$	$\xi_2$	$\zeta_2$	$\xi_2$	$\eta_2$	$\eta_2$	$\xi_2$	$\eta_2$	$\zeta_2$	$\zeta_2$

**Задача 2.2.** На основі розв'язку задачі 2.1 і за умови, що первісна система координат  $\xi\eta\zeta$  є нерухомою, а усі кути повороту системи координат  $xuz$  змінюються у часі, знайти проєкції кутової швидкості  $\omega$  системи  $xuz$  на

- осі системи  $\xi\eta\zeta$ ;
- осі системи  $\xi_2\eta_2\zeta_2$ ;
- осі системи  $xuz$ .

**Задача 2.3.** Зобразити кінематику поворотів рухомого об'єкта (ракета, літак, корабель тощо) в опорній системі координат  $\xi\eta\zeta$  (пов'язаній з поверхнею обертової Землі) відповідно до таблиці 2.4. Позначить:  $\psi$  – кут першого повороту,  $\vartheta$  – кут другого повороту,  $\varphi$  – кут третього повороту. Вертикально розташувати вісь, вказану у таблиці 2.1. З об'єктом жорстко зв'язати систему координат  $x_c y_c z_c$ .

Таблиця 2.4. Варіанти послідовності осей поворотів

Номер повороту	Варіант					
	1	2	3	4	5	6
1	$\xi$	$\xi$	$\eta$	$\eta$	$\zeta$	$\zeta$
2	$\zeta_1$	$\eta_1$	$\xi_1$	$\zeta_1$	$\xi_1$	$\eta_1$
3	$\eta_2$	$\zeta_2$	$\zeta_2$	$\xi_2$	$\eta_2$	$\xi_3$

**Задача 2.4.** На основі розв'язання задачі 2.3, вважаючи опорну систему координат нерухомою, знайти проекції кутової швидкості  $\mathbf{u}$  рухомого об'єкта на осі систем координат:

- $\xi\eta\zeta$ ;
- $x_c y_c z_c$ .

**Задача 2.5.** Зобразити кінематику поворотів ротора гіроскопа у кардановому підвісі відносно основи. Розташування гіроскопа на основі показано на рис. 2.5. З основою зв'язати систему координат  $x_c y_c z_c$ . Вертикально спрямувати вісь, вказану у таблиці 2.5. Позначити:  $\alpha$  – кут повороту зовнішньої рамки відносно основи,  $\beta$  – кут повороту внутрішньої рамки відносно зовнішньої,  $\gamma$  – кут повороту ротора гіроскопа відносно внутрішньої рамки. Позначити  $x_2 y_2 z_2$  систему координат, зв'язану з зовнішньою рамкою у відповідності до рис 2.5. Систему координат, зв'язану з внутрішньою рамкою, позначити  $x_1 y_1 z_1$ . З ротором жорстко зв'язати систему координат  $x_3 y_3 z_3$ .

Знайти матрицю напрямних косинусів між ротором і основою.

Таблиця 2.5.

№ варіанта	1	2	3
Розташувати вертикально вісь	$x_c$	$y_c$	$z_c$

**Задача 2.6.** Для кінематики гіроскопа у кардановому підвісі, вказаній в задачі 2.5, вважаючи основу нерухомою, знайдіть проекції:

- кутової швидкості зовнішньої рамки карданового підвісу на осі, зв'язані з зовнішньою рамкою;
- кутової швидкості внутрішньої рамки на осі, зв'язані з внутрішньою рамкою;
- кутової швидкості ротора гіроскопа на осі, зв'язані з внутрішньою рамкою.

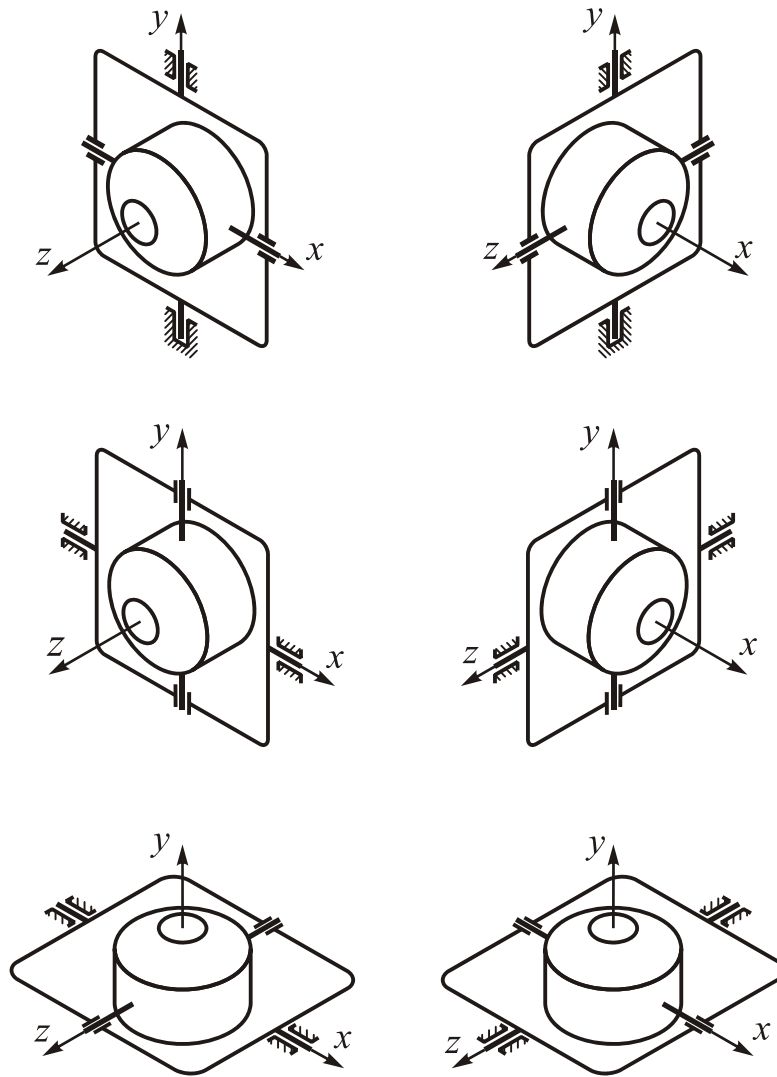


Рис. 2.5. Розташування гіроскопа у кардановому підвісі на основі

### 2.2.2. Швидкості і прискорення

**Задача 2.7.** Матеріальна точка рухається відносно тіла так, що його координати в системі координат  $xuz$ , пов'язаній з цим тілом, змінюються з часом за законами  $x(t)$ ,  $y(t)$  і  $z(t)$ , вказаними у таблиці 2.6. Тіло обертається з незмінною кутовою швидкістю  $\mathbf{\Omega}$  в інерціальному просторі. Проекції кутової швидкості тіла на осі цієї системи координат вказані у таблиці 2.6.

Знайти проекції абсолютної швидкості точки та її абсолютного прискорення на осі рухомої системи координат  $xuz$ . Навести загальні формули визначення і коротко пояснити шлях одержання відповіді.

Таблиця 2.6

Варіант	Проекції МТ на рухомі осі			Проекції переносної кутової швидкості		
	$x(t)$	$y(t)$	$z(t)$	$\omega_X$	$\omega_Y$	$\omega_Z$
1	$at^2 + vt$	0	0	0	$\omega$	0
2	$b \sin \lambda t$	0	$b \cos \lambda t$	0	$\omega$	0
3	$b \sin \lambda t$	$b \cos \lambda t$	0	0	0	$\omega$
4	$b \sin \lambda t$	$at^2 + vt$	$b \cos \lambda t$	0	$\omega$	0
5	$b \sin \lambda t$	$at^2 + vt$	$b \cos \lambda t$	$\omega$	0	0
6	$b \sin \lambda t$	$at^2 + vt$	$b \cos \lambda t$	0	0	$\omega$
7	$b \sin \lambda t$	$at^2 + vt$	$b \sin \lambda t$	0	$\omega$	0
8	$b \cos \lambda t$	$at^2 + vt$	$b \cos \lambda t$	$\omega$	0	0
9	$b \sin \lambda t$	$at^2 + vt$	$b \sin \lambda t$	0	0	$\omega$
10	$b \sin \lambda t$	$at^2 + vt$	0	0	$\omega$	0
11	$b \sin \lambda t$	$at^2 + vt$	0	$\omega$	0	0
12	$b \sin \lambda t$	$at^2 + vt$	0	0	0	$\omega$
13	$at^2 + vt$	0	0	0	0	$\omega$
14	0	$at^2 + vt$	0	0	0	$\omega$
15	0	0	$at^2 + vt$	0	$\omega$	0
16	0	$b \cos \lambda t$	$b \sin \lambda t$	0	0	$\omega$
17	0	$b \cos \lambda t$	$b \sin \lambda t$	0	$\omega$	0
18	0	$b \cos \lambda t$	$b \sin \lambda t$	$\omega$	0	0
19	0	$b \sin \lambda t$	$b \sin \lambda t$	0	0	$\omega$
20	0	$b \sin \lambda t$	$b \sin \lambda t$	0	$\omega$	0
21	0	$b \sin \lambda t$	$b \sin \lambda t$	$\omega$	0	0
22	$b \cos \lambda t$	$b \sin \lambda t$	$b \sin \lambda t$	0	0	$\omega$
23	$b \sin \lambda t$	$b \sin \lambda t$	$b \cos \lambda t$	0	$\omega$	0
24	$b \sin \lambda t$	$b \cos \lambda t$	$b \sin \lambda t$	$\omega$	0	0

### 2.2.3. Гіроскопічний момент

**Задача 2.8.** Ротор турбіни корабля має масу  $m$ , обертається навколо поздовжньої осі корабля з кутовою швидкістю  $n$  обертів за хвилину. Радіус інерції ротора турбіни навколо цієї осі дорівнює  $r$ . Корабель зазнає кильову хитавицю з періодом  $T$  і амплітудою  $\vartheta_m$  (або циркуляцію з періодом циркуляції  $T$ ). Дані наведені у таблиці 2. 7.

Розрахувати найбільше значення додаткової сили притискання у підшипниках ротора турбіни, якщо відстань між підшипниками дорівнює  $l$ .

Таблиця 2.7

Варіант	Маса $m$ , т	Радіус інерції $r$ , м	$n$ , об / хв	Період хита-виці $T$ , с	Амплітуда хита-виці $\vartheta_m$ , гра-дуси	Період циркуляції $T$ , хви-лин	$l$ , м
1	2,5	0,6	3000	6	6	—	2
2	2,5	0,6	3000	—	—	1	2
3	2,0	0,7	2000	20	10	—	1
4	2,0	0,7	2000	—	—	1	1
5	1,0	0,5	2000	10	10	—	0,5
6	1,0	0,5	2000	—	—	0,5	0,5
7	1,5	0,7	3000	—	—	1	1
8	1,0	0,7	2000	10	10	—	0,5
9	1,0	0,6	3000	—	—	0,5	0,5

**Задача 2.9.** Загальна маса двох гребних коліс колісного пароплава  $m$ , а радіус інерції кожного з них –  $r$ . Колеса обертаються навколо поперечної осі пароплава з кутовою швидкістю  $n$  обертів за хвилину. Корабель здійснює циркуляцію з періодом повної циркуляції  $T$  (або зазнає бічної хита-виці з періодом  $T$  і з амплітудою  $\vartheta_m$ ).

Розрахувати значення додаткової сили притискання у підшипниках гребних коліс, якщо відстань між підшипниками  $l$ . Дані подані у таблиці 2.8.

Таблиця 2.8

Варіант	Маса $m$ , т	Радіус інерції $r$ , м	$n$ , об / хв	Період хита-виці $T$ , с	Амплітуда хита-виці $\vartheta_m$ , гра-дуси	Період циркуляції $T$ , хви-лин	$l$ , м
1	10	2,6	60	6	6	—	2
2	10	2,6	60	—	—	1	2
3	25	2	50	20	10	—	1
4	25	2	50	—	—	1	1
5	20	1,5	50	10	10	—	0,5
6	20	2,5	30	—	—	0,5	0,5
7	15	1,7	40	—	—	1	1
8	12	1,2	20	10	10	—	0,5
9	5	1,6	10	—	—	0,5	0,5

#### 2.2.4. Прецесія і нутація

**Задача 2.10.** Гіроскоп з горизонтально розташованим кінетичним моментом  $H$  встановлено нерухомо на поверхні планети на широті  $\varphi_{pl}$ . Який за величиною момент і як має бути прикладений до гіроскопа, щоб головна вісь гіроскопа була нерухомою відносно поверхні планети? Дані наведені у таблиці 2.9.



Таблиця 2.9

Варіант	Планета	Широта місця $\varphi_{pl}$ , градуси	Кінетичний момент гіроскопа $H$ , Н м с
1	Земля	90	1
2	Місяць	90	1
3	Марс	90	1
4	Нептун	90	1
5	Земля	51	0.4
6	Місяць	90	0,4
7	Марс	90	0,4
8	Нептун	90	0,4
9	Земля	30	0,4

**Задача 2.11.** Гіроскоп з вертикально розташованим кінетичним моментом  $H$  встановлено нерухомо на поверхні планети на широті  $\varphi_{pl}$ . Який за величиною момент і як має бути прикладений до гіроскопа, щоб головна вісь гіроскопа була нерухомою відносно поверхні планети? Дані наведені у таблиці 2.10.

Таблиця 2.10

Варіант	Планета	Широта місця $\varphi_{pl}$ , градуси	Кінетичний момент гіроскопа $H$ , Н м с
1	Земля	0	1
2	Місяць	0	1
3	Марс	0	1
4	Нептун	0	1
5	Земля	60	0.4
6	Місяць	0	0,4
7	Марс	0	0,4
8	Нептун	0	0,4
9	Земля	30	0,4

**Задача 2.12.** Ротору гіроскопа надано обертання навколо головної осі з кутовою швидкістю  $n$  обертів у хвилину. Осьовий момент інерції гіроскопа –  $J$ , а екваторіальний –  $J_e$ . По головній осі на відстані  $l$  від точки підвісу гіроскопа протягом проміжку часу  $\Delta t$  подіяв силовий імпульс величиною  $F$ .

Розрахувати частоту (в Герцах) і амплітуду (у кутових секундах) нутаційних коливань, що виникають внаслідок цієї дії.

Дані наведені у таблиці 2.11

Таблиця 2.11

Варіант	$J$ , Н м с <sup>2</sup>	$J_e$ , Н м с <sup>2</sup>	$n$ , об / хв	$F$ , Н	$\Delta t$ , 10 <sup>-3</sup> с	$l$ , см
1	5	3	30000	20	1	5
2	4	3	60000	10	2	5
3	5	4	20000	20	3	4
4	4	3,5	30000	10	10	5

5	5	4,5	20000	10	1	5
6	4	3,5	60000	20	0,5	4
7	5	3	40000	7	1	7
8	4	3	20000	10	0,5	6
9	5	3,5	30000	15	0,5	5

**Задача 2.13.** На гіроскоп з осьовим моментом інерції –  $J$ , екваторіальним –  $J_e$  і з власною кутовою швидкістю  $n$  обертів у хвилину раптово прикладено постійний момент сил  $M$ , який прагне змінити орієнтацію головної осі.

Розрахувати кутову швидкість  $\omega_{np}$  вимушеної прецесії (в градусах за годину), частоту  $F$  (в Герцах) і амплітуду (у кутових секундах) нутаційних коливань гіроскопа, що причиняє ця дія.

Дані наведені у таблиці 2.12.

Таблиця 2.12

Варіант	$J, \text{Н м с}^2$	$J_e, \text{Н м с}^2$	$n,$ об / хв	$M, 10^{-3} \text{ Н м}$
1	5	3	30000	20
2	4	3	60000	10
3	5	4	20000	20
4	4	3,5	30000	10
5	5	4,5	20000	10
6	4	3,5	60000	20
7	5	3	40000	7
8	4	3	20000	10
9	5	3,5	30000	15

**Задача 2.14\*.** Земля здійснює прецесію з періодом 25 776 років навколо перпендикуляра до площини екліптики. Визначить величину та напрямок моменту сил, що викликає таку прецесію.

**Задача 2.15\*.** Обчисліть період прецесії місячної орбіти під дією сил тяжіння з боку Сонця. Нахил орбіти Місяця до площини екліптики  $5^\circ 09'$ .

**Задача 2.16\*.** Обчисліть період власних (нутаційних) коливань Землі відносно її поверхні. Вважати Землю динамічно симетричним твердим тілом з віссю фігури, що збігається з лінією географічних полюсів, осьовий момент інерції якого дорівнює  $8,02 \cdot 10^{37} \text{ кг м}^2$ , а екваторіальний момент інерції –  $7,97 \cdot 10^{37} \text{ кг м}^2$ .

## 2.3. Методичні вказівки

### 2.3.1. Визначення матриці напрямних косинусів

Як приклад знайдемо матрицю напрямних косинусів послідовності кутів поворотів, зображеної на рис. 2.2. У відповідності до рисунка матимемо:

$A^{ST}$	$1_T$	$2_T$	$3_T$
$1_S$	1	0	0
$2_S$	0	$\cos \psi$	$-\sin \psi$
$3_S$	0	$\sin \psi$	$\cos \psi$

$A^{TK}$	$1_K$	$2_K$	$3_K$
$1_T$	$\cos \vartheta$	0	$\sin \vartheta$
$2_T$	0	1	0
$3_T$	$-\sin \vartheta$	0	$\cos \vartheta$

$A^{KP}$	$1_P$	$2_P$	$3_P$
$1_K$	1	0	0
$2_K$	0	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$
$3_K$	0	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$

Перемножуючи ці три матриці, отримаємо матрицю напрямних косинусів для випадку послідовності поворотів Ейлера.

$A^{SP}$	$1_P$	$2_P$	$3_P$
$1_S$	$\cos \vartheta$	$\sin \vartheta \sin \varphi$	$\sin \vartheta \cos \varphi$
$2_S$	$\sin \psi \sin \vartheta$	$\cos \psi \cos \varphi -$ $-\sin \psi \sin \varphi \cos \vartheta$	$-\cos \psi \sin \varphi -$ $-\sin \psi \cos \varphi \cos \vartheta$
$3_S$	$-\cos \psi \sin \vartheta$	$\sin \psi \cos \varphi +$ $+\cos \psi \sin \varphi \cos \vartheta$	$-\sin \psi \sin \varphi +$ $+\cos \psi \cos \varphi \cos \vartheta$

(2.19)

Для визначення напрямних косинусів за допомогою формули (2.7) рекомендується такий порядок дій:

- 1) нарисувати картину послідовних поворотів, як це показано на рис. 2.2 і 2.3;
- 2) відшукати на рисунку координатні осі, косинус між якими потрібно відшукати;
- 3) знайти на рисунку такий сферичний трикутник, двома вершинами якого були б сліди на сфері двох осей, що знайдені під час виконання п. 2, а третьою вершиною – слід такої координатної осі, що сторони утвореного сферичного трикутника, які прилягають до цієї вершини, лежали б на зображених площинах поворотів;

4) з рисунка визначити (виразити через кути заданої послідовності поворотів) величини сторін, що прилягають до третьої вершини трикутника (знайденої у п. 3); це завжди можливо, бо, за умовою п. 3 сторони лежать у площинах, що містять лише задані кути поворотів;

5) з рисунка визначити (виразити через один із кутів повороту) двогранний кут, що лежить проти шуканої сторони; слід узяти до уваги, що *двогранний кут між площинами кутів двох послідовних поворотів завжди дорівнює  $\frac{\pi}{2}$* ; відмінним від  $\frac{\pi}{2}$  є лише двогранний кут між площинами першого і третього поворотів, причому він є функцією другого кута повороту;

6) підставити знайдені значення сторін і двогранного кута між ними у формулу (1.44) і перетворити отриманий вираз до найпростішого вигляду;

7) аналогічно визначити решту вісім напрямних косинусів і записати результат у вигляді таблиці матриці напрямних косинусів;

8) перевірити правильність результатів, використовуючи для цього умови (1.13) і (1.14).

Розглянемо застосування цього способу на прикладі тієї ж послідовності кутів Ейлера (див. рис. 2.2).

Визначимо напрямний косинус між осями  $3_S$  і  $3_P$ . Розглядаючи рис. 2.2, дійдемо висновку, що поставлені умови задовольняє лише трикутник  $3_P - 2_K - 3_S$ . При цьому сторона  $3_P - 2_K$  дорівнює  $\pi/2 + \varphi$ , сторона  $3_S - 2_K$  дорівнює  $\pi/2 - \psi$ , а двогранний кут  $3_P - 2_K - 3_S$  дорівнює  $\vartheta$ . Застосовуючи теорему косинусів (1.17), дістанемо:

$$\begin{aligned} \cos(3_S, 3_P) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \cos \vartheta = \\ &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Результат, як і слід було очікувати, повністю збігається з одержаним матричним способом (див. матрицю (1.16)).

Застосовуючи цей спосіб до послідовності поворотів Крилова (див. рис. 2.3), дійдемо такої матриці напрямних косинусів:

$A^{SP}$	$1_P$	$2_P$	$3_P$
$1_S$	$\cos \vartheta \cos \varphi$	$\cos \vartheta \sin \varphi$	$\sin \vartheta$
$2_S$	$-\cos \psi \sin \varphi +$ $+\sin \psi \cos \varphi \sin \vartheta$	$\cos \psi \cos \varphi +$ $+\sin \psi \sin \varphi \sin \vartheta$	$-\sin \psi \cos \vartheta$
$3_S$	$-\sin \psi \sin \varphi -$ $-\cos \psi \cos \varphi \sin \vartheta$	$\sin \psi \cos \varphi -$ $-\cos \psi \sin \varphi \sin \vartheta$	$\cos \psi \cos \vartheta$

(2.20)

### 2.3.2. Визначення швидкості і прискорення точки

Нехай рухома система координат  $xuz$  обертається навколо осі  $y$  з постійною кутовою швидкістю. Тоді зручно ввести у розгляд нерухому систему координат  $\xi\eta\zeta$  у такий спосіб, щоб осі  $\xi$ ,  $\eta$  і  $\zeta$  у початковий момент часу збіглися з відповідними осями  $x$ ,  $y$  і  $z$ . Координати матеріальної точки в нерухомій системі у цьому разі будуть пов'язані з її координатами в рухомій системі співвідношеннями:

$$\xi = x \cos \omega t + z \sin \omega t; \quad \eta = y; \quad \zeta = z \cos \omega t - x \sin \omega t.$$

Тепер знайти проекції швидкості точки на осі *нерухомої* системи можна простим диференціюванням знайдених проекцій координат:

$$V_{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} \cos \omega t + \frac{dz}{dt} \sin \omega t + \omega(z \cos \omega t - x \sin \omega t);$$

$$V_{\eta} = \frac{dy}{dt};$$

$$V_{\zeta} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{dz}{dt} \cos \omega t - \frac{dx}{dt} \sin \omega t - \omega(x \cos \omega t + z \sin \omega t).$$

Аналогічно, диференціюючи знайдені проекції швидкості, знаходяться проекції прискорення на осі нерухомої системи координат:

$$w_{\xi} = \frac{dV_{\xi}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \cos \omega t + \frac{d^2z}{dt^2} \sin \omega t + 2\omega\left(\frac{dz}{dt} \cos \omega t - \frac{dx}{dt} \sin \omega t\right) - \omega^2(x \cos \omega t + z \sin \omega t);$$

$$w_{\eta} = \frac{dV_{\eta}}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};$$

$$w_{\zeta} = \frac{dV_{\zeta}}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \cos \omega t - \frac{d^2x}{dt^2} \sin \omega t - 2\omega\left(\frac{dx}{dt} \cos \omega t + \frac{dz}{dt} \sin \omega t\right) - \omega^2(z \cos \omega t - x \sin \omega t).$$

Тепер можна знайти й проекції швидкості і прискорення на осі *рухомої* системи. Для цього слід лише застосувати формули зворотного перепроєціювання:

$$a_x = a_{\xi} \cos \omega t - a_{\zeta} \sin \omega t; \quad a_y = a_{\eta}; \quad a_z = a_{\zeta} \cos \omega t + a_{\xi} \sin \omega t.$$

Відповідно до цього отримаємо:

$$\begin{aligned} V_x &= V_{\xi} \cos \omega t - V_{\zeta} \sin \omega t = \\ &= \left[ \frac{dx}{dt} \cos \omega t + \frac{dz}{dt} \sin \omega t + \omega(z \cos \omega t - x \sin \omega t) \right] \cos \omega t - \\ &- \left[ \frac{dz}{dt} \cos \omega t - \frac{dx}{dt} \sin \omega t - \omega(x \cos \omega t + z \sin \omega t) \right] \sin \omega t = \frac{dx}{dt} + \omega z; \end{aligned}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt};$$

$$\begin{aligned} V_z &= V_{\zeta} \cos \omega t + V_{\xi} \sin \omega t = \\ &= \left[ \frac{dz}{dt} \cos \omega t - \frac{dx}{dt} \sin \omega t - \omega(x \cos \omega t + z \sin \omega t) \right] \cos \omega t + \\ &+ \left[ \frac{dx}{dt} \cos \omega t + \frac{dz}{dt} \sin \omega t + \omega(z \cos \omega t - x \sin \omega t) \right] \sin \omega t = \frac{dz}{dt} - \omega x. \end{aligned}$$

Перепроєціюючи проекції прискорення, знайдемо його проекції на рухомі осі:

$$\begin{aligned} w_x &= w_{\xi} \cos \omega t - w_{\zeta} \sin \omega t = \\ &= \left[ \frac{d^2x}{dt^2} \cos \omega t + \frac{d^2z}{dt^2} \sin \omega t + 2\omega\left(\frac{dz}{dt} \cos \omega t - \frac{dx}{dt} \sin \omega t\right) - \omega^2(x \cos \omega t + z \sin \omega t) \right] \cos \omega t - \\ &- \left[ \frac{d^2z}{dt^2} \cos \omega t - \frac{d^2x}{dt^2} \sin \omega t - 2\omega\left(\frac{dx}{dt} \cos \omega t + \frac{dz}{dt} \sin \omega t\right) - \omega^2(z \cos \omega t - x \sin \omega t) \right] \sin \omega t = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega \frac{dz}{dt} - \omega^2 x; \\
w_y &= \frac{d^2y}{dt^2}; \\
w_z &= w_\zeta \cos \omega t + w_\xi \sin \omega t = \\
&= \left[ \frac{d^2z}{dt^2} \cos \omega t - \frac{d^2x}{dt^2} \sin \omega t - 2\omega \left( \frac{dx}{dt} \cos \omega t + \frac{dz}{dt} \sin \omega t \right) - \omega^2 (z \cos \omega t - x \sin \omega t) \right] \cos \omega t - \\
&- \left[ \frac{d^2x}{dt^2} \cos \omega t + \frac{d^2z}{dt^2} \sin \omega t + 2\omega \left( \frac{dz}{dt} \cos \omega t - \frac{dx}{dt} \sin \omega t \right) - \omega^2 (x \cos \omega t + z \sin \omega t) \right] \sin \omega t = \\
&= \frac{d^2z}{dt^2} - 2\omega \frac{dx}{dt} - \omega^2 z.
\end{aligned}$$

Ті самі проекції знаходяться значно простіше, якщо застосувати правило диференціювання вектора. Дійсно, застосовуючи (2.2) до радіуса-вектора, матимемо

$$\begin{cases}
V_x = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_x = \frac{dx}{dt} + \omega_y^P z - \omega_z^P y = \frac{dx}{dt} + \omega z \\
V_y = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_y = \frac{dy}{dt} + \omega_z^P x - \omega_x^P z = \frac{dy}{dt} \\
V_z = \left( \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right)_z = \frac{dz}{dt} + \omega_x^P y - \omega_y^P x = \frac{dz}{dt} - \omega x
\end{cases}$$

Тепер можна, застосовуючи ті самі формули до вектора швидкості, отримаємо

$$\begin{cases}
w_x = \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_x = \frac{dV_x}{dt} + \omega_y^P V_z - \omega_z^P V_y = \frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega \frac{dz}{dt} - \omega^2 x \\
w_y = \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_y = \frac{d^2V_y}{dt^2} + \omega_z^P V_x - \omega_x^P V_z = \frac{d^2y}{dt^2} \\
w_z = \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_z = \frac{d^2V_z}{dt^2} + \omega_x^P V_y - \omega_y^P V_x = \frac{d^2z}{dt^2} - 2\omega \frac{dx}{dt} - \omega^2 z
\end{cases}$$

### 2.3.3. Визначення гіроскопічного моменту

У відповідності до визначення (2.17) гіроскопічного моменту сил слід попередньо встановити величини і напрямки векторів кінетичного моменту обертового тіла і кутової швидкості обертання цього кінетичного моменту у просторі.

Щоб визначити додаткову силу притискання у підшипниках потрібно поділити величину знайденого гіроскопічного моменту на відстань між підшипниками.

### 2.3.4. Визначення параметрів нутації

При розв'язуванні задач на визначення параметрів нутації потрібно перш за все дати собі раду, який саме з двох причин виникнення нутаційних коливань має місце:

дія на гіроскоп обертового силового імпульсу;

– дія на гіроскоп обертового силового імпульсу;

– дія на гіроскоп раптово прикладеного постійного моменту сил.

В залежності від цього обираються відповідні формули для розрахунку параметрів руху.

### 3. Поводження гіроскопічних чутливих елементів

#### 3.1. Теоретичні відомості

##### 3.1.1. Частоти власних коливань

Частота власних коливань симетричного зрівноваженого гіроскопа (частота нутації) визначається виразом

$$\lambda = \frac{H}{J_e}, \quad (3.1)$$

де  $H = J\Omega$  – власний кінетичний момент гіроскопа;  $J_e$  – екваторіальний момент інерції;  $J$  – осьовий момент інерції;  $\Omega$  – кутова швидкість власного обертання гіроскопа.

Гіромаятник має дві частоти власних коливань – меншу, яку наближено можна визначити формулою

$$\omega_{01} = \frac{mg_{pl}l}{H}; \quad (3.2)$$

– більшу, що наближено визначається виразом

$$\omega_{02} = \frac{H}{J'_e}, \quad (3.3)$$

де  $m$  – маса гіромаятника;  $g_{pl}$  – прискорення сили тяжіння на поверхні планети, на якій встановлено гіромаятник;  $l$  – зміщення центру мас гіромаятника відносно точки його підвісу вздовж головної осі гіроскопа;  $J'_e = J_e + ml^2$  – екваторіальний момент інерції гіромаятника відносно точки його підвісу;  $J_e$  – центральний екваторіальний момент інерції гіромаятника (відносно його центра мас).

Частота нутаційних коливань гіроскопа у кардановому підвісі дорівнює

$$\lambda = \frac{H \cos \beta^*}{\sqrt{AJ_3}}, \quad (3.4)$$

де  $A = J_1 + J_2 \cos^2 \beta^*$ ;

$$J_1 = J_{2X} + J_{1Z}; \quad J_2 = J_{1X} + J_{1Y} - J_e; \quad J_3 = J_{1Y} + J_e;$$

$J_{2X}$  – момент інерції зовнішньої рамки відносно зовнішньої осі карданового підвісу;

$J_{1Y}$  – момент інерції внутрішньої рамки відносно внутрішньої осі карданового підвісу;

$J_{1Z}$  – момент інерції внутрішньої рамки відносно головної осі гіроскопа;

$J_{1X}$  – момент інерції внутрішньої рамки відносно осі, перпендикулярної як головній осі гіроскопа, так і внутрішній осі підвісу;  $\beta^*$  – середнє за період нутаційних коливань значення кута  $\beta$  відхилення головної осі гіроскопа від перпендикуляра до площини зовнішньої рамки карданового підвісу.

Частота власних коливань двоступеневого гіроскопа

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{H \cdot u \cdot \cos \varepsilon}{J_1}}, \quad (3.5)$$

де  $J_1$  – момент інерції двоступеневого гіроскопа відносно його вимірювальної осі;  $u$  – кутова швидкість обертання основи, на якій встановлено двоступеневий гіроскоп, в інер-

ціальному просторі;  $\varepsilon$  – кут між вектором  $\mathbf{u}$  і площиною, перпендикулярною вимірювальної осі.

*Частота власних коливань гіротахометра*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J_1}}, \quad (3.6)$$

де  $c$  – кутова жорсткість пружної в'язі рухомої частини гіротахометра з його корпусом навколо вимірювальної осі.

*Частота власних коливань двоступеневого гірокомпаса*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{H \cdot \omega_{pl} \cdot \cos \varphi}{J_1}}, \quad (3.7)$$

де  $\omega_{pl}$  – частота власного обертання планети, на поверхні якої встановлено двоступеневого гірокомпаса;  $\varphi$  – географічна широта місця встановлення гірокомпаса.

*Частота власних коливань маятникового гірокомпаса*

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{m \cdot g_{pl} \cdot l \cdot \omega_{pl} \cdot \cos \varphi}{H}}, \quad (3.8)$$

де  $l$  – зміщення центра мас гірокомпаса відносно точки його підвісу;  $g_{pl}$  – прискорення сили тяжіння на поверхні планети, на якій встановлено гірокомпас.

### 3.1.2. Параметри руху чутливих елементів

*Дрейф Магнуса* – стала складова повороту вільного гіроскопа у кардановому підвісі навколо зовнішньої осі підвісу, яка спостерігається за його нутаційних коливань – визначається співвідношенням

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -\frac{J_1 \operatorname{tg} \beta^*}{2H \cos \beta^*} a^2, \quad (3.9)$$

де  $a$  – амплітуда нутаційних коливань з кутової швидкості повороту гіроскопа навколо зовнішньої осі карданового підвісу.

*Дрейф гіроскопа в кардановому підвісі через динамічну незбалансованість ротора*

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -\Omega \varepsilon^2 \frac{J_1 (J - J_e)^2 (J_3 + J)^2 \sin \beta^*}{2J (AJ_3 - J^2 \cos^2 \beta^*)^2}, \quad (3.10)$$

де  $\varepsilon$  – кут, який складає вісь фігури ротора з головною віссю гіроскопа (віссю власного обертання);  $\Omega$  – кутова швидкість власного обертання ротора гіроскопа.

*Дрейф гіроскопа у кардановому підвісі через момент пружного дисбалансу:*

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -\frac{(c_X - c_Z)}{2H} x_m z_m, \quad (3.11)$$

де  $c_X$  і  $c_Z$  – жорсткості пружних в'язей у напрямку осей  $X$  і  $Z$  відповідно;  $x_m$  і  $z_m$  – амплітуди відносних переміщень елементів карданового підвісу у цих напрямках, викликаних вібрацією основи.

За умови, що частота власних пружних коливань гіроскопа набагато більша за частоту вібрації з рівнянь поступального руху основи вздовж осей  $X$  і  $Y$ , амплітуди переміщень пов'язані з амплітудами прискорень основи  $w_{Xm}$  і  $w_{Zm}$  вздовж цих осей наближеними співвідношеннями



$$x_m \approx \frac{m}{c_X} w_{Xm} = \frac{mg}{c_X} n_{Xm}; \quad z_m \approx \frac{m}{c_Z} w_{Zm} = \frac{mg}{c_Z} n_{Zm},$$

де  $n_{Xm} = \frac{w_{Xm}}{g}$ ,  $n_{Zm} = \frac{w_{Zm}}{g}$  – амплітуди перевантажень основи у відповідних напрямках;

$g$  – прискорення сили гравітації на Землі. Отже, з формули (3.11) випливає

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -\frac{(mg)^2}{2H} \frac{c_X - c_Z}{c_X c_Z} n_{Xm} n_{Zm}. \quad (3.12)$$

*Похибка гіротахометра внаслідок кутової вібрації основи з амплітудою кутової швидкості  $u_m$  навколо осі, напрямленої під  $45^\circ$  до головної осі гіроскопа у площині, перпендикулярній вимірювальній осі гіротахометра*

$$\langle \Delta u \rangle \approx \frac{H u_m^2}{2c}, \quad (3.13)$$

де  $c$  – кутова жорсткість пружної в'язі навколо вимірювальної осі.

*Віражна похибка гіроскопа напрямку* обумовлена азимутальним дрейфом головної осі, який визначається виразом

$$\langle \dot{\alpha}^o \rangle = -\frac{\omega_g \varepsilon^2}{2(\omega_g^2 + \varepsilon^2)} \Phi_0^2. \quad (3.14)$$

Тут позначено:  $\omega_g$  – кутова швидкість віражу літака;  $\Phi_0$  – кут крена, з яким літак здійснює віраж;  $\varepsilon$  – питома швидкість системи пропорційної міжрамкової горизонтальної корекції гіроскопа напрямку (момент корекції визначається залежністю  $N_k = -k \cdot \beta$ ):

$$\varepsilon = \frac{k}{H}. \quad (3.15)$$

*Швидкісна похибка гірокомпаса*

$$\beta^* = -\frac{V_N}{R_{pl} \omega_{pl} \cos \varphi_g}, \quad (3.16)$$

де  $V_N$  – північна складова швидкості переміщення основи по поверхні планети, радіус якої дорівнює  $R_{pl}$ ;  $\omega_{pl}$  – кутова швидкість власного обертання планети, на якій встановлено гірокомпас;  $\varphi_g$  – кут географічної широти місця гірокомпаса.

*Похибка гірокомпаса через вертикальний момент сил*

$$\beta^* = \frac{M}{H \omega_{pl} \cos \varphi_g}, \quad (3.17)$$

де  $M$  – постійний вертикально напрямлений момент сил, що діє на гірокомпас.

Похибка двоступеневого гірокомпаса через кутову вібрацію (хитавицю) основи наближено визначається співвідношенням

$$\langle \beta \rangle = -\frac{H \Phi_{Em} \Phi_{Nm}}{2J_1 \omega_{pl} \cos \varphi_g}, \quad (3.18)$$

де  $\Phi_{Em}$  і  $\Phi_{Nm}$  – амплітуди хитавиці основи відповідно навколо осі захід-схід та осі північ-південь;  $J_1$  – момент інерції гірокомпаса відносно вимірювальної осі.

Швидкісні похибки гіромаятника – це відхилення усталеного положення головної осі гіромаятника від вертикалі місця:

– на схід

$$\alpha^* \approx -\frac{HV_N}{mg_{pl}lR_{pl}}, \quad (3.19)$$

– на південь

$$\beta^* \approx -\frac{H(V_E + R_{pl}\omega_{pl}\cos\varphi_g)}{mg_{pl}lR_{pl}}, \quad (3.20)$$

де  $V_N$  і  $V_E$  – північна та східна складові швидкості переміщення основи по поверхні планети;  $g_{pl}$ ,  $R_{pl}$  і  $\omega_{pl}$  – відповідно прискорення сили тяжіння, радіус поверхні та кутова швидкість власного обертання планети, на якій встановлено гіромаятник;  $\varphi_g$  – географічна широта місця розташування гіромаятника.

Частота Шюлера

$$\omega_{Sh} = \sqrt{\frac{g_{pl}}{R_{pl}}} = 2\sqrt{\frac{\gamma \cdot \rho_{pl}}{3}}, \quad (3.21)$$

де  $g_{pl}$  – прискорення сили тяжіння на поверхні планети, де розміщено гіроприлад;  $R_{pl}$  – радіус поверхні планети;  $\rho_{pl}$  – середня густина планети;  $\gamma$  – гравітаційна стала. Інтеркардинальна похибка маятникового гірокомпаса – стала складова відхилення головної осі маятникового гірокомпаса від напрямку на північ при поступальній вібрації точки його підвісу

$$\langle \alpha \rangle = -\frac{mg_{pl}l}{4H\omega_{pl}\cos\varphi_g} n_m^2 \sin 2K = -\frac{mg_{pl}l}{4H\omega_{pl}\cos\varphi_g} \left( \frac{h\varphi_m\omega^2}{g} \right)^2 \sin 2K, \quad (3.22)$$

де  $K$  – курс судна;  $n_m$  – амплітуда перевантаження точки підвісу гірокомпаса;  $h$  – відстань точки підвісу гіромаятника від осі хитань корпусу судна;  $\varphi_m$  і  $\omega$  – амплітуда і частота бортової хитами судна.

## 3.2. Завдання

### 3.2.1. Визначення частот власних коливань

**Задача 3.1.** В основу гіромаятника покладено ротор, осьовий момент інерції якого  $J$ , центральний екваторіальний момент інерції  $J_e$ . Ротор обертається з кутовою швидкістю  $n$  обертів за хвилину і підвішений так, що його центр мас зміщений відносно точки підвісу уздовж головної осі гіроскопа на відстань  $l$ . Вага гіроскопа  $P$ .

Розрахувати частоти власних коливань гіромаятника. Дані наведені у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Варіант	Планета	$J$ , $10^{-4}$ Н м с <sup>2</sup>	$J_e$ , $10^{-4}$ Н м с <sup>2</sup>	$P$ , Н	$n$ , об / хв	$l$ , см
1	Земля	5	4	5	30 000	2
2	Місяць	5	4	5	30 000	2
3	Марс	5	4	5	30 000	2
4	Земля	4	3	2	60 000	1
5	Місяць	4	3	2,5	30 000	0,5
6	Марс	4	3	3	20 000	5
7	Земля	5	3	4	40 000	1
8	Місяць	5	3	4	20 000	0,5
9	Марс	5	3	4	10 000	0,5

**Задача 3.2.** Відстань центра мас гіромаятника (дзиги) від точки його опори така, що  $ml^2 = J_e$  ( $m$  – маса дзиги,  $J_e$  – її екваторіальний момент інерції відносно центру мас). Як зміняться частоти власних коливань дзиги, якщо відстань центру мас від точки опори

- 1) зменшити у 2 рази?
- 2) зменшити у 3 рази?
- 3) збільшити у 2 рази?
- 4) збільшити у 2 рази?
- 5) зменшити у 1,5 рази?
- 6) зменшити у 4 рази?
- 7) збільшити у 7 разів?
- 8) збільшити у 4 рази?
- 9) збільшити у 5 разів?

**Задача 3.3.** Як зміняться частоти власних коливань гіромаятника, якщо кутову швидкість його власного обертання зменшити у 2 рази? Навести загальну формулу визначення частот власних коливань гіромаятника і дати коротке пояснення.

**Задача 3.4.** Гіротахометр, вироблений на Землі, перенесений на Місяць. Як зміниться період його власних коливань?

**Задача 3.5.** Як зміняться частоти власних коливань гіромаятника, якщо його установити на Місяці?

**Задача 3.6.** Як зміниться період незбурюваності гірокомпасів (період Шюлера), що використовуються на Місяці, у порівнянні з тими, що встановлюються на Землі?

**Задача 3.7.** Маятниковий гірокомпас, вироблений на Землі, перенесений на Місяць. Як зміниться період його власних коливань?

**Задача 3.8.** Двоступеневий гірокомпас, зроблений для роботи на Землі, перенесений на Місяць. Як зміниться період його власних коливань?

### 3.2.2. Визначення параметрів руху чутливих елементів

**Задача 3.9.** Розрахувати максимальну швидкість дрейфу триступеневого гіроскопа у кардановому підвісі під дією моменту сил пружного небалансу. Осьовий момент інерції ротора гіроскопа –  $J$ . Ротор обертається з кутовою швидкістю  $n$  обертів за хвилину. Маса рухомої частини приладу –  $m$ . Жорсткості пружної в'язі в напрямку осей  $X$  і  $Z$  – відповідно  $c_X$  і  $c_Z$ . Демпфіруванням нехтувати. Частота вібрації основи набагато менша за частоти власних пружних коливань карданова підвісу. Амплітуда перевантаження  $n_m$ .

Дані наведені у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

	Планета	$J$ , $10^{-4}$ Н м с <sup>2</sup>	$m$ , кг	$n$ , об / хв	$c_X$ , $10^7$ Н / м	$c_Z$ , $10^7$ Н / м	
1	Земля	5	0,4	30 000	20	2	
2	Місяць	5	0,4	30 000	10	2	
3	Марс	5	0,4	30 000	2	20	
4	Земля	4	0,3	60 000	10	1	
5	Місяць	4	0,3	30 000	1	15	
6	Марс	4	0,3	20 000	4	40	
7	Земля	5	0,5	40 000	15	1	
8	Місяць	5	0,5	20 000	10	0,5	
9	Марс	5	0,5	10 000	0,5	10	

**Задача 3.10.** Обчислити максимальне значення швидкісної похибки гірокомпаса при швидкості корабля 60 кілометрів на годину на широті  $\varphi = 60^\circ$ .

**Задача 3.11.** Як зміниться швидкісна похибка гіромаятника, встановленого на нерухомій основі на екваторі Землі, якщо його перенести на Місяць (теж на його екватор)?

**Задача 3.12.** Як зміниться швидкісна похибка гіромаятника, встановленого на екваторі Землі на основі, яка рухається точно на Північ з досить великою швидкістю, у тих же умовах на Місяці?

**Задача 3.13.** Як зміниться похибка астатичного триступеневого гіроскопа у кардановому підвісі внаслідок дії моменту пружного дисбалансу, якщо кутову швидкість його власного обертання зменшити у 2 рази?

**Задача 3.14.** Обчислити максимальне значення швидкісної похибки гірокомпаса при швидкості корабля 60 кілометрів на годину на широті  $\varphi = 60^\circ$ .

**Задача 3.15.** Гірокомпас встановлений на основі, яка рухається точно на Північ. Як зміниться швидкісна похибка гірокомпаса, якщо його встановити на Місяці?

**Задача 3.16.** Двоступеневий гірокомпас, створений для роботи на Землі, перенесений на Місяць. Як зміниться його похибка через кутову вібрацію основи у порівнянні з такою на Землі?

**Задача 3.17.** Гіромаятник, створений для роботи на Землі, перенесений на Місяць. Як зміниться його похибка через сухе тертя по осях чутливості?

**Задача 3.18.** Як зміниться похибка двоступеневого гірокомпаса внаслідок дії постійного вертикального моменту сил, якщо його перемістити на Місяць?

**Задача 3.19\*.** Як зміниться поведінка симетричного зрівноваженого гіроскопа після удару, якщо ширину його ротора зменшити у два рази? Вважати ротор тонким об'ємом.

**Задача 3.20\*.** Як зміниться поведінка гіроскопа у кардановому підвісі після удару (до удару рамки підвісу є взаємно перпендикулярними) навколо внутрішньої рамки порівняно з аналогічним ударом навколо зовнішньої осі?

## **Додаток. Параметри планет**

Гравітаційна стала  $\gamma = 6,6738 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$

### **Параметри планет земної групи**

Параметр	Планета				
	Меркурій	Венера	Земля	Місяць	Марс
Радіус поверхні, км	2440	6052	6378	1737	3397
Середня густина, $\text{кг/м}^3$	5430	5240	5515	3340	3940
Маса, $10^{24}$ кг	0,33	4,869	5,9742	0,0735	0,642
Прискорення гравітації, $\text{м/с}^2$	3,726	8,826	9,8062	1,667	3,726
Період власного обертання, діб ( $10^4$ с)	58,6462 (506,7)	243,0185 (2100)	0,99726963 (8,6164)	27,321661 (236,06)	1,02595675 (8,8643)
Радіус орбіти, $10^8$ км	0,5791	1,08	1,4946	0,003844	2,28
Період обігу орбіти, діб ( $10^7$ с)	87,969 (0,76)	224,7 (1,9414)	365,26 (3,1558)	27,396 (0,23606)	686,94 (5,9352)

### **Параметри планет-гігантів**

Параметр	Юпітер	Сатурн	Уран	Нептун
	Радіус поверхні, км	71 492	60 268	25 559
Середня густина, $\text{кг/м}^3$	1 330	769	1 300	1 700
Маса, $10^{24}$ кг	1898,8	568,5	86,63	102,8
Прискорення гравітації, $\text{м/с}^2$	24,81	10,4	8,83	11,18
Період власного обертання, діб ( $10^4$ с)	0,41354 (3,573)	0,44401 (3,836)	0,71833 (6,206)	0,67125 (5,8)
Радіус орбіти, $10^8$ км	7,786	14,34	28,7	44,9
Період обігу орбіти, діб ( $10^7$ с)	4 334,6 (37,451)	10 835,3 (93,617)	30 697,8 (265,23)	60 079 (519,08)