

Ю. Ф. Л а з а р е в

КІНЕМАТИКА. Додатки

Навчально- довідковий матеріал

Зміст

ДОДАТОК 1. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ І МАТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ	2
Д1.1. Основи векторної алгебри	2
Д1.2. Форми подання векторів	3
Д1.2.1. Координатна форма подання вектора	4
Д1.2.2. Деякі положення алгебри матриць	5
Д1.2.3. Матричне подання векторів	8
Д1.2.4. Векторно-координатна форма подання вектора	8
Д1.3. Операції над векторами у різних формах подання	9
ДОДАТОК 2. ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ ТІЛА У ПРОСТОРІ, МАТРИЦЯ НАПРЯМНИХ КОСИНУСІВ, КУТИ ЕЙЛЕРА.....	13
Д2.1. Матриця напрямних косинусів	13
Д2.2. Кути Ейлера-Крилова	17
Д2.3. Подання МНК через кути Ейлера-Крилова	19
ДОДАТОК 3. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПОДАННЯ ПОВОРОТІВ ТІЛА У ПРОСТОРІ.....	23
Д3.1. Теорема Ейлера	25
Д3.2. Вектор повороту Гіббса	26
Д3.3. Початкові відомості про кватерніони	28
Д3.4. Подання поворотів за допомогою кватерніонів	31
ДОДАТОК 4. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПОДАННЯ КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ ТІЛА У ПРОСТОРІ.....	36
Д4.1. Правило диференціювання вектора у рухомій системі відліку	36
Д4.2. Кінематичне рівняння Пуассона	37
Д4.3. Кінематичні рівняння Ейлера	38
Д4.4. Кінематичні рівняння у кватерніонах	39
Д4.5. Кінематичні рівняння орієнтації штучного супутника Землі	41
ДОДАТОК 5. КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА.....	43
Д5.1. Швидкість точки тіла, яке рухається	43
Д5.2. Швидкість полюса	44
Д5.3. Прискорення точок твердого тіла	45
Д5.4. Складний рух матеріальної точки	46
Д5.4.1. Абсолютна швидкість точки	47
Д5.4.2. Абсолютне прискорення точки	47
Д5.5. Складний рух твердого тіла	48
Д5.6. Швидкості й прискорення точок твердого тіла у складеному його русі	49

ДОДАТОК 1. Елементи векторної і матричної алгебри

Д1.1. Основи векторної алгебри

Основні закони механіки формулюються у векторній формі. Необхідною умовою переведення їх у скалярну форму є вміння вільно користуватися апаратом векторної й матричної алгебри.

Вектором \mathbf{a} називатимемо деякий об'єкт, що характеризується числом (яке називається довжиною вектора \mathbf{a} , або його модулем) і напрямком у просторі.

Сумою двох векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} називається третій вектор \mathbf{c} , початок якого збігається з початком першого вектора, а кінець - із кінцем другого вектора за умови, що початок другого вектора суміщено з кінцем першого (правило трикутника або правило паралелограма):

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}. \quad (\text{Д1.1})$$

Скалярний добуток двох векторів є скаляром, величина якого визначається як добуток модулів (довжин) векторів-множників на косинус кута φ між додатними напрямками векторів:

$$d = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi = b \cdot \text{Пр}_b \mathbf{a} = a \cdot \text{Пр}_a \mathbf{b}, \quad (\text{Д1.2})$$

де $\text{Пр}_b \mathbf{a}$ означає величину прямокутної проекції вектора \mathbf{a} на напрямок вектора \mathbf{b} :

$$\text{Пр}_b \mathbf{a} = a \cdot \cos \varphi.$$

Наслідок 1. Якщо один із векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} є одиничним, їхній скалярний добуток дорівнює величині проекції іншого вектора на напрямок одиничного.

Наслідок 2. Якщо обидва вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} є одиничними, їхній скалярний добуток дорівнює косинусові кута між напрямками цих векторів.

Наслідок 3. Якщо вектори паралельні, їхній скалярний добуток дорівнює добутку довжин цих векторів.

Наслідок 4. Скалярний добуток вектора на себе дорівнює квадратові його довжини:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2.$$

Наслідок 5. Скалярний добуток ортогональних векторів дорівнює нулеві.

Векторний добуток двох векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} визначається як вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, що є перпендикулярним до площини, що містить ці вектори-співмножники, спрямований у бік, із якого найкоротший поворот від першого вектора \mathbf{a} до другого \mathbf{b} ввижається здійснюваним проти годинникової стрілки, і рівний площі паралелограма, побудованого на векторах-співмножниках як на сторонах

$$c = a \cdot b \cdot \sin \varphi. \quad (\text{Д1.3})$$

Як впливає з визначення, якщо вектори-співмножники поміняти місцями у векторному добутку, то зміниться лише напрямок вектора \mathbf{c} на протилежний, а величина його залишиться тою самою. Цю властивість векторного добутку називають його антикомутативністю.

Наслідок 6. Векторний добуток паралельних векторів дорівнює нулю.

Наслідок 7. Векторний добуток вектора на себе дорівнює нулю.

Наслідок 8. Довжина вектора, що є векторним добутком двох ортогональних векторів, дорівнює добутку довжин векторів-співмножників.

Векторно-скалярний добуток трьох векторів \mathbf{a} , \mathbf{b} та \mathbf{c} є скаляром, що чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах-співмножниках, як на сторонах.

Векторно-скалярний добуток припускає циклічне переставляння:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \quad (Д1.4)$$

Останні три рівності випливають із комутативності скалярного добутку. Із запису (4) випливає, що для векторно-скалярного добутку не має значення, між якими із сусідніх векторів ставити знак векторного добутку, а тому цей знак узагалі не ставлять, і записують векторно-скалярний добуток без усяких знаків у такий спосіб: \mathbf{abc} (або \mathbf{bca} , або \mathbf{cab} , що є еквівалентним записом).

Якщо у зазначених комбінаціях поміняти місцями два сусідніх вектори, одержаний результат змінить свій знак на протилежний:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba}. \quad (Д1.5)$$

Наслідок 9. Якщо два із трьох векторів паралельні, то їхній векторно-скалярний добуток дорівнює нулю. Зокрема, якщо серед трьох векторів двічі зустрічається той самий, їхній векторно-скалярний добуток дорівнює нулю.

Наслідок 10. Векторно-скалярний добуток трьох взаємноортогональних векторів дорівнює добутку довжин усіх трьох векторів.

Подвійний векторний добуток $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ є вектором, що лежить у площині векторів \mathbf{b} і \mathbf{c} , що перемножуються першими, і тому припускає розкладання по напрямках цих векторів, як складових:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (Д1.6)$$

Формула (6) часто використовується у механіці твердого тіла й теорії гіроскопів. З метою полегшення її запам'ятовування її називають "бац мінус цаб".

Примітки.

1. Подвійний векторний добуток не має навіть властивості асоціативності. Дійсно, розглянемо співвідношення (6) за умови, що спочатку перемножуються вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}).$$

Як бачимо, змінилася навіть площина результуючого вектора (раніше це була площина векторів \mathbf{b} і \mathbf{c} , а тепер - площина векторів \mathbf{a} і \mathbf{b}).

2. У випадку, коли у подвійному векторному добутку зустрічаються два однакових вектори, одержимо:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}^2. \quad (Д1.7)$$

Д1.2. Форми подання векторів

Вектори й результати операцій над ними можуть бути подані у кількох математичних формах. Одна з них, яку щойно було застосовано, називається векторною і є найбільш узагальненою, бо не залежить від вибору координатного базису.

Існують і інші форми подання векторів. Усі вони потребують попереднього обрання деякого координатного базису (системи відліку). Серед них розрізняватимемо форми: а) координатну, б) векторно-координатну і в) матричну.

У подальшому як базисну систему відліку завжди використовуватимемо прямокутну декартову систему (рис. Д1.1).

Д1.2.1. Координатна форма подання вектора

Координатна форма подання вектора - це завдання трійки чисел, що характеризують довжини проєкцій цього вектора на осі базисної системи відліку:

$$\mathbf{a} \{a_\xi, a_\eta, a_\zeta\}.$$

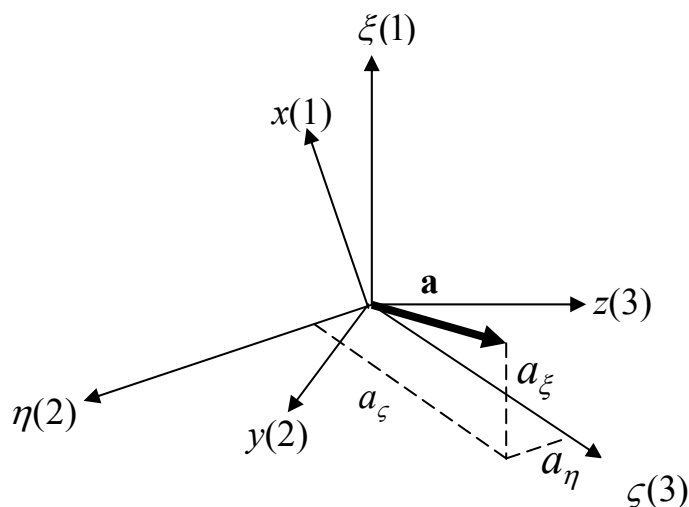


Рис. Д1.1. Координатне подання вектора

У подальшому, задля більшої зручності подання формул переходу від однієї системи відліку до іншої, умовимося позначати першу з координатних осей (x або ξ на рис. 1) цифрою 1, другу (y, η) - цифрою 2, а третю (z, ζ) - цифрою 3. Сам координатний базис (систему відліку) позначатимемо однією великою літерою латинського алфавіту. Наприклад, позначимо через P систему осей xyz , а через S - систему $\xi\eta\zeta$. Тоді осі ξ, η і ζ одержать найменування $1_s, 2_s$ та 3_s , а осі x, y і z - $1_p, 2_p$ та 3_p відповідно. З врахуванням цих позначень координатна форма подання вектора \mathbf{a} у системі $\xi\eta\zeta$ набирає вигляду

$$\mathbf{a} \{a_{1s}, a_{2s}, a_{3s}\}, \quad (Д1.8)$$

а в системі xyz

$$\mathbf{a} \{a_{1p}, a_{2p}, a_{3p}\}, \quad (Д1.9)$$

Величини a_{1p}, a_{2p} і a_{3p} визначаються як проєкції вектора \mathbf{a} відповідно на осі $1_p, 2_p$ та 3_p :

$$a_{ip} = a \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{I}_p). \quad (Д1.10)$$

Рівність (10) є узагальненою формою запису усіх трьох проєкцій вектора \mathbf{a} на осі довільно обраної системи відліку, причому індекс i є номером осі системи координат P , а $\mathbf{I}_p = \mathbf{1}_p, \mathbf{2}_p, \mathbf{3}_p$ - позначення одиничних векторів системи P (ортів координатного базису).

Застосовуючи до ортів координатної системи операції скалярного й векторного добутків, запишемо таблицю цих добутків (вектори, що записані у лівій колонці є першими співмножниками, а ті, що записані зверху, - другими співмножниками):

Скалярні добутки ортів

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & \mathbf{1}_P & \mathbf{2}_P & \mathbf{3}_P \\ \hline \mathbf{1}_P & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2}_P & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{3}_P & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (\text{Д1.11})$$

Векторні добутки ортів

$$\begin{array}{c|ccc} \times & \mathbf{1}_P & \mathbf{2}_P & \mathbf{3}_P \\ \hline \mathbf{1}_P & 0 & \mathbf{3}_P & -\mathbf{2}_P \\ \mathbf{2}_P & -\mathbf{3}_P & 0 & \mathbf{1}_P \\ \mathbf{3}_P & \mathbf{2}_P & -\mathbf{1}_P & 0 \end{array} \quad (\text{Д1.12})$$

Д1.2.2. Деякі положення алгебри матриць

Матрицею розміром ($m \times n$) називається прямокутна таблиця, що містить m рядків і n стовпців, елементами якої є дійсні або комплексні числа і яка має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \|a_{ij}\|. \quad (\text{Д1.13})$$

Якщо $m=n$, матриця називається квадратною.

При $m=1$ матриця перетворюється у рядок:

$$A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n], \quad (\text{Д1.14})$$

а при $n=1$ матриця перетворюється у стовпець:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}. \quad (\text{Д1.15})$$

Сумою матриць A і B однакового розміру ($m \times n$) називають матрицю C того самого розміру, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць-складових:

$$\begin{aligned} C = A + B &= \|c_{ij}\| = \\ &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} = \|a_{ij} + b_{ij}\|, \end{aligned} \quad (\text{Д1.16})$$

тобто елементи матриці-суми визначаються за формулою:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Добутком двох матриць A і B розміром відповідно $(m \cdot n)$ і $(n \cdot r)$, тобто таких, що кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої (n), є матриця C розміром $(m \cdot r)$, елементи якої визначаються співвідношенням:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}; \quad (i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, r). \quad (Д1.17)$$

На рис. Д1.2 показано схему обчислення елемента c_{ik} матриці C.

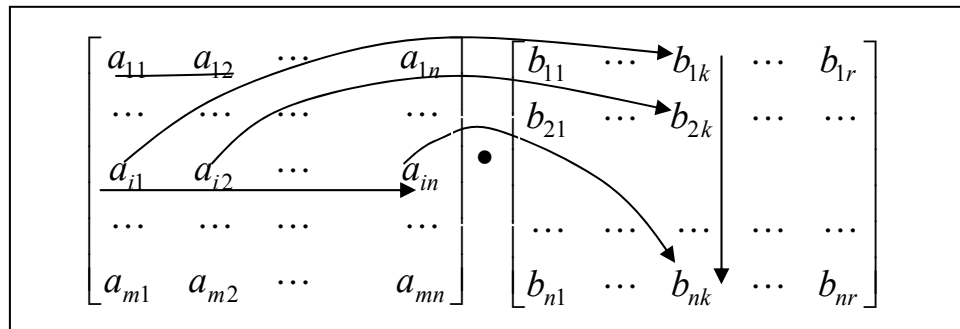


Рис. Д1.2. Схема обчислення елемента добутку матриць

Зазначимо, що задля забезпечення можливості виконання операції множення розміри матриць мають бути узгоджені між собою у тому відношенні, що кількість стовпців першої матриці-множника має дорівнювати кількості рядків другої матриці.

Приклад 1. Добуток матриці-рядка на матрицю-стовпець дорівнює матриці розміром $(1 \cdot 1)$, тобто числу:

$$[a_1; a_2; \dots a_r] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_r \end{bmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_r \cdot b_r. \quad (Д1.18)$$

Приклад 2. Добуток матриці-стовпця на матрицю-рядок дорівнює квадратній матриці розміром $(r \cdot r)$, де r - довжина матриці-стовпця й матриці-рядка. Такий добуток називають діадою:

$$diad(A, B) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_r \end{bmatrix} \cdot [b_1; b_2; \dots b_r] = \begin{bmatrix} a_1 b_1; & a_1 b_2; & \dots & a_1 b_r \\ a_2 b_1; & a_2 b_2; & \dots & a_2 b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r b_1; & a_r b_2; & \dots & a_r b_r \end{bmatrix}. \quad (Д1.19)$$

Діада того самого вектора має вигляд

$$diad(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_r \end{bmatrix} \cdot [a_1; a_2; \dots; a_r] = \begin{bmatrix} a_1^2; & a_1 a_2; & \dots & a_1 a_r \\ a_2 a_1; & a_2^2; & \dots & a_2 a_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r a_1; & a_r a_2; & \dots & a_r^2 \end{bmatrix}. \quad (D1.20)$$

З наведених прикладів стає наочним, що добуток матриць не є комутативним: при переставленні місцями матриць-співмножників у добутку у загальному випадку виходить не лише матриця з іншими елементами, але й з іншими розмірами. Інколи один із добутоків існує, а інший - ні, внаслідок неузгодженості розмірів.

Транспоною по відношенню до заданої матриці A називається матриця $B=A^t$, в якій рядки дорівнюють стовпцям матриці A , а стовпці - рядкам цієї матриці:

$$b_{ij} = a_{ji}; \quad (i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m). \quad (D1.21)$$

Приклад 3. Транспонованим до стовпця є рядок і навпаки.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_r \end{bmatrix}^t = [a_1; \quad a_2; \quad \dots \quad a_r].$$

Одиничною називають квадратну матрицю E , вдовж головної діагоналі якої містяться одиниці, а решта елементів дорівнюють нулю.

Добуток одиничної матриці E зліва на будь-яку матрицю, що має кількість рядків, як у матриці E , і справа на будь-яку матрицю з кількістю стовпців, як у матриці E , дорівнює самій цій матриці:

$$E \cdot A = A; \quad B \cdot E = B. \quad (D1.22)$$

Оберненою по відношенню до заданої матриці називається така матриця, добуток якої на задану дорівнює одиничній матриці:

$$B = A^{-1} \quad \Rightarrow \quad B \cdot A = E. \quad (D1.23)$$

Обернена матриця по відношенню до квадратної матриці A визначається зі співвідношення:

$$A^{-1} = \| \| a_{ij} \| \|^{-1} = \frac{\| \| A_{ji} \| \|}{\det(A)}, \quad (D1.24)$$

де A_{ji} - алгебричне доповнення елемента a_{ji} у визначнику $\det(A)$.

Якщо $\det(A)$ дорівнює нулеві, матриця A називається виродженою. У протилежному випадку - невиродженою.

Для виродженої матриці не існує зворотної.

Слід $Tr(A)$ (від *trace*) матриці A - це сума її діагональних елементів:

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}, \quad (D1.25)$$

де n - кількість діагональних елементів матриці A .

Квадратна матриця C називається **симетричною**, якщо її елементи, розташовані симетрично відносно головної діагоналі, дорівнюють один одному:

$$c_{ij} = c_{ji}; \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (Д1.26)$$

Квадратна матриця K називається **кососиметричною**, якщо її елементи, розташовані симетрично відносно головної діагоналі дорівнюють один одному із протилежним знаком:

$$k_{ij} = -k_{ji}; \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (Д1.27)$$

Будь-яка квадратна матриця A може бути розкладеною на суму симетричної C і кососиметричної K матриць. При цьому елементи цих матриць визначаються, як неважко довести, з співвідношень:

$$\begin{aligned} A &= C + K; \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow C &= (A + A^t) / 2; \quad \Rightarrow c_{ij} = (a_{ij} + a_{ji}) / 2; \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow K &= (A - A^t) / 2; \quad \Rightarrow k_{ij} = (a_{ij} - a_{ji}) / 2. \end{aligned} \quad (Д1.28)$$

Д1.2.3. Матричне подання векторів

У подальшому використовуватимемо дві форми подання вектора \mathbf{a} як матриці:

а) у вигляді матриці-стовпця із проєкцій вектора на осі обраної системи відліку, наприклад:

$$A_P = \begin{bmatrix} a_{1P} \\ a_{2P} \\ a_{3P} \end{bmatrix}, \quad (Д1.29)$$

якщо як базис використовується система відліку P , або

$$A_S = \begin{bmatrix} a_{1S} \\ a_{2S} \\ a_{3S} \end{bmatrix}, \quad (Д1.30)$$

якщо базисом обрано систему S ;

б) у виді кососиметричної матриці вигляду (базис P):

$$(A_P \times) = \begin{bmatrix} 0 & -a_{3P} & a_{2P} \\ a_{3P} & 0 & -a_{1P} \\ -a_{2P} & a_{1P} & 0 \end{bmatrix}. \quad (Д1.31)$$

Аналогічно записується вектор у вигляді кососиметричної матриці у базисі S . Таке подання вектора іноді називають **дуальним**.

Д1.2.4. Векторно-координатна форма подання вектора

Векторно-координатна форма дозволяє поєднати векторну форму подання з координатною. Для цього використовуються вищезазначені позначення ортів координатного базису, наприклад, вектор \mathbf{a} у базисі S подається у вигляді:

$$\mathbf{a} = a_{1S} \cdot \mathbf{1}_S + a_{2S} \cdot \mathbf{2}_S + a_{3S} \cdot \mathbf{3}_S, \quad (Д1.32)$$

а у базисі P

$$\mathbf{a} = a_{1P} \cdot \mathbf{1}_P + a_{2P} \cdot \mathbf{2}_P + a_{3P} \cdot \mathbf{3}_P. \quad (Д1.33)$$

Векторно-координатну форму можна дещо спростити у запису, якщо скористуватися матричним поданням вектора. Задля цього введемо у розгляд

умовну векторну "матрицю-стовпець" \mathbf{O} , елементи якої складають вектори ортів обраної системи відліку:

$$\mathbf{O}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_S \\ \mathbf{2}_S \\ \mathbf{3}_S \end{bmatrix}, \quad \text{або} \quad \mathbf{O}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_P \\ \mathbf{2}_P \\ \mathbf{3}_P \end{bmatrix}. \quad (\text{Д1.34})$$

З врахуванням правил множення матриць, вектор \mathbf{a} можна подати у виді:

$$\mathbf{a} = A_S^t \cdot \mathbf{O}_S = \mathbf{O}_S^t \cdot A_S = A_P^t \cdot \mathbf{O}_P = \mathbf{O}_P^t \cdot A_P, \quad (\text{Д1.35})$$

де A_S і A_P - матриці-стовпці (29) і (30), а індекс t позначає операцію транспонування.

Враховуючи таблиці (11) та (12), запишемо вирази для діад скалярного й векторного добутоків, що утворені з "матриць" \mathbf{O}_P :

$$\mathbf{O}_P \cdot \mathbf{O}_P^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E; \quad \mathbf{O}_P \times \mathbf{O}_P^t = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{3}_P & -\mathbf{2}_P \\ -\mathbf{3}_P & 0 & \mathbf{1}_P \\ \mathbf{2}_P & -\mathbf{1}_P & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{1.36})$$

Д1.3. Операції над векторами у різних формах подання

Напрямними косинусами вектора \mathbf{a} називають косинуси кутів між напрямком цього вектора і додатними напрямками осей обраної координатної системи:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{I}_P) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{I}_P, \quad (\mathbf{I}_P = \mathbf{1}_P, \mathbf{2}_P, \mathbf{3}_P). \quad (\text{Д1.37})$$

Тут \mathbf{e} – позначення одиничного вектора напрямку \mathbf{a} .

Усі визначені раніше дії над векторами при записі їх у координатній формі потребують, щоб попередньо усі вектори, над якими здійснюються операції, були визначені (завдані своїми проєкціями) в одному координатному базисі. Прийmemo за такий базис систему відліку P.

Сумування векторів. Сума векторів $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ у координатній формі відображується у такий спосіб:

$$c_{iP} = a_{iP} + b_{iP}; \quad (i = 1,2,3), \quad (\text{Д1.38})$$

тобто

$$c_{1P} = a_{1P} + b_{1P}; \quad c_{2P} = a_{2P} + b_{2P}; \quad c_{3P} = a_{3P} + b_{3P}.$$

Матрична форма допускає два подання

$$C_P = A_P + B_P; \quad (\text{Д1.39})$$

$$(C_P \times) = (A_P \times) + (B_P \times), \quad (\text{Д1.40})$$

де використані позначення (28).

У векторно-координатній формі сума векторів може бути подана таким чином:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (A_P^t + B_P^t) \cdot \mathbf{O}_P = \mathbf{O}_P^t (A_P + B_P). \quad (\text{Д1.41})$$

Скалярний добуток. Скалярний добуток двох векторів $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ має вигляд:
- у координатній формі

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_{1P} \cdot b_{1P} + a_{2P} \cdot b_{2P} + a_{3P} \cdot b_{3P}; \quad (\text{Д1.42})$$

- у матричній формі можливі два варіанти подання - шляхом множення матриці-рядка одного з векторів на матрицю-стовпець другого вектора і шляхом відшукання сліду діади, яка є результатом множення матриці-стовпця одного з векторів на матрицю-рядок іншого вектора

$$c = A_P^t \cdot B_P = B_P^t \cdot A_P = \text{Tr}(A_P \cdot B_P^t) = \text{Tr}(B_P \cdot A_P^t); \quad (\text{Д1.43})$$

- у векторно-координатній формі, враховуючи (34) і (35)

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = A_P^t \cdot \mathbf{O}_P \cdot \mathbf{O}_P^t \cdot B_P = A_P^t \cdot E \cdot B_P = A_P^t \cdot B_P; \quad (\text{Д1.44})$$

Векторний добуток. Спочатку визначимо векторний добуток у векторно-координатній формі, враховуючи (35) і (36):

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= A_P^t \cdot \mathbf{O}_P \times \mathbf{O}_P^t \cdot B_P = A_P^t \cdot \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{3}_P & -\mathbf{2}_P \\ -\mathbf{3}_P & 0 & \mathbf{1}_P \\ \mathbf{2}_P & -\mathbf{1}_P & 0 \end{bmatrix} \cdot B_P = \\ &= \mathbf{1}_P \cdot (a_{2P} \cdot b_{3P} - a_{3P} \cdot b_{2P}) + \mathbf{2}_P \cdot (a_{3P} \cdot b_{1P} - a_{1P} \cdot b_{3P}) + \\ &+ \mathbf{3}_P \cdot (a_{1P} \cdot b_{2P} - a_{2P} \cdot b_{1P}) = \mathbf{O}_P^t \cdot (A_P \times) \cdot B_P = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{1}_P & \mathbf{2}_P & \mathbf{3}_P \\ a_{1P} & a_{2P} & a_{3P} \\ b_{1P} & b_{2P} & b_{3P} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Д1.45})$$

З цього випливає, що проєкції вектора-добутку двох векторів пов'язані із проєкціями множників у такий спосіб:

$$\begin{aligned} c_{1P} &= a_{2P} \cdot b_{3P} - a_{3P} \cdot b_{2P}; \\ c_{2P} &= a_{3P} \cdot b_{1P} - a_{1P} \cdot b_{3P}; \\ c_{3P} &= a_{1P} \cdot b_{2P} - a_{2P} \cdot b_{1P}. \end{aligned} \quad (\text{Д1.46})$$

Чергування індексів при проєкціях векторів \mathbf{c} , \mathbf{a} і \mathbf{b} визначається правилом циклічного переставляння.

У матричній формі для подання векторного добутку потрібно застосовувати обидві форми подання векторів - перший співмножник потрібно подати у вигляді косиметричної матриці (30), а другий - як матрицю-стовпець (28):

$$C_P = (A_P \times) \cdot B_P = \begin{bmatrix} 0 & -a_{3P} & a_{2P} \\ a_{3P} & 0 & -a_{1P} \\ -a_{2P} & a_{1P} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1P} \\ b_{2P} \\ b_{3P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2P} \cdot b_{3P} - a_{3P} \cdot b_{2P} \\ a_{3P} \cdot b_{1P} - a_{1P} \cdot b_{3P} \\ a_{1P} \cdot b_{2P} - a_{2P} \cdot b_{1P} \end{bmatrix}. \quad (\text{Д1.47})$$

або

$$\begin{aligned} C_P^t &= A_P^t \cdot (B_P \times) = [a_{1P}; a_{2P}; a_{3P}] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -b_{3P} & b_{2P} \\ b_{3P} & 0 & -b_{1P} \\ -b_{2P} & b_{1P} & 0 \end{bmatrix} = \\ &= [a_{2P} \cdot b_{3P} - a_{3P} \cdot b_{2P}; a_{3P} \cdot b_{1P} - a_{1P} \cdot b_{3P}; a_{1P} \cdot b_{2P} - a_{2P} \cdot b_{1P}]. \end{aligned} \quad (\text{Д1.49})$$

Унаслідок властивості антикомутативності векторного добутку можна записати співвідношення:

$$\begin{aligned} (A_P \times) \cdot B_P &= -(B_P \times) \cdot A_P = (B_P^t \times) \cdot A_P; \\ A_P^t \cdot (B_P \times) &= -B_P^t \cdot (A_P \times) = B_P^t \cdot (A_P^t \times). \end{aligned} \quad (\text{Д1.50})$$

Векторно-скалярний добуток. У координатній формі векторно-скалярний добуток трьох векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (див. (4) і (5)) найпростіше подається як визначник квадратної матриці:

$$d = \mathbf{abc} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_{1P} & a_{2P} & a_{3P} \\ b_{1P} & b_{2P} & b_{3P} \\ c_{1P} & c_{2P} & c_{3P} \end{vmatrix}. \quad (\text{Д1.51})$$

Векторно-координатна й матрична форми дають однаковий результат

$$d = \mathbf{abc} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = A_P^t \cdot (B_P \times) \cdot C_P. \quad (\text{Д1.52})$$

Співвідношення (4) дозволяють встановити такі співвідношення між матрицями:

$$\begin{aligned} A_P^t \cdot (B_P \times) \cdot C_P &= A_P^t \cdot (C_P \times)^t \cdot B_P = B_P^t \cdot (A_P \times)^t \cdot C_P = \\ &= B_P^t \cdot (C_P \times) \cdot A_P = C_P^t \cdot (B_P \times)^t \cdot A_P = C_P^t \cdot (A_P \times) \cdot B_P \end{aligned} \quad (\text{Д1.53})$$

Подвійний векторний добуток. Запишемо подвійний векторний добуток у векторно-координатній формі (див. (45)):

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = A_P^t \cdot \mathbf{O}_P \times \mathbf{O}_P^t \cdot (B_P \times) \cdot C_P = \mathbf{O}_P^t \cdot (A_P \times) \cdot (B_P \times) \cdot C_P. \quad (\text{Д1.54})$$

Звідси випливає і матрична форма:

$$D_P = (A_P \times) \cdot (B_P \times) \cdot C_P. \quad (\text{Д1.55})$$

Неважно впевнитися у слушності наступної залежності:

$$(A_P \times) \cdot (B_P \times) = B_P \cdot A_P^t - B_P^t \cdot A_P \cdot E. \quad (\text{Д1.56})$$

З її врахуванням формулу (55) можна переробити у таку:

$$D_P = B_P \cdot (A_P^t \cdot C_P) - (B_P^t \cdot A_P) \cdot C_P, \quad (\text{Д1.57})$$

що, як неважно збагнути, є модифікацією співвідношення (6) у матричному варіанті.

Потрійний векторний добуток. Користуючись співвідношенням (6) потрійний векторний добуток можна подати у виді:

$$\mathbf{d} \times [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = \mathbf{d} \times [\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})] = (\mathbf{d} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{d} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (\text{Д1.58})$$

Якщо деякі з векторів є однаковими, матимемо звідси:

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] = -\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})] = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (\text{Д1.59})$$

а також

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})] = -\mathbf{b} \times [\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]. \quad (\text{Д1.60})$$

У матричній формі цьому відповідають співвідношення

$$\begin{aligned} (A \times) \cdot (B \times) \cdot (A \times) \cdot B &= -(A \times) \cdot (B \times) \cdot (B \times) \cdot A = (B \times) \cdot (A \times) \cdot (A \times) \cdot B = \\ &= (B \times) \cdot A \cdot A^t \cdot B = (B \times) \cdot \text{diad}(A) \cdot B \end{aligned} \quad (\text{Д1.61})$$

Деякі корисні співвідношення.

Квадрат кососиметричної матриці має вигляд:

$$\begin{aligned}
(A_p \times)^2 &= (A_p \times) \cdot (A_p \times) = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -a_{3P} & a_{2P} \\ a_{3P} & 0 & -a_{1P} \\ -a_{2P} & a_{1P} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -a_{3P} & a_{2P} \\ a_{3P} & 0 & -a_{1P} \\ -a_{2P} & a_{1P} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -(a_{2P}^2 + a_{3P}^2) & a_{1P} \cdot a_{2P} & a_{1P} \cdot a_{3P} \\ a_{1P} \cdot a_{2P} & -(a_{1P}^2 + a_{3P}^2) & a_{3P} \cdot a_{2P} \\ a_{1P} \cdot a_{3P} & a_{2P} \cdot a_{3P} & -(a_{1P}^2 + a_{2P}^2) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{Д1.62}$$

Застосуємо (56) для того самого вектора. Матимемо:

$$(A_p \times) \cdot (A_p \times) = A_p \cdot A_p^t - A_p^t \cdot A_p \cdot E, \tag{Д1.63}$$

або

$$diad(A_p) = (A_p \times)^2 + a^2 \cdot E, \tag{Д1.64}$$

де позначено

$$diad(A_p) = A_p \cdot A_p^t = \begin{bmatrix} a_{1P}^2 & a_{1P} \cdot a_{2P} & a_{1P} \cdot a_{3P} \\ a_{1P} \cdot a_{2P} & a_{2P}^2 & a_{3P} \cdot a_{2P} \\ a_{1P} \cdot a_{3P} & a_{2P} \cdot a_{3P} & a_{3P}^2 \end{bmatrix} - \tag{Д1.65}$$

діада вектора \mathbf{a} , a - його довжина.

Якщо ж вектор \mathbf{a} є одиничним ($\mathbf{a} = \mathbf{e}$, $e^2 = 1$), то формула (63) перетвориться на наступну

$$diad(e_p) = E + (e_p \times)^2, \tag{Д1.66}$$

де позначено

$$diad(e_p) = e_p \cdot e_p^t = \begin{bmatrix} e_{1P}^2 & e_{1P} \cdot e_{2P} & e_{1P} \cdot e_{3P} \\ e_{1P} \cdot e_{2P} & e_{2P}^2 & e_{3P} \cdot e_{2P} \\ e_{1P} \cdot e_{3P} & e_{2P} \cdot e_{3P} & e_{3P}^2 \end{bmatrix} \tag{Д1.67}$$

Ще одне корисне співвідношення знайдемо, користуючись тією обставиною, що скалярний добуток є числом, а добуток матриць є асоціативним:

$$A_p \cdot B_p^t \cdot C_p = Diad(A_p, B_p) \cdot C_p = B_p^t \cdot C_p \cdot A_p. \tag{Д1.68}$$

Воно є слухним у випадку, коли матриці A_p , B_p і C_p є стовпцями.

Нарешті, неважко довести, що, коли \mathbf{a} і \mathbf{b} - вектори, то

$$diad(A_p) \cdot B_p = A_p \cdot (A_p)^t \cdot B_p = A_p \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{Д1.69}$$

Зокрема, якщо вектор $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ - одиничний, матимемо

$$diad(e_p) \cdot X_p = x \cdot \cos(\mathbf{e}, \mathbf{x}) \cdot e_p. \tag{Д1.70}$$

Це є вектор, колінеарний з ортом \mathbf{e} , і рівний за довжиною проекції вектора \mathbf{x} на цей орт.

ДОДАТОК 2. Визначення положення тіла у просторі. Матриця напрямних косинусів. Кути Ейлера

Поняття про рух, як і про pokій, за самою природою є відносним. Інакше кажучи, висновувати про рух, або про pokій твердого тіла можливо лише тоді, коли вказано той предмет (тіло), по відношенню до якого із плином часу змінюється, або залишається незмінним положення цього тіла. При аналітичному описі явищ руху як такий предмет приймають зазвичай деяку декартову систему відліку. Вибір її у кінематиці, по суті, є довільним і визначається лише характером руху, який здійснюється відносно неї, метою дослідження та зручністю користування нею. Називатимемо цю систему відліку умовно *нерухомою* (опорною) або абсолютною системою відліку S і позначатимемо буквами $\xi\eta\zeta$.

Примітка. Поняття нерухомої системи відліку у кінематиці є умовним, відносним. Але картина радикально змінюється, коли від задач кінематики переходять до задач динаміки. Як відомо, головні закони динаміки сформульовані (і мають найпростіший вигляд) для так званих *інерціальних систем відліку*. Тому, при розв'язуванні задач динаміки, поняття *нерухомої, "абсолютної"* системи відліку набуває конкретного, чітко визначеного змісту - це інерціальна система відліку.

Д2.1. Матриця напрямних косинусів

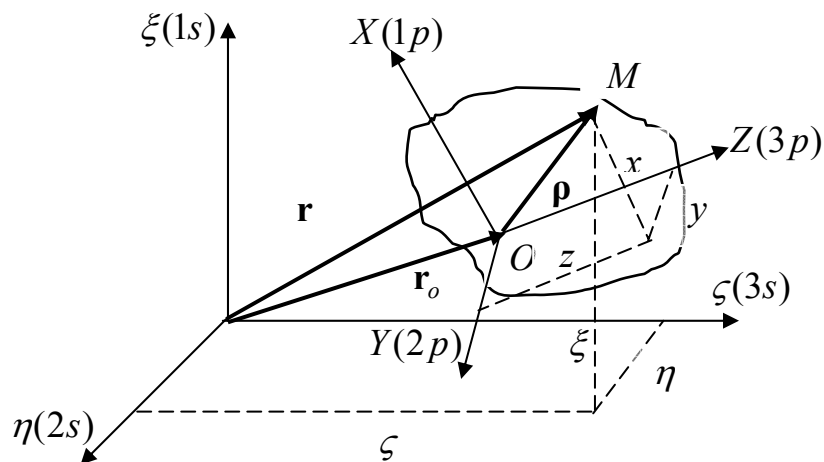


Рис. Д2.1. Завдання положення твердого тіла

Виберемо у рухомому тілі довільну точку O і приймемо її як початок системи відліку XYZ , яку припускатимемо жорстко пов'язаною з тілом (рис.Д2.1). Цю систему відліку (P) називатимемо *рухомою*. Координати x, y і z довільної точки M тіла в рухомій системі відліку вважатимемо відомими. Вони будуть незмінними протягом руху тіла, яке б воно не було.

Рух твердого тіла у просторі вважається відомим, якщо є відомими у довільний момент часу координати ξ, η і ζ довільної його точки в абсолютній системі відліку. Якщо (див. рис. Д2.1) $\mathbf{r}_o(\xi_o, \eta_o, \zeta_o)$ і $\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta)$ є відповідно радіусами-векторами полюса O і довільної точки M в абсолютній системі відліку S , а $\mathbf{\rho}(x, y, z)$ - радіус-вектор цієї точки відносно полюса O , то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{p}. \quad (\text{Д2.1})$$

Позначаючи одиничні вектори осей x , y і z через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ відповідно, можна записати:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z. \quad (\text{Д2.2})$$

Проекції одиничних векторів $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ на осі системи відліку S дорівнюють напрямним косинусам (див. Додаток 1) осей x , y і z відносно осей ξ , η і ζ :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_\xi &= \cos(x, \xi) = c_{11}; & \mathbf{j}_\xi &= \cos(y, \xi) = c_{12}; & \mathbf{k}_\xi &= \cos(z, \xi) = c_{13}; \\ \mathbf{i}_\eta &= \cos(x, \eta) = c_{21}; & \mathbf{j}_\eta &= \cos(y, \eta) = c_{22}; & \mathbf{k}_\eta &= \cos(z, \eta) = c_{23}; \\ \mathbf{i}_\zeta &= \cos(x, \zeta) = c_{31}; & \mathbf{j}_\zeta &= \cos(y, \zeta) = c_{32}; & \mathbf{k}_\zeta &= \cos(z, \zeta) = c_{33}. \end{aligned} \quad (\text{Д2.3})$$

З врахуванням цього, векторну рівність (2) можна подати у вигляді трьох скалярних рівностей таким чином:

$$\begin{cases} \xi = \xi_o + c_{11} \cdot x + c_{12} \cdot y + c_{13} \cdot z \\ \eta = \eta_o + c_{21} \cdot x + c_{22} \cdot y + c_{23} \cdot z \\ \zeta = \zeta_o + c_{31} \cdot x + c_{32} \cdot y + c_{33} \cdot z \end{cases} \quad (\text{Д2.4})$$

Співвідношення (Д2.4) - це загальні рівняння руху твердого тіла. Вони безпосередньо виражають як функції часу координати будь-якої точки в опорній системі відліку. В ці рівняння, окрім незмінних за величиною значень координат x , y і z входять дванадцять функцій часу, а саме: три "абсолютні" координати полюса O - ξ_o , η_o , ζ_o та дев'ять напрямних косинусів c_{ij} , які зручно подати наступною таблицею:

C^{SP}	$X(1p)$	$Y(2p)$	$Z(3p)$
$\xi(1s)$	c_{11}	c_{12}	c_{13}
$\eta(2s)$	c_{21}	c_{22}	c_{23}
$\zeta(3s)$	c_{31}	c_{32}	c_{33}

Рис. Д2.2. Таблиця напрямних косинусів

Очевидно, цю таблицю можна розглядати як матрицю C^{SP} напрямних косинусів рухомої системи відліку $P(x, y, z)$ відносно нерухомої системи S :

$$C^{SP} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{Д2.5})$$

Лінійне перетворення (4) може бути записане у вигляді матричної рівності

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ \zeta_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (\text{Д2.6})$$

Позначаючи стовпцеві матриці

$$R_S = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{bmatrix}; \quad R_{oS} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{bmatrix}; \quad R_P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \quad (D2.7)$$

замість (6) одержимо

$$R_S = R_{oS} + C^{SP} \cdot R_P. \quad (D2.8)$$

Якщо сумістити початки систем відліку S і P, із (8) одержимо

$$R_S = C^{SP} \cdot R_P. \quad (D2.9)$$

Це співвідношення характеризує перехід від координат вектора \mathbf{r} у рухомій системі P до координат того самого вектора у нерухомій системі відліку S, тобто перетворення вектора з однієї системи в іншу, повернуту.

Дев'ять напрямних косинусів наведеної таблиці не є взаємозалежними. Дійсно, зворотний перехід від проєкцій вектора у нерухомій системі до його проєкцій у рухомій системі, за аналогією з (9) можна подати у вигляді

$$R_P = C^{PS} \cdot R_S, \quad (D2.10)$$

де вже C^{PS} позначає матрицю напрямних косинусів зворотного переходу - від системи P до системи S. Підставляючи (9) у праву частину (10), одержимо

$$C^{SP} \cdot C^{PS} = E, \quad (D2.11)$$

де E - одинична матриця.

З іншого боку, записуючи у явному вигляді матрицю C^{PS} зворотного переходу, неважко впевнитися, що вона є транспонованою по відношенню до матриці C^{SP} прямого переходу (через те, що елементами її є косинуси між тими самими осями, тільки напрямні косинуси осей рухомої системи утворюють тепер не стовпці, а рядки:

$$C^{PS} = (C^{SP})^{-1} = (C^{SP})^t. \quad (D2.12)$$

Звідси випливає головне співвідношення, що пов'язує елементи будь-якої матриці напрямних косинусів:

$$C^{SP} \cdot (C^{SP})^t = E, \quad (D2.13)$$

або, у розгорнутому виді

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (D2.14)$$

Співвідношення (13) у термінах теорії матриць можна сформулювати у такий спосіб: **матриця напрямних косинусів є ортогональною.**

Умови нормованості при цьому зводяться до таких скалярних тотожностей:

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 &= 1 \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 &= 1 \\ c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (D2.15)$$

а умови ортогональності - до таких:

$$\begin{aligned} c_{11} \cdot c_{21} + c_{12} \cdot c_{22} + c_{13} \cdot c_{23} &= 0 \\ c_{11} \cdot c_{31} + c_{12} \cdot c_{32} + c_{13} \cdot c_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (D2.16)$$

$$c_{21} \cdot c_{31} + c_{22} \cdot c_{32} + c_{23} \cdot c_{33} = 0.$$

З цього випливають такі правила:

■ сума квадратів елементів будь якого рядка матриці напрямних косинусів дорівнює одиниці ;

■ сума попарних добутків елементів двох рядків матриці напрямних косинусів дорівнює нулеві.

Таким чином, дев'ять елементів матриці напрямних косинусів пов'язані між собою шістьма співвідношеннями (15) і (16). З цього випливає, що тільки три напрямні косинуси можуть бути довільними. Решта визначиться ними із зазначених залежностей.

Примітки.

1. Вищезазначені правила виконуються не лише для рядків, але й для стовпців матриці напрямних косинусів.

2. Визначник матриці напрямних косинусів дорівнює одиниці

$$\det(C^{SP}) = \det(C^{PS}) = 1.$$

3. Умову (13) ортогональності матриці напрямних косинусів можна також записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^3 c_{ij} \cdot c_{ik} = \delta_{jk}, \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (D2.17)$$

де δ_{jk} - символ Кронекера.

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j = k \\ 0, & \text{якщо } j \neq k \end{cases} \quad 3$$

основної властивості (12) МНК і визначення (Д1.24) оберненої матриці впливає, що будь-який елемент МНК дорівнює власному алгебричному доповненню

$$c_{ij} = C_{ij}, \quad (D2.18)$$

або, докладніше:

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22} \cdot c_{33} - c_{32} \cdot c_{23}; & c_{12} &= c_{23} \cdot c_{31} - c_{21} \cdot c_{33}; \\ c_{13} &= c_{21} \cdot c_{32} - c_{31} \cdot c_{22}; & & \\ c_{21} &= c_{32} \cdot c_{13} - c_{12} \cdot c_{33}; & c_{22} &= c_{11} \cdot c_{33} - c_{31} \cdot c_{13}; \\ c_{23} &= c_{31} \cdot c_{12} - c_{11} \cdot c_{32}; & & \\ c_{31} &= c_{12} \cdot c_{23} - c_{22} \cdot c_{13}; & c_{32} &= c_{21} \cdot c_{13} - c_{11} \cdot c_{23}; \\ c_{33} &= c_{11} \cdot c_{22} - c_{21} \cdot c_{12}; & & \end{aligned} \quad (D2.19)$$

4. Неважко впевнитися, що вектори-матриці у вигляді (Д1.30) косиметричної матриці при повороті системи відліку перетворюються згідно матричного співвідношення:

$$(A_S \times) = C^{SP} \cdot (A_P \times) \cdot (C^{SP})^t. \quad (D2.20)$$

Зворотний перехід описується наступною формулою:

$$(A_P \times) = (C^{SP})^t \cdot (A_S \times) \cdot C^{SP}. \quad (D2.21)$$

Матрицю напрямних косинусів C^{SP} можна розглядати як лінійний оператор, що, діючи на систему відліку S, перетворює її у систему P. З теорії матриць відомо, що послідовне застосування лінійних перетворень приводить до результату, якому відповідає також лінійне перетворення, матриця якого є добутком матриць послідовних перетворень.

Перехід від однієї ортогональної системи відліку до іншої можна здійснити низкою послідовних поворотів осей координат. При цьому кожний поворот осей

координат визначається відповідною матрицею перетворення - матрицею напрямних косинусів.

Припустимо, що здійснюється послідовний перехід від системи відліку S до системи T, потім - до системи K і, нарешті, - до кінцевої системи P. Кожний з таких переходів перетворює деякий вектор \mathbf{r} у відповідності до співвідношень (див. (9)):

$$R_S = C^{ST} \cdot R_T; \quad R_T = C^{TK} \cdot R_K; \quad R_K = C^{KP} \cdot R_P,$$

де R - матриця-стовпець із проєкцій вектора \mathbf{r} на осі системи відліку, що вказано індексом при матриці; C^{ST} , C^{TK} і C^{KP} - матриці напрямних косинусів відповідно між системами відліку S і T, T і K та K і P.

З (21) випливає

$$R_S = C^{ST} \cdot C^{TK} \cdot C^{KP} \cdot R_P.$$

Але, з іншого боку, той самий перехід від системи S до системи P описується ще й співвідношенням (9). Порівнюючи ці дві рівності, одержимо залежність, яка пов'язує матрицю результуючого повороту з матрицями складових послідовних поворотів:

$$C^{SP} = C^{ST} \cdot C^{TK} \cdot C^{KP}. \quad (D2.22)$$

Матриця напрямних косинусів результуючого повороту дорівнює добутку зліва праворуч матриць напрямних косинусів складових поворотів у порядку здійснення самих поворотів. Цю властивість матриць напрямних косинусів (МНК) можна використати для визначення значень МНК складених поворотів.

Д2.2. Кути Ейлера-Крилова

Перейдемо до визначення кутів Ейлера. Для зручності аналітичних доведень та з міркувань геометричної наочності Леонардом Ейлером було запропоновано як характеристики повороту твердого тіла навколо полюса відносно іншого тіла використовувати не три незалежні напрямні косинуси, а три кути послідовних поворотів системи координатних осей, через які виражаються усі дев'ять напрямних косинусів.

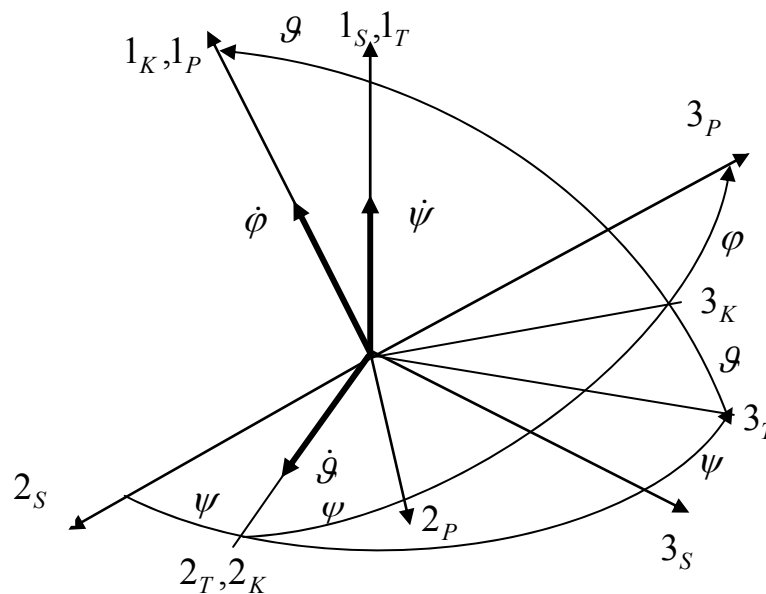


Рис. Д2.3. Послідовність кутів Ейлера

За теоремою Ейлера перехід від однієї декартової системи відліку до будь-якої іншої (із тим же початком) може бути виконаний за допомогою трьох

послідовних поворотів, що здійснюються у певному порядку. Перший поворот може здійснюватися навколо будь-якої із трьох координатних осей (3 можливості) початкового координатного базису, другий - навколо нового положення будь-якої із двох інших осей (2 можливості). Третій поворот можна виконати навколо нового положення будь-якої із двох осей, що не використані при другому повороті (ще 2 можливості). Кількість можливих комбінацій послідовних поворотів, як очевидно, дорівнює 12. Серед них розрізняють два основних типи, у залежності від того, чи збігається вісь останнього повороту з новим положенням осі першого повороту, чи ні. Послідовність кутів першого типу вперше була використана Ейлером для досліджування динаміки обертового твердого тіла і широко застосовується у теоретичній механіці. Цей тип послідовності зазвичай називають власне кутами Ейлера. Приклад такої послідовності наведений на рис. 3.

Для опису цієї послідовності поворотів застосуємо такий запис:

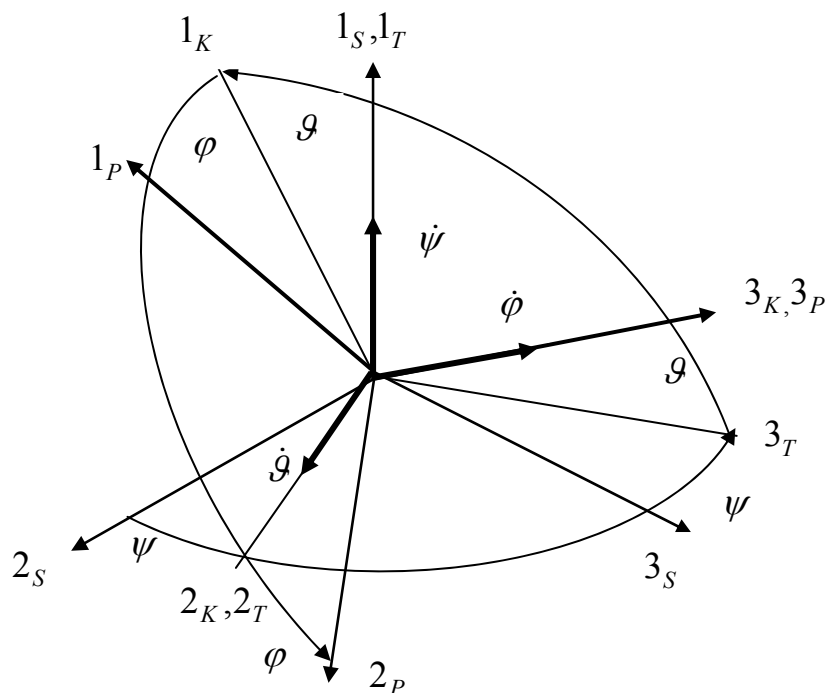
$$S \rightarrow \frac{\psi}{1_S} \rightarrow T \rightarrow \frac{\vartheta}{2_T} \rightarrow K \rightarrow \frac{\varphi}{1_K}. \quad (D2.23)$$

Над стрілкою, яка вказує напрямок переходу від однієї системи відліку до іншої, записане позначення кута повороту, а під нею - позначення осі, навколо якої здійснюється поворот на вказаний кут. При дослідженні поведінки дзиги кут ψ одержав назву *кута прецесії*, ϑ - *кута нутації*, а φ - *кута ротації*.

У прикладній механіці та теорії гіроскопів більше застосування знайшов другий тип послідовних поворотів - навколо кожної із трьох координатних осей. Така послідовність була запропонована російським ученим-суднобудівником А. Н. Криловим і одержала його ім'я.

Наприклад, для визначення кутового положення корпусів рухомих об'єктів (суден, літаків, ракет, керованих снарядів тощо) широке використання одержав варіант кутів Крилова, зображений на рис. 4. Його можна охарактеризувати записом:

$$S \rightarrow \frac{\psi}{1_S} \rightarrow T \rightarrow \frac{\vartheta}{2_T} \rightarrow K \rightarrow \frac{\varphi}{3_K}. \quad (D2.24)$$



Якщо під системою відліку S розуміти траєкторну систему відліку, під віссю 3_P - поздовжню вісь рухомого об'єкта, 1_P - нормальну вісь об'єкта, то кут ψ при цьому характеризує поворот об'єкта у площині горизонту і називається *кутом рискання*, кут ϑ визначає нахил поздовжньої осі об'єкта до площини горизонту і називається *кутом тангажу* (у літаках), або *диференту* (у надводних та підводних суднах), а кут φ визначає поворот об'єкта навколо поздовжньої осі і його називають *кутом крену*.

У загальному випадку вибір тієї чи іншої послідовності поворотів впливає або із самої постановки задачі, або визначається особливостями конструкції об'єкта дослідження. Обрана послідовність кутів Ейлера однозначно визначає кутове положення тіла відносно обраної (опорної) системи відліку. Для використання цих кутів при розв'язуванні задач кінематики необхідно, у першу чергу, навчитися виражати через них усі елементи матриць напрямних косинусів.

Д2.3. Подання МНК через кути Ейлера-Крилова

Одним із шляхів визначення МНК за заданою послідовністю поворотів є відшукання МНК кожного з елементарних поворотів на окремий із трьох кутів заданої послідовності (це здійснюється досить просто) і наступному перемноженню цих матриць.

Застосуємо цей метод для знаходження МНК послідовності кутів Ейлера, зображеної на рис. 3. Використаємо для цього можливості системи MatLAB.

Визначимо матрицю $C1$ напрямних косинусів, що переводить систему S у систему T (поворот на кут ψ (ps) навколо осі 1_S):

```
syms ps
C1=sym([1 0 0; 0 cos(ps) -sin(ps); 0 sin(ps) cos(ps)])
C1 =
[ 1, 0, 0]
[ 0, cos(ps), -sin(ps)]
[ 0, sin(ps), cos(ps)]
```

Аналогічно визначимо матрицю $C2$ переходу від системи T до нової системи відліку K , який здійснено шляхом повороту на кут ϑ (te) навколо осі 2_T :

```
syms te
C2=sym([ cos(te) 0 sin(te); 0 1 0;-sin(te) 0 cos(te)])
C2 =
[ cos(te), 0, sin(te)]
[ 0, 1, 0]
[-sin(te), 0, cos(te)]
```

Третій поворот (від системи K до кінцевої системи P) на кут φ ($f1$) здійснимо навколо нового положення першої координатної осі, тобто навколо осі 1_K :

```
syms f1
C3=sym([1 0 0; 0 cos(f1) -sin(f1); 0 sin(f1) cos(f1)])
C3 =
[ 1, 0, 0]
[ 0, cos(f1), -sin(f1)]
[ 0, sin(f1), cos(f1)]
```

Знайдемо матрицю C загального повороту - від початкової системи відліку S до кінцевої системи P :

```
C = sym(C1*C2*C3)
```

```
C =
```

$$\begin{bmatrix} \cos(te), & \sin(te)*\sin(f1), & \sin(te)*\cos(f1) \\ \sin(ps)*\sin(te), & \cos(ps)*\cos(f1)-\sin(ps)*\cos(te)*\sin(f1), & -\cos(ps)*\sin(f1)-\sin(ps)*\cos(te)*\cos(f1) \\ -\cos(ps)*\sin(te), & \sin(ps)*\cos(f1)+\cos(ps)*\cos(te)*\sin(f1), & -\sin(ps)*\sin(f1)+\cos(ps)*\cos(te)*\cos(f1) \end{bmatrix}$$

Одержане символъне подання МНК відповідає такому запису

$$C^{SP} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta; \sin \vartheta \sin \varphi; \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \vartheta; \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \vartheta; -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \vartheta \\ -\cos \psi \sin \vartheta; \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \vartheta; -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad (Д2.25)$$

Аналогічно відшукується МНК для рис. 4. Як не важко збагнути, нова послідовність вирізняється від попередньої лише третім поворотом. Тому слід лише перебудувати матрицю останнього повороту

syms ps te f1

C1 =sym([1 0 0; 0 cos(ps) -sin(ps);0 sin(ps) cos(ps)])

C2 =sym([cos(te) 0 sin(te);0 1 0;-sin(te) 0 cos(te)])

C3 =sym([cos(f1) -sin(f1) 0;sin(f1) cos(f1) 0; 0 0 1])

C = sym(C1*C2*C3)

C3 =

$$\begin{bmatrix} \cos(f1), & -\sin(f1), & 0 \\ \sin(f1), & \cos(f1), & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

C =

$$\begin{bmatrix} \cos(te)*\cos(f1), & -\cos(te)*\sin(f1), & \sin(te) \\ \sin(ps)*\sin(te)*\cos(f1)+\cos(ps)*\sin(f1), & -\sin(ps)*\sin(te)*\sin(f1)+\cos(ps)*\cos(f1), & -\sin(ps)*\cos(te) \\ -\cos(ps)*\sin(te)*\cos(f1)+\sin(ps)*\sin(f1), & \cos(ps)*\sin(te)*\sin(f1)+\sin(ps)*\cos(f1), & \cos(ps)*\cos(te) \end{bmatrix}$$

Ми одержали результат, який можна подати у такій більш звичній математичній формі:

$$C^{SP} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi; -\cos \vartheta \sin \varphi; \sin \vartheta \\ \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \sin \vartheta; \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \sin \vartheta; -\sin \psi \cos \vartheta; \\ \sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi \sin \vartheta; \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \sin \vartheta; \cos \psi \cos \vartheta; \end{bmatrix} \quad (Д2.26)$$

Іншим способом визначення елементів МНК через кути послідовних поворотів є застосування теореми косинусів сферичної тригонометрії,

Сферичним трикутником називається фігура, що утворюється (рис. 5) на поверхні сфери одиничного радіуса перетинанням з нею трьох площин, що проходять крізь центр сфери (або, що те саме, перетинанням трьох дуг великих кругів сфери).

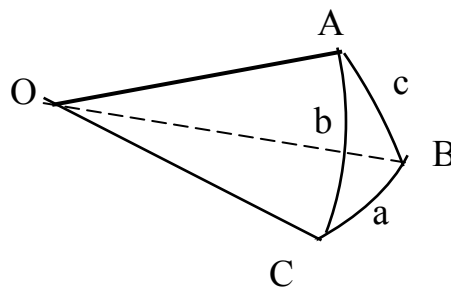


Рис. Д2.5. Сферичний трикутник

Дуги АВ, ВС і СА великих кругів називаються сторонами сферичного трикутника. Вони вимірюються відповідними центральними кутами АОВ, ВОС і СОА. Кути сферичного трикутника АВС, ВСА й САВ є двограними кутами, що утворені площинами : АОВ й ВОС - для вершини В; ВОС й СОА - для вершини С та СОА й АОВ - для вершини А.

Позначимо сторони сферичного трикутника, що розташовані навпроти вершин А, В і С, відповідно малими літерами - а, b і с, а двогранні кути при вершинах - великими літерами латиниці, що позначають відповідну вершину. Тоді головну формулу сферичної тригонометрії, яка виражає теорему косинусів для сферичного трикутника, можна записати у виді:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \quad (Д2.27)$$

Її слід читати так: косинус будь-якої сторони сферичного трикутника дорівнює добуткові косинусів двох інших його сторін, підсумованому з добутком синусів цих сторін на косинус двогранного кута, що протилежить шуканій стороні.

Для визначення напрямних косинусів за допомогою формули (24) рекомендується наступний порядок дій:

- 1) намалювати картину послідовних поворотів на кшталт рис 3 і 4;
- 2) відшукати на малюнку координатні осі, косинус кута між якими потрібно визначити;
- 3) відшукати на малюнку такий сферичний трикутник, двома вершинами якого були б сліди на сфері двох осей, знайдених у п.2, а сторони розташовувалися на проведених на малюнку площинах; через те, що на малюнку проведені лише площини відомих кутів послідовних поворотів, це гарантує визначеність двох сторін трикутника, що належать відповідним площинам;
- 4) з малюнку визначити (виразити через задані кути поворотів) величини сторін, що примикають до третьої вершини трикутника;
- 5) з малюнку визначити (виразити через один із кутів повороту) двограний кут трикутника, що протилежний шуканій стороні; при цьому варто мати на увазі, що двогранный кут між площинами кутів послідовних (тобто таких, що прямують один за одним) поворотів завжди дорівнює $\pi/2$; не дорівнюватиме $\pi/2$ лише кут між площинами першого й третього поворотів, який є функцією другого кута повороту;
- 6) підставити знайдені значення сторін і двогранного кута між ними у вираз (23) і перетворити одержаний вираз до найпростішого виду;
- 7) аналогічно визначити решту 8 напрямних косинусів і записати результат у вигляді таблиці;
- 8) перевірити правильність одержаних результатів, використовуючи для цього умови (15) і (16).

Для прикладу визначимо косинус кута між осями 2_S і 3_P для послідовності, поданої на рис. 3.

На цьому рисунку сферичний трикутник $2_S-2_T-3_P$ відповідає усім зазначеним вимогам - він має дві вершини 2_S і 3_P , кут між якими треба визначити, а його дві сторони належать проведеним площинам заданих поворотів - це площина кута ψ й площина кута φ . Сторона 2_S-2_T дорівнює куту ψ , сторона 2_T-3_P дорівнює $\varphi + \pi/2$. Двогранный кут трикутника $2_S-2_T-3_P$, що протилежить шуканій стороні 2_S-3_P дорівнює $\pi - \vartheta$, як це впливає з рис.3. Підставляючи ці значення у формулу (24), одержимо:

$$\begin{aligned} \cos(2_S, 3_P) &= \cos \psi \cos(\varphi + \pi/2) + \sin \psi \sin(\varphi + \pi/2) \cos(\pi - \vartheta) = \\ &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \vartheta \end{aligned}$$

що повністю збігається із членом матриці (25), що міститься на перетинанні другого рядка і третього стовпця.

Як другий приклад розглянемо визначення косинуса кута між тими самими осями при послідовності поворотів, вказаній на рис. 4. Тут уже відповідним трикутником може бути тільки трикутник $2_S-3_T-3_P$. Сторона 2_S-3_T цього трикутника дорівнює, як це випливає з рис.4, $\psi + \pi/2$. Сторона 3_T-3_P - кутові ϑ . Двогранний кут між площинами цих двох сторін, тобто між площинами двох послідовних поворотів ψ і ϑ дорівнює $\pi/2$. Через це друга складова у формулі (24) дорівнюватиме нулеві. В результаті, застосовуючи формулу (24), отримаємо

$$\cos(2_S, 3_P) = -\sin \psi \cos \vartheta.$$

Результат також збігається з елементом матриці (26), що міститься на перетинанні другого рядка і третього стовпця.

Резюмуючи, можна сказати, що існують два основних способи визначення елементів матриці напрямних косинусів через задані кути послідовних поворотів - матричний і за допомогою сферичної тригонометрії. При цьому слід зауважити наступне:

1) матричний спосіб є більш формалізованим, його можна застосовувати у ЕОМ для чисельного й символного (див. раніше) визначення матриць напрямних косинусів; він пристосований для випадків поворотів будь-якої складності (коли кутів послідовних поворотів більше за три); недоліком цього методу є необхідність визначати елементи усіх трьох проміжних матриць, тобто 27 елементів, навіть у випадку, коли потрібно визначити не всю матрицю, а тільки один із її елементів (що досить часто буває на практиці);

застосування теореми косинусів більш бажане й зручне, коли послідовність складається не більш ніж із трьох поворотів, особливо, коли потрібно визначити не всю матрицю напрямних косинусів, а лише деякі її елементи; у цих випадках кількість операцій різко скорочується у порівнянні з матричним способом; недоліком цього методу є його неформалізованість (необхідність малювання картини поворотів, відшукування на малюнку трикутника, визначення величин його сторін і кутів), отже, і неможливість застосовувати його у ЕОМ, а також неможливість застосування при кількості поворотів більше

ДОДАТОК 3. Математичні моделі подання поворотів тіла у просторі

Як уже зазначалося у Додатку 2, поворот від однієї, умовно нерухомої системи відліку S до іншої, рухомої, P можна описати матрицею C^{SP} напрямних косинусів осей системи P у системі S . При цьому проєкції будь-якого вектора x у "нерухомій" системі S пов'язані із проєкціями цього ж вектора на осі системи P матричним співвідношенням

$$X_S = C^{SP} \cdot X_P, \quad (Д3.1)$$

де $X_S = [x_{1S}, x_{2S}, x_{3S}]^t$ і $X_P = [x_{1P}, x_{2P}, x_{3P}]^t$ - матриці-стовпці із проєкцій вектора на відповідні осі, або співвідношенням

$$(X_S \times) = (C^{SP})^t \cdot (X_P \times) \cdot C^{SP}, \quad (Д3.2)$$

якщо вектори подані у вигляді кососиметричних матриць (Д1.30)

Таким чином, щоб відшукати проєкції вектора x у деякій системі відліку за заданими його проєкціями в іншій системі відліку, необхідно відшукати (визначити) матрицю напрямних косинусів другої системи відносно першої і помножити її на матрицю-стовпець із відомих проєкцій. При цьому виходить очікувана матриця-стовпець із шуканих проєкцій.

Якщо здійснюються два послідовних повороти, - спочатку від системи відліку S до системи K , а потім від системи K до системи P , - то, як було доведено у Додатку 2, матриця напрямних косинусів C^{SP} , що відповідає переходу від першої системи відліку S до кінцевої P , дорівнює добутку (зліва праворуч у порядку здійснення самих поворотів) матриць напрямних косинусів C^{SK} і C^{KP} складових поворотів:

$$C^{SP} = C^{SK} C^{KP}. \quad (Д3.3)$$

Ці два співвідношення практично повністю розв'язують проблему відшукування проєкцій будь-якого вектора у довільній системі відліку. Але незручністю такого математичного подання поворотів систем відліку є те, що кожний такий поворот описується матрицею із 9 елементами, із яких тільки 3 є взаємонезалежними, якщо взяти до уваги співвідношення (Д2.15 - Д2.16). Виникає проблема більш зручного (компактного з математичного боку) подання поворотів.

Одним із шляхів розв'язання цієї проблеми є, на перший погляд, опис поворотів за допомогою завдання кутів Ейлера послідовних поворотів навколо трьох осей координат, як це було зазначено у Додатку 2. Але більш уважний погляд виявляє наступні хиби такого подання:

1) на відміну від матриці напрямних косинусів, яка є завжди єдиною для будь-якого певного кутового положення двох систем відліку, опис за допомогою кутів Ейлера є неоднозначним; існують, як відомо, щонайменше 12 різних сполучень послідовних поворотів, що відповідають саме тому взаємному положенню систем відліку, а із врахуванням можливого змінювання напрямку додатного повороту на зворотний - набагато більше;

2) найбільшою вадою опису поворотів кутами Ейлера є так звана "вироджуваність" будь-якої послідовності кутів Ейлера: при деяких певних значеннях другого кута повороту напрямки осей першого й третього поворотів збігаються у просторі; це призводить до того, що в цьому випадку результуючий поворот зводиться лише до двох, а не трьох поворотів, які необхідні для визначення кутового положення тіла.

Проілюструємо ці висновки.

Нехай, наприклад, прийнята послідовність поворотів, зображена на рис. Д2.3 і значення кутів ψ , ϑ і φ дорівнюють кожний по $\pi/6 = 30^\circ$. Розрахуємо для цього положення тіла значення матриці (Д2.22) його напрямних косинусів:

```
syms ps te f1
C1 =sym([1 0 0; 0 cos(ps) -sin(ps); 0 sin(ps) cos(ps)]);
C2 =sym([ cos(te) 0 sin(te); 0 1 0; -sin(te) 0 cos(te)]);
C3 =sym([1 0 0; 0 cos(f1) -sin(f1); 0 sin(f1) cos(f1)])
CS = sym(C1*C2*C3)
ps = pi/6;      te=pi/6;f1=pi/6;
Cr = subs(CS)
Cr =
    0.8660    0.2500    0.4330
    0.2500    0.5335   -0.8080
   -0.4330    0.8080    0.3995
```

Очевидно, це значення матриці МНК однозначно визначає кутове положення тіла, незалежно від того, якою саме послідовністю поворотів задане це положення. Тому таке саме положення тіла може бути заданим і за допомогою іншої послідовності поворотів, наприклад, тою, що подана на рис Д2.4. Цій послідовності вже відповідає МНК (Д2.23).

Як впливає з розгляду цієї матриці, значення кутів ψ , ϑ і φ цієї послідовності поворотів можна визначити по значеннях елементів матриці з таких формул:

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{c_{12}^{SP}}{c_{11}^{SP}}\right); \quad \vartheta = \operatorname{arcsin}(c_{13}^{SP}); \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{c_{23}^{SP}}{c_{33}^{SP}}\right).$$

Здійснюючи обчислення за цими формулами, одержимо для розглядуваного випадку такі значення кутів ψ , ϑ і φ відповідно у градусах

```
psn=atan(-Cr(2,3)/Cr(3,3))*180/pi
ten=asin(Cr(1,3))*180/pi
fin=atan(-Cr(1,2)/Cr(1,1))*180/pi
psn =
    63.6901
ten =
    25.6589
fin =
   -16.1021
```

Таким чином, те саме положення тіла визначається вже зовсім іншими значеннями кутів поворотів. Очевидно, кожній послідовності поворотів відповідатиме власна трійка значень кутів, які визначають те саме положення тіла.

З іншого боку, якщо другий кут повороту (ϑ) дорівнює у випадку послідовності рис. Д2.3 нулеві, матриця (Д2.25) набуває вигляду:

$$C^{SP} = \begin{bmatrix} 1; 0; 0 \\ 0; \cos(\psi + \varphi); -\sin(\psi + \varphi) \\ 0; \sin(\psi + \varphi); \cos(\psi + \varphi) \end{bmatrix}.$$

У цьому випадку перші координатні осі початкової й кінцевої систем відліку збігаються, а завдання положення двох інших осей невизначене: тому самому положенню тіла (кінцевої системи відліку) у просторі (початковій системі відліку) відповідає безліч пар значень кутів ψ і φ , сума яких дорівнює певному куту. Саме ця сума, а не окремо кути ψ і φ визначає у цьому випадку положення тіла.

Те саме спостерігається при послідовності поворотів, зображеній на рис. Д2.4, якщо другий кут ϑ дорівнює $\pi/2$. У цьому випадку вісь Z_p збігається з віссю 1_s , а МНК (Д2.23) вироджується до такої:

$$C^{SP} = \begin{bmatrix} 0; 0; 1 \\ \sin(\psi + \varphi); \cos(\psi + \varphi); 0 \\ -\cos(\psi + \varphi); \sin(\psi + \varphi); 0 \end{bmatrix}.$$

Як очевидно, у цих випадках операція визначення положення тіла за допомогою конкретної послідовності поворотів стає нескінченнозначною.

Звідси випливає, що кути Ейлера не задовольняють умові однозначності опису положення тіла.

Д3.1. Теорема Ейлера

При описі поворотів бажано мати такі три (незалежні один від одного) скалярні параметри, які б були єдиними, універсальними, однозначно б визначали довільну кутову орієнтацію тіла. Така можливість існує, завдяки встановленій Ейлером обставині:

довільне кутове положення однієї системи відліку відносно іншої завжди можна подати як єдиний поворот початкової системи на певний кут (його називатимемо кутом Ейлера) навколо певно орієнтованої осі (яку називають віссю Ейлера), завдяки якому ця система відліку збігатиметься з кінцевою.

Косинус кута δ такого повороту доволі просто визначається з матриці напрямних косинусів

$$\cos \delta = [Tr(C^{SP}) - 1] / 2, \quad (Д3.4)$$

де $Tr(C^{SP})$ - позначення сліду (trace) матриці напрямних косинусів (МНК), тобто суми діагональних її елементів. Напрямні косинуси e_{1S} , e_{2S} і e_{3S} осі цього повороту відносно осей початкової системи 1_S , 2_S і 3_S (або, що те саме, - проєкції одиничного вектора e осі Ейлера на ці осі) визначаються співвідношеннями

$$e_{1S} = \frac{c_{32}^{SP} - c_{23}^{SP}}{2 \sin \delta}; \quad e_{2S} = \frac{c_{13}^{SP} - c_{31}^{SP}}{2 \sin \delta}; \quad e_{3S} = \frac{c_{21}^{SP} - c_{12}^{SP}}{2 \sin \delta}. \quad (Д3.5)$$

Неважко збагнути, що кути між віссю Ейлера й осями координат не змінюються при повороті навколо неї. Тому напрямні косинуси Ейлерової осі у кінцевій системі відліку будуть тими самими:

$$e_{1S} = e_{1P} = e_1; \quad e_{2S} = e_{2P} = e_2; \quad e_{3S} = e_{3P} = e_2. \quad (Д3.6)$$

Зворотний зв'язок між матрицею напрямних косинусів і елементами єдиного повороту Ейлера можна подати у вигляді:

$$C^{SP} = \cos \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos \delta) \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & e_2^2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & e_3^2 \end{bmatrix} + \sin \delta \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (Д3.7)$$

Неважко впевнитися, що перша матриця є одиничною, друга матриця (див. Д1.62) – є діадою, складеною з проєкцій орту осі Ейлера на осі системи S або P, а третя матриця є поданням того ж орту у вигляді кососиметричної матриці з тих самих проєкцій, тому (7) можна записати так

$$C^{SP} = \cos \delta \cdot E + (1 - \cos \delta) \cdot Diad(e) + \sin \delta \cdot (ex), \quad (Д3.8)$$

де позначено:

$$Diad(e) = \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_1 & e_2^2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & e_3^2 \end{bmatrix}; \quad (ex) = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (Д3.9)$$

Співвідношення (Д1.61) дозволяє перетворити (8) у наступний вираз:

$$C^{SP} = E + \sin \delta \cdot (ex) + (1 - \cos \delta) \cdot (ex)^2. \quad (Д3.10)$$

Запишемо перетворення (1) вектора x з врахуванням виразу (8).

Одержимо:

$$\begin{aligned} X_S &= C^{SP} \cdot X_P = \{ \cos \delta \cdot E + (1 - \cos \delta) \cdot Diad(e) + \sin \delta \cdot (ex) \} \cdot X_P = \\ &= \cos \delta \cdot X_P + (1 - \cos \delta) \cdot Diad(e) \cdot X_P + \sin \delta \cdot (ex) \cdot X_P. \end{aligned}$$

Враховуючи тепер (Д1.64) прийдемо до наступного співвідношення:

$$X_S = \cos \delta \cdot X_P + (1 - \cos \delta) \cdot x \cdot \cos \varepsilon \cdot e + \sin \delta \cdot (ex) \cdot X_P, \quad (Д3.11)$$

де через ε позначено кут між вектором x і ортом e Ейлерової осі, а x - довжина вектора x . Вираз (11) фактично є поданням вектора x у системі відліку S через його подання у системі P за допомогою розкладу по напрямкам:

- образу вектора x у системі P ;
- одиничного вектора e осі Ейлера повороту;
- перпендикуляра до попередніх двох напрямків.

Як впливає з одержаного виразу, довжина складової вектора вдовж напрямку його у системі P дорівнює $x \cdot \cos \delta$, вдовж Ейлерової осі - $x \cdot (1 - \cos \delta) \cdot \cos \varepsilon$, а вдовж напрямку, ортогонального до попередніх, - $x \cdot \sin \delta \cdot \sin \varepsilon$.

Д3.2. Вектор повороту Гіббса

Поворот Ейлера можна подати у вигляді вектора повороту Гіббса G^{SP} :

$$\begin{aligned} G_S^{SP} &= G_{1S}^{SP} \cdot \mathbf{1}_S + G_{2S}^{SP} \cdot \mathbf{2}_S + G_{3S}^{SP} \cdot \mathbf{3}_S = \\ &= tg \frac{\delta}{2} (e_{1S} \cdot \mathbf{1}_S + e_{2S} \cdot \mathbf{2}_S + e_{3S} \cdot \mathbf{3}_S) = tg \frac{\delta}{2} \cdot e_S \end{aligned} \quad (Д3.12)$$

Тут $G_{1S}^{SP}, G_{2S}^{SP}, G_{3S}^{SP}$ - проєкції вектора Гіббса на напрямки осей початкової системи відліку, $\mathbf{1}_S, \mathbf{2}_S, \mathbf{3}_S$ - позначення ортів цієї системи, а

$$e_S = e_{1S} \cdot \mathbf{1}_S + e_{2S} \cdot \mathbf{2}_S + e_{3S} \cdot \mathbf{3}_S \quad (Д3.13)$$

- позначення одиничного вектора осі Ейлера.

Як впливає з визначення, довжина вектора Гіббса дорівнює тангенсові половини кута повороту, а напрямок збігається з додатним напрямком осі цього повороту. З цього випливає, що проєкції вектора Гіббса, який описує поворот, що переводить одну систему відліку у іншу, однакові в обох цих системах відліку, тобто вектор Гіббса має такі властивості:

$$G_S^{SP} = G_P^{SP} = C^{SP} \cdot G_P^{SP} = (C^{SP})^t \cdot G_S^{SP},$$

або просто (знімаючи непотрібні індекси)

$$G^{SP} = C^{SP} \cdot G^{SP} = (C^{SP})^t \cdot G^{SP}. \quad (Д3.14)$$

Замість (11) можна використовувати формулу

$$G^{SP} = [G_1^{SP}; G_2^{SP}; G_3^{SP}]^t = tg \frac{\delta}{2} [e_1; e_2; e_3]^t = tg \frac{\delta}{2} \cdot e. \quad (Д3.15)$$

Матриця напрямних косинусів пов'язана з вектором Гіббса залежністю:

$$C^{SP} = \frac{[1 - (G^{SP})^t \cdot G^{SP}] \cdot E + 2 \cdot G^{SP} \cdot (G^{SP})^t + 2 \cdot (G^{SP} \times)}{1 + (G^{SP})^t \cdot G^{SP}}. \quad (Д3.16)$$

Проекції будь-якого вектора x перетворюються з однієї системи відліку в іншу через вектор Гіббса у такий спосіб:

$$X_S = C^{SP} X_P = \frac{[1 - (G^{SP})^t \cdot G^{SP}] X_P + 2(G^{SP})^t X_P \cdot G^{SP} + 2(G^{SP} \times) X_P}{1 + (G^{SP})^t \cdot G^{SP}}, \quad (Д3.17)$$

де $(G^{SP} \times)$ - позначення кососиметричної матриці із проекцій вектора G на осі системи P або S , G^{SP} - матриця-стовпець із тих самих проекцій.

Виразимо (16) через кут δ і матрицю-стовпець e одиничного вектора Ейлера повороту, враховуючи (див. (Д1.61)...(Д1.63)), що

$$\begin{aligned} (G^{SP})^t \cdot G^{SP} &= tg^2 \frac{\delta}{2} \cdot e^t \cdot e = tg^2 \frac{\delta}{2}; & (G^{SP} \times) &= tg \frac{\delta}{2} \cdot (ex); \\ 1 + (G^{SP})^t \cdot G^{SP} &= 1 + tg^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\delta}{2}}; & 1 - (G^{SP})^t \cdot G^{SP} &= 1 - tg^2 \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \delta}{\cos^2 \frac{\delta}{2}}; \\ G^{SP} \cdot (G^{SP})^t &= tg^2 \frac{\delta}{2} \cdot (e \cdot e^t) = tg^2 \frac{\delta}{2} \cdot Diad(e) = tg^2 \frac{\delta}{2} \cdot [E + (ex)^2]; \end{aligned}$$

Одержимо:

$$\begin{aligned} X_S &= \cos \delta \cdot X_P + 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \cdot [E + (ex)^2] \cdot X_P + 2 \sin \frac{\delta}{2} \cdot \sin \frac{\delta}{2} \cdot (ex) \cdot X_P = \\ &= \{ \cos \delta \cdot E + 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \cdot [E + (ex)^2] + 2 \sin \frac{\delta}{2} \cdot \sin \frac{\delta}{2} \cdot (ex) \} \cdot X_P = \\ &= \{ E + (1 - \cos \delta) \cdot (ex)^2 + \sin \delta \cdot (ex) \} \cdot X_P. \end{aligned} \quad (Д3.18)$$

Це повністю збігається з (10).

Щоб можна було користуватися вектором Гіббса для опису складених поворотів, треба ще встановити правило "сумування" поворотів, тобто відшукування вектора Гіббса результуючого повороту за заданими векторами Гіббса складових поворотів. Це правило можна сформулювати таким чином:

$$G^{SP} = G^{ST} \oplus G^{TP} = \frac{G^{ST} + G^{TP} + G^{ST} \times G^{TP}}{1 - G^{ST} \cdot G^{TP}}. \quad (Д3.19)$$

Знаком \oplus тут позначено операцію "сумування" векторів Гіббса.

Цю операцію слід розуміти так. Задана деяка початкова система відліку (наприклад, S). У цій системі задані два різних повороти, які переводять цю систему у деякі дві різні системи відліку (від S до T і від S до деякої системи P'). Треба визначити у цій же початковій системі вектор результуючого повороту (від системи S до системи P), який виходить внаслідок послідовного повороту спочатку початкової системи на кут першого повороту, а потім одержаної системи (T) на кут другого повороту.

Ця операція є деяким еквівалентом операції (3) множення матриць напрямних косинусів для одержання матриці напрямних косинусів результуючого повороту. Як впливає з визначення (19) цієї операції, на відміну від звичайного поняття сумування, "сумування" векторів Гіббса не є комутативним

$(\mathbf{G}_1 \oplus \mathbf{G}_2 \neq \mathbf{G}_2 \oplus \mathbf{G}_1)$, бо остання складова чисельника (14) змінює свій знак на протилежний при змінюванні порядку сумування

Д3.3. Початкові відомості про кватерніони

Кватерніоном називають *гіперкомплексне число із трьома уявними одиницями*. У загальному випадку воно має вигляд

$$\mathbf{Q} = q_0 + \mathbf{i} \cdot q_1 + \mathbf{j} \cdot q_2 + \mathbf{k} \cdot q_3, \quad (\text{Д3.20})$$

де q_0, q_1, q_2, q_3 - деякі дійсні числа, а $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - уявні одиниці. Поняття кватерніону можна вважати узагальненням поняття комплексного числа на випадок, коли уявний простір є тривимірним і заданий системою відліку з координатним базисом (ортами) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Дії над кватерніонами підпорядковуються наступним головним правилам.

1. Два кватерніони \mathbf{Q}_1 і \mathbf{Q}_2 дорівнюють один одному, якщо є рівними їхні елементи

$$q_{1i} = q_{2i}; \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Сумою кватерніонів \mathbf{Q}_1 і \mathbf{Q}_2 називається кватерніон, елементами якого є сума відповідних елементів кватерніонів доданків

$$\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = (q_{10} + q_{20}) + \mathbf{i} \cdot (q_{11} + q_{21}) + \mathbf{j} \cdot (q_{12} + q_{22}) + \mathbf{k} \cdot (q_{13} + q_{23}).$$

2. Добутком кватерніону на число є кватерніон, усі елементи якого дорівнюють відповідному елементові початкового полінома, помноженому на це число

$$a \cdot \mathbf{Q} = a \cdot q_0 + \mathbf{i} \cdot (a \cdot q_1) + \mathbf{j} \cdot (a \cdot q_2) + \mathbf{k} \cdot (a \cdot q_3).$$

З цих визначень випливає, що сумування кватерніонів і добуток їх на скаляр підпорядковуються правилам звичайної алгебри чисел.

Одиниці $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ можна вважати за одиничні вектори (орти) чотиривимірного простору, яке складається зі звичайної числової осі і тривимірного уявного простору з ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Щоб визначити добуток кватерніонів, необхідно, перш за все, визначити правила множення одиниць $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Ці правила найзручніше подати у вигляді таблиці:

o	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

(Д3.21)

За такими правилами добуток кватерніонів (його позначатимемо знаком \circ між позначеннями кватерніонів, що перемножуються) є також кватерніоном:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 &= (q_{10} + \mathbf{i} \cdot q_{11} + \mathbf{j} \cdot q_{12} + \mathbf{k} \cdot q_{13}) \circ (q_{20} + \mathbf{i} \cdot q_{21} + \mathbf{j} \cdot q_{22} + \mathbf{k} \cdot q_{23}) = \\
&= (q_{10}q_{20} - q_{11}q_{21} - q_{12}q_{22} - q_{13}q_{23}) + \\
&\quad + \mathbf{i} \cdot (q_{10}q_{21} + q_{11}q_{20} + q_{12}q_{23} - q_{13}q_{22}) + \\
&\quad + \mathbf{j} \cdot (q_{10}q_{22} + q_{12}q_{20} + q_{13}q_{21} - q_{11}q_{23}) + \\
&\quad + \mathbf{k} \cdot (q_{10}q_{23} + q_{13}q_{20} + q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21})
\end{aligned} \tag{Д3.22}$$

Завдяки правилам (21) перемножування кватерніонів алгебра кватерніонів містить у собі алгебру дійсних і комплексних чисел, а також тривимірну векторну алгебру.

Кватерніони містять *дійсні числа* $(q_0, 0, 0, 0)$ з єдиною одиницею 1, *комплексні числа* $(q_0, q_1, 0, 0)$ із двома одиницями 1 та \mathbf{i} , а також *вектори* $(0, q_1, q_2, q_3)$ у просторі трьох вимірів. Можна ідентифікувати одиниці $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ з ортами тривимірного векторного простору і розглядати елементи кватерніону при цих одиницях як компоненти вектора. Через те подамо кватерніон у вигляді суми скалярної q_0 та векторної \mathbf{q} частин

$$\mathbf{Q} = q_0 + \mathbf{q}. \tag{Д3.23}$$

4. Кватерніонний добуток двох векторів-кватерніонів складається з векторного добутку цих кватерніонів та їхнього скалярного добутку із протилежним знаком. Дійсно, нехай

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{q}_1 = \mathbf{i} \cdot q_{11} + \mathbf{j} \cdot q_{12} + \mathbf{k} \cdot q_{13};$$

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{q}_2 = \mathbf{i} \cdot q_{21} + \mathbf{j} \cdot q_{22} + \mathbf{k} \cdot q_{23}.$$

Тоді, перемножуючи ці кватерніони-вектори, одержимо (див. (20) та (21):

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 &= -(q_{11} \cdot q_{21} + q_{12} \cdot q_{22} + q_{13}q_{23}) + \\
&\quad + \mathbf{i} \cdot (q_{12}q_{23} - q_{13}q_{22}) + \mathbf{j} \cdot (q_{13}q_{21} - q_{11}q_{23}) + \mathbf{k} \cdot (q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}) = \\
&= -\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2.
\end{aligned} \tag{Д3.24}$$

Як бачимо, добуток двох векторів приводить у результаті не до вектора, а до кватерніону. У цьому кватерніонний добуток істотно вирізняється від векторного. З іншого боку, він містить у собі і векторний і скалярний добутки векторів.

Наслідок 1. Сума кватерніонних добутків двох векторів у зворотному порядку дорівнює подвійному скалярному добуткові цих векторів:

$$\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_2 \circ \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1 = -2\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2. \tag{Д3.24а}$$

Наслідок 2. Різниця між кватерніонними добутками двох векторів у зворотному порядку дорівнює подвійному векторному добуткові першого вектора на другий

$$\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2 \circ \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1 = 2\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2. \tag{Д3.24б}$$

З врахуванням (24), можна подати добуток (22) двох кватерніонів у такому спрощеному вигляді:

$$\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 = q_{10}q_{20} - \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + q_{10} \cdot \mathbf{q}_2 + q_{20} \cdot \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2. \tag{Д3.25}$$

5. Скалярна частина добутку двох кватерніонів дорівнює добутку їхніх скалярних частин мінус скалярний добуток їхніх векторних частин. Векторна частина дорівнює сумі добутків скалярних частин кожного із кватерніонів на векторну частину іншого співмножника і векторного добутку векторних частин.

Наслідок 3. Різниця між добутками двох кватерніонів у зворотному порядку дорівнює подвійному векторному добуткові векторної частини першого кватерніону на векторну частину другого

$$\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 = 2\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2. \quad (\text{Д3.26})$$

6. Множення кватерніонів має властивості асоціативності та дистрибутивності по відношенню до додавання, але не є комутативним (при зміні порядку співмножників у формулі (25) змінюється знак останнього члена - векторного добутку).

7. Кватерніоном, спряженим до заданого (23), називають кватерніон $\tilde{\mathbf{Q}}$ із тією самою скалярною частиною і з протилежною за знаком векторною частиною:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = q_0 - \mathbf{q}. \quad (\text{Д3.27})$$

8. Добуток кватерніону на спряжений до нього дорівнює сумі квадратів усіх його елементів, яка називається **нормою** кватерніону. Доведемо це:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \circ \tilde{\mathbf{Q}} &= (q_0 + \mathbf{q}) \circ (q_0 - \mathbf{q}) = q_0^2 - \mathbf{q} \circ \mathbf{q} = q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \|\mathbf{Q}\| \end{aligned} \quad (\text{Д3.28})$$

9. Якщо норма $\|\mathbf{Q}\|$ кватерніону дорівнює одиниці, кватерніон називають **нормованим**.

10. Спряжене до добутку двох кватерніонів дорівнює добутку їхніх спряжених значень, узятих у зворотному порядку:

$$(\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2) \tilde{\phantom{\mathbf{Q}}} = \tilde{\mathbf{Q}}_2 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_1. \quad (\text{Д3.29})$$

11. Норма добутку двох кватерніонів дорівнює добутку норм співмножників:

$$\|\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2\| = \|\mathbf{Q}_1\| \cdot \|\mathbf{Q}_2\|. \quad (\text{Д3.30})$$

12. Кватерніоном, **зворотним** до заданого кватерніону \mathbf{Q} називається кватерніон \mathbf{Q}^{-1} , добуток якого на заданий дорівнює одиниці;

$$\mathbf{Q} \circ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} \circ \mathbf{Q} = 1. \quad (\text{Д3.31})$$

13. Зворотний кватерніон дорівнює спряженому, поділеному на його норму

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{Q}}}{\|\mathbf{Q}\|}. \quad (\text{Д3.32})$$

14. Будь-який ненульовий кватерніон завжди може бути поданий у вигляді

$$\mathbf{Q} = Q \cdot (\cos \vartheta + \mathbf{e} \cdot \sin \vartheta), \quad (\text{Д3.33})$$

де

$$Q = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (\text{Д3.34})$$

– **модуль** ("довжина") кватерніону,

$$\cos \vartheta = \frac{q_0}{Q}; \quad \sin \vartheta = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{Q}; \quad (0 \leq \vartheta < \pi). \quad (\text{Д3.35})$$

а \mathbf{e} - одиничний вектор напрямку векторної частини кватерніону:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{\mathbf{i} \cdot q_1 + \mathbf{j} \cdot q_2 + \mathbf{k} \cdot q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} = \frac{\mathbf{i} \cdot q_1 + \mathbf{j} \cdot q_2 + \mathbf{k} \cdot q_3}{q} = \\ &= \mathbf{i} \cdot c_{q1} + \mathbf{j} \cdot c_{q2} + \mathbf{k} \cdot c_{q3}. \end{aligned} \quad (\text{Д3.36})$$

Тут позначено

$$q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (\text{Д3.37})$$

– модуль векторної частини кватерніону, а c_{q1}, c_{q2}, c_{q3} - напрямні косинуси додатного напрямку кватерніону відносно базису $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

15. Величину ϑ у поданні (33) називатимемо аргументом кватерніону, а вектор \mathbf{e} (36) - напрямком векторної частини кватерніону.

16. Скалярна частина добутку кватерніонів не змінюється при циклічному переставленні співмножників.

Для двох множників у цьому можна впевнитися безпосередньо з виразу (22)

$$sqal(\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2) = sqal(\mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1). \quad (Д3.38)$$

Доведемо це твердження для трьох співмножників, спираючись на властивість (38), як на доведену:

$$\begin{aligned} sqal(\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_3) &= sqal[\mathbf{Q}_1 \circ (\mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_3)] = sqal[(\mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_3) \circ \mathbf{Q}_1] = \\ sqal[\mathbf{Q}_2 \circ (\mathbf{Q}_3 \circ \mathbf{Q}_1)] &= sqal[(\mathbf{Q}_3 \circ \mathbf{Q}_1) \circ \mathbf{Q}_2] = sqal(\mathbf{Q}_3 \circ \mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2) \end{aligned} \quad (Д3.39)$$

Д3.4. Подання поворотів за допомогою кватерніонів

Алгебра кватерніонів дозволяє подати поворот у просторі у простій і зручній формі. Таке подання базується на наступній фундаментальній теоремі:

Якщо \mathbf{Q} і \mathbf{A} є нескалярними кватерніонами, то величина

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} \quad (Д3.40)$$

є кватерніоном, норма і скалярна частина якого збігається з нормою і скалярною частиною кватерніону \mathbf{A} , а векторна частина виходить повертанням векторної частини кватерніону \mathbf{A} по конусу навколо осі напрямку кватерніону \mathbf{Q} на подвійний кут кватерніону \mathbf{Q} .

Доведення.

Врахуємо визначення зворотного кватерніону (24) і подамо складові кватерніони у формі (25):

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} &= \mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \frac{\tilde{\mathbf{Q}}}{\|\mathbf{Q}\|} = \\ &= \mathbf{Q} \cdot (\cos \vartheta + \mathbf{e} \cdot \sin \vartheta) \circ \mathbf{A} \cdot (\cos \varphi + \mathbf{a} \cdot \sin \varphi) \circ \mathbf{Q} \cdot (\cos \vartheta - \mathbf{e} \cdot \sin \vartheta) / \|\mathbf{Q}\| \end{aligned} ,$$

де Q – модуль кватерніону \mathbf{Q} , $\|\mathbf{Q}\| = Q^2$ - його норма, ϑ – кут, \mathbf{e} – одиничний вектор напрямку цього кватерніону; A, \mathbf{a}, φ - модуль, напрямок і кут кватерніону \mathbf{A} . Таким чином одержуємо

$$\mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} = A \cdot (\cos \vartheta + \mathbf{e} \cdot \sin \vartheta) \circ (\cos \varphi + \mathbf{a} \cdot \sin \varphi) \circ (\cos \vartheta - \mathbf{e} \cdot \sin \vartheta).$$

Здійснимо перемножування

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} &= A \{ \cos^2 \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \cdot \mathbf{e} + \cos^2 \vartheta \sin \varphi \cdot \mathbf{a} - \\ &- \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \cdot \mathbf{e} + \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cdot \mathbf{e} \circ \mathbf{a} - \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cdot \mathbf{a} \circ \mathbf{e} - \\ &- \sin^2 \vartheta \cos \varphi \cdot \mathbf{e} \circ \mathbf{e} - \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cdot \mathbf{e} \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{e} \} \end{aligned} \quad (Д3.41)$$

Усе звелось до кватерніонних добутків векторів, які визначаються співвідношенням (24). З останнього випливає:

$$\begin{aligned} 1) \mathbf{e} \circ \mathbf{e} &= -\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{e} = -1; \\ 2) \mathbf{e} \circ \mathbf{a} &= -\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{e} \times \mathbf{a}; \\ 3) \mathbf{a} \circ \mathbf{e} &= -\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{e} \times \mathbf{a}; \end{aligned} \quad (Д3.42)$$

$$4) \quad \mathbf{e} \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{e} = \mathbf{e} \circ (\mathbf{a} \circ \mathbf{e}) = \mathbf{e} \circ (-\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{e} \times \mathbf{a}) = -(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) - \\ - \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) = -\cos \varepsilon \cdot \mathbf{e} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) = -2 \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e} + \mathbf{a}$$

Тут позначено ε - кут між напрямками осей кватерніонів \mathbf{e} і \mathbf{a} . При виведенні останньої формули враховано, що векторно-скалярний добуток з однакових векторів дорівнює нулю. Підставляючи (42) у (41), матимемо:

$$\mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} = A\{\cos \varphi + \\ + \sin \varphi[(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \cdot \mathbf{a} + 2 \sin^2 \vartheta \cdot \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{a})]\} = \\ = A\{\cos \varphi + \sin \varphi[\cos 2\vartheta \cdot \mathbf{a} + (1 - \cos 2\vartheta) \cdot \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e} + \sin 2\vartheta \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{a})]\}. \quad (Д3.43)$$

Порівнюючи вираз у квадратних дужках із правою частиною (11), можна зробити висновок, що він збігається з виразом вектора \mathbf{a} , повернутого на кут 2ϑ відносно осі \mathbf{e} , тобто відносно осі кватерніону \mathbf{Q} . Це й треба було довести.

Операція (40) змінює лише векторну частину кватерніону, тому її можна розглядати як операцію перетворення вектора \mathbf{x} у вектор \mathbf{x}' згідно формули

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{Q}^{-1} \quad . \quad (Д3.44)$$

Це перетворення є обертанням навколо деякої осі, причому перетворення у вигляді (44) одразу визначає вісь цього обертання. Цією віссю є векторна частина \mathbf{q} кватерніону \mathbf{Q} , оскільки ця вісь не змінюється цим перетворенням:

$$\mathbf{q}' = \mathbf{Q} \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \circ \mathbf{q} \circ (q_0 - \mathbf{q}) / \|\mathbf{Q}\| = \mathbf{Q} \circ (q_0 \mathbf{q} - \mathbf{q} \circ \mathbf{q}) / \|\mathbf{Q}\| = \\ = \mathbf{Q} \circ (q_0 - \mathbf{q}) \circ \mathbf{q} / \|\mathbf{Q}\| = \mathbf{Q} \circ \mathbf{Q}^{-1} \circ \mathbf{q} = \mathbf{q}. \quad (Д3.45)$$

Щоб подати поворот системи відліку навколо деякої осі на кут δ , досить у перетворенні (44) узяти як перетворюючий кватерніон \mathbf{Q} нормований кватерніон із кутом кватерніону, що дорівнює половині кута δ :

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{e} \cdot \sin \frac{\delta}{2}, \quad (Д3.46)$$

де \mathbf{e} - є одиничним вектором напрямку, навколо якого здійснюється поворот на кут δ . Наприклад, для опису повороту від початкової системи відліку S можна під \mathbf{e} розуміти вектор-кватерніон вигляду:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_S = e_{1S} \cdot \mathbf{1}_S + e_{2S} \cdot \mathbf{2}_S + e_{3S} \cdot \mathbf{3}_S; \quad (e_{1S}^2 + e_{2S}^2 + e_{3S}^2 = 1), \quad (Д3.47)$$

де e_{1S}, e_{2S}, e_{3S} - напрямні косинуси осі повороти у початковій системі відліку.

Чотири компоненти кватерніону повороту (46):

$$\lambda = e_{1S} \cdot \sin \frac{\delta}{2}; \mu = e_{2S} \cdot \sin \frac{\delta}{2}; \nu = e_{3S} \cdot \sin \frac{\delta}{2}; \rho = \cos \frac{\delta}{2}; \quad (Д3.48)$$

одержали назву параметрів Ейлера або параметрів Родріга-Гамільтона.

Перейдемо до подання поворотів систем відліку. Нехай потрібно описати поворот від системи S до системи P . Тоді, позначаючи кватерніон такого повороту через

$$\mathbf{Q}^{SP} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{e}^{SP} \cdot \sin \frac{\delta}{2}, \quad (Д3.49)$$

де \mathbf{e}^{SP} - одиничний вектор осі, поворот навколо якої системи відліку S на кут δ переводить її у систему P , можна подати у цілому перетворення будь-якого вектора-кватерніона \mathbf{x}_P , заданого своїми проекціями на осі системи P , у вектор-кватерніон \mathbf{x}_S , що складається із проєкцій цього вектора на осі початкової системи, у такому вигляді (див. (44))

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{Q}^{SP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \quad . \quad (Д3.50)$$

Через те що кватерніон \mathbf{Q}^{SP} повороту має однакові складові як у початковій, так й у кінцевій системі відліку, перетворення може бути записане у двох еквівалентних формах

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{Q}_S^{SP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}_S^{SP} \quad . \quad (Д3.51)$$

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{Q}_P^{SP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}_P^{SP} \quad .$$

Зворотний перехід - від системи P до системи S - може бути описаний кватерніоном \mathbf{Q}^{PS} , який, очевидно, матиме той самий напрямок векторної частини, що й кватерніон \mathbf{Q}^{SP} , той самий аргумент, але протилежного знаку, тобто буде спряженим до останнього:

$$\mathbf{Q}^{PS} = \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \quad . \quad (Д3.52)$$

Відшукаємо явні вирази компонент кватерніону

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{1}_S \cdot x_{1S} + \mathbf{2}_S \cdot x_{2S} + \mathbf{3}_S \cdot x_{3S} \quad (Д3.53)$$

у відповідності з виразом (43), який слід розуміти так. У початковому стані система відліку P збігається із системою S. В ній задано вектор \mathbf{x} своїми проєкціями на осі системи P (отже, і S):

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{1}_P \cdot x_{1P} + \mathbf{2}_P \cdot x_{2P} + \mathbf{3}_P \cdot x_{3P} = \mathbf{1}_S \cdot x_{1P} + \mathbf{2}_S \cdot x_{2P} + \mathbf{3}_S \cdot x_{3P} \quad . \quad (Д3.54)$$

Потім здійснюється поворот системи P у нове положення. Цей поворот описаний кватерніоном \mathbf{Q}^{SP} , векторна частина якого задана своїми проєкціями на осі тієї ж системи S:

$$\mathbf{Q}_S^{SP} = q_0 + \mathbf{1}_S \cdot q_{1S} + \mathbf{2}_S \cdot q_{2S} + \mathbf{3}_S \cdot q_{3S} = q_0 + \mathbf{1}_S \cdot q_1 + \mathbf{2}_S \cdot q_2 + \mathbf{3}_S \cdot q_3 \quad . \quad (Д3.55)$$

Разом із системою P повертається і вектор \mathbf{x} . Потрібно визначити проєкції цього вектора на осі системи S.

Враховуючи в (51) вирази (53)...(55) і здійснюючи операції кватерніонного множення, одержимо:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_S &= \mathbf{1}_S \cdot x_{1S} + \mathbf{2}_S \cdot x_{2S} + \mathbf{3}_S \cdot x_{3S} = (q_0 + \mathbf{1}_S \cdot q_{1S} + \mathbf{2}_S \cdot q_{2S} + \mathbf{3}_S \cdot q_{3S}) \circ \\ &\circ (\mathbf{1}_S \cdot x_{1P} + \mathbf{2}_S \cdot x_{2P} + \mathbf{3}_S \cdot x_{3P}) \circ (q_0 - \mathbf{1}_S \cdot q_{1S} - \mathbf{2}_S \cdot q_{2S} - \mathbf{3}_S \cdot q_{3S}) = \\ &= \mathbf{1}_S \{ (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \cdot x_{1P} + 2(q_1q_2 - q_0q_3) \cdot x_{2P} + 2(q_0q_2 + q_1q_3) \cdot x_{2P} \} + \\ &+ \mathbf{2}_S \{ 2(q_1q_2 + q_0q_3) \cdot x_{1P} + (q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2) \cdot x_{2P} + 2(q_3q_2 - q_1q_0) \cdot x_{3P} \} + \\ &+ \mathbf{3}_S \{ 2(q_1q_3 - q_0q_2) \cdot x_{1P} + 2(q_0q_1 + q_2q_3) \cdot x_{2P} + (q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2) \cdot x_{3P} \} . \end{aligned}$$

З цього випливає

$$\begin{aligned} x_{1S} &= (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \cdot x_{1P} + 2(q_1q_2 - q_0q_3) \cdot x_{2P} + 2(q_0q_2 + q_1q_3) \cdot x_{2P}; \\ x_{2S} &= 2(q_1q_2 + q_0q_3) \cdot x_{1P} + (q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2) \cdot x_{2P} + 2(q_3q_2 - q_1q_0) \cdot x_{3P}; \\ x_{3S} &= 2(q_1q_3 - q_0q_2) \cdot x_{1P} + 2(q_0q_1 + q_2q_3) \cdot x_{2P} + (q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2) \cdot x_{3P} . \end{aligned}$$

Порівнюючи знайдені співвідношення з (1), можна впевнитися, що матриця напрямних косинусів C^{SP} однозначно визначається параметрами кватерніону повороту у такий спосіб:

$$C^{SP} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 & 2(q_3q_2 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= E + 2 \begin{bmatrix} -q_2^2 - q_3^2 & q_1q_2 - q_0q_3 & q_0q_2 + q_1q_3 \\ q_1q_2 + q_0q_3 & -q_1^2 - q_3^2 & q_3q_2 - q_0q_1 \\ q_1q_3 - q_0q_2 & q_0q_1 + q_2q_3 & -q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} = \\
&= E + 2q_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -q_2^2 - q_3^2 & q_1q_2 & q_1q_3 \\ q_1q_2 & -q_1^2 - q_3^2 & q_3q_2 \\ q_1q_3 & q_2q_3 & -q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} = \\
&= E + 2q_0 \cdot (q \times) + 2 \cdot (q \times) \cdot (q \times) = E + 2[q_0 \cdot E + (q \times)] \cdot (q \times). \quad (Д3.56)
\end{aligned}$$

Тут використане позначення

$$(q \times) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (Д3.57)$$

яке є кососиметричною матрицею, яка складається з компонентів векторної частини кватерніону на кшталт того, як кососиметрична матриця складається із проєкцій вектора.

З (56) легко визначити слід МНК:

$$Tr(C^{SP}) = 3q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = 4q_0^2 - 1 = 4 \cos^2 \frac{\delta}{2} - 1 = 2 \cos \delta + 1, \quad (Д3.58)$$

що доказує співвідношення (4).

Аналогічно доводиться і слушність (5). Наприклад

$$c_{32} - c_{23} = 4q_0q_1 = 4 \cos \frac{\delta}{2} q_1 = 4 \cos \frac{\delta}{2} \sin \frac{\delta}{2} \cdot e_{1S} = 2 \sin \delta \cdot e_{1S},$$

звідки впливає перше співвідношення (5).

Неважко довести, що (56) є кватерніонним аналогом співвідношення (7). Дійсно, враховуючи, що у цьому випадку скалярна частина кватерніону переходу

від початкової системи S до кінцевої P дорівнює $q_0 = \cos \frac{\delta}{2}$, а компоненти

векторної частини кватерніону повороту зв'язані із проєкціями одиничного вектора e співвідношеннями

$$q_1 = \sin \frac{\delta}{2} \cdot e_1; \quad q_2 = \sin \frac{\delta}{2} \cdot e_2; \quad q_3 = \sin \frac{\delta}{2} \cdot e_3,$$

можна перетворити (7) наступним чином:

$$\begin{aligned}
C^{SP} &= \cos \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos \delta) \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_1 & e_2^2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & e_3^2 \end{bmatrix} + \sin \delta \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= (2q_0^2 - 1) \cdot E + 2 \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \cdot \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_1 & e_2^2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & e_3^2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \sin \frac{\delta}{2} \cdot \cos \frac{\delta}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2q_0^2 - 1) \cdot E + 2 \cdot \begin{bmatrix} q_1^2 & q_1q_2 & q_1q_3 \\ q_2q_1 & q_2^2 & q_2q_3 \\ q_3q_1 & q_3q_2 & q_3^2 \end{bmatrix} + 2 \cdot q_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= (2q_0^2 - 1) \cdot E + 2 \cdot [(1 - q_0^2) \cdot E + (q \times) \cdot (q \times)] + 2 \cdot q_0 \cdot (q \times) = \\
&= E + 2 \cdot (q \times) \cdot (q \times) + 2 \cdot q_0 \cdot (q \times).
\end{aligned}$$

Це й потрібно було довести.

Установимо тепер правило перетворення кватерніонів поворотів при складанні поворотів. Нехай перший перехід від початкової системи відліку S до проміжної системи T описується кватерніоном Q^{ST} , а другий перехід - від системи T до системи P - кватерніоном Q^{TP} . Тоді, користуючись (45), можна записати

$$x_S = Q^{ST} \circ x_T \circ \tilde{Q}^{ST}; \quad x_T = Q^{TP} \circ x_P \circ \tilde{Q}^{TP}; \quad x_S = Q^{SP} \circ x_P \circ \tilde{Q}^{SP}.$$

Підставивши другий вираз у перший, матимемо

$$x_S = Q^{ST} \circ Q^{TP} \circ x_P \circ \tilde{Q}^{TP} \circ \tilde{Q}^{ST},$$

порівнюючи який із третім виразом, одержимо

$$Q^{SP} = Q^{ST} \circ Q^{TP}. \quad (Д3.59)$$

Звідси випливає такий висновок:

кватерніон результуючого повороту дорівнює кватерніонному добутку кватерніонів складових поворотів у порядку (зліва направо) здійснення самих поворотів.

На завершення наведемо порівняльний аналіз зазначених математичних моделей поворотів систем відліку:

1) опис поворотів за допомогою трьох кутів послідовних поворотів є одним із найкомпактніших (бо містить лише три параметри - кути Ейлера), але він вироджується при певних значеннях кута другого повороту, не є єдиним і для нього немає досить простого правила складання поворотів;

2) матриця напрямних косинусів є єдиним і найбільш загальним способом опису повороту систем відліку, складання поворотів описується досить простим правилом (2), але вона має дев'ять параметрів, які пов'язані між собою 6 співвідношеннями, через що їх не можна вважати незалежними, і при обчисленнях потрібно на кожному кроці перевіряти, чи виконуються вони;

3) опис поворотів за допомогою векторів Гіббса має ті самі переваги, що й сукупність кутів послідовного повороту, до чого додаються ще наявність правила (12) перетворень векторів Гіббса при складанні поворотів та єдиність подання; недоліком є вироджуваність вектора Гіббса при куті повороту $\delta = \pi$ й складність правила складання (12) при розповсюдженні його більш ніж за два повороти;

4) найбільш удалим є подання поворотів за допомогою кватерніонів; подання повороту у вигляді кватерніону є єдиним, визначається чотирма параметрами, які не вироджуються при будь-яких поворотах, правило (50) складання поворотів для кватерніонів дуже просте - воно зводиться до простого перемножування кватерніонів складових поворотів; але недоліком є зайва кількість параметрів, які пов'язані між собою співвідношенням

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

ДОДАТОК 4. Математичні моделі подання кутової швидкості тіла у просторі

Д4.1. Правило диференціювання вектора у рухомій системі відліку

В механіці часто трапляються ситуації, коли вектор заданий своїми проєкціями на осі деякої рухомої системи відліку, причому прирости цього вектора й у подальшому зручно описувати у саме тій рухомій системі. Оскільки основні закони механіки сформульовані для "нерухомої" інерціальної системи відліку, необхідно встановити залежність між швидкостями змінювання вектора відносно рухомої й нерухомої системи відліку. Для цього, у першу чергу, потрібно вирішити питання: як визначити абсолютну швидкість змінювання вектора (тобто відносно "нерухомої" системи відліку), якщо є відомими його відносні (відносно рухомої системи відліку) координати і завдане обертання рухомої системи відліку в абсолютній системі відліку?

Нехай рухома P і нерухома S системи відліку мають спільний початок. Розглянемо довільний вектор \mathbf{a} , початок якого суміщено з початком обох систем відліку (див. рис. Д1.1). Абсолютне положення кінця вектора (точки A) пов'язане з відносними його координатами матричним співвідношенням

$$A_S = C^{SP} \cdot A_P, \quad (\text{Д4.1})$$

де A_S і A_P - матриці-стовпці із проєкцій вектора на осі відповідно нерухомої й рухомої систем відліку, а C^{SP} - матриця напрямних косинусів переходу від нерухомої до рухомої системи відліку.

Знайдемо похідну за часом від обох частин цієї матричної рівності:

$$\frac{dA_S}{dt} = C^{SP} \cdot \frac{dA_P}{dt} + \frac{dC^{SP}}{dt} \cdot A_P. \quad (\text{Д4.2})$$

У лівій частині матричної рівності (2) маємо матрицю-стовпець, що складається з похідних за часом від проєкцій вектора \mathbf{a} на осі нерухомої системи S (тобто проєкції "абсолютної" швидкості змінювання вектора на осі "абсолютної" системи). Перший доданок у правій частині є матрицею-стовпцем із проєкцій швидкості вектора \mathbf{a} відносно рухомої системи, яка є перепроєційованою на осі нерухомої системи S . Другий доданок описує, вочевидь, переносну складову швидкості вектора \mathbf{a} , оскільки залежить від швидкості змінювання елементів матриці напрямних косинусів, яка перетворює абсолютну систему S у рухома P .

Перепроєціюємо рівність (2) на осі рухомої системи відліку, для чого почленно помножимо (2) зліва на матрицю $C^{PS} = (C^{SP})^t$ і врахуємо, що $C^{PS} \cdot C^{SP} = E$ та $E \cdot A_P = A_P$:

$$(C^{SP})^t \cdot \frac{dA_S}{dt} = \frac{dA_P}{dt} + (C^{SP})^t \cdot \frac{dC^{SP}}{dt} \cdot A_P. \quad (\text{Д4.3})$$

Матричний вираз (3) можна прочитати у такий спосіб:

проєкції абсолютної швидкості змінювання будь-якого вектора на осі рухомої системи відліку складаються із двох складових - проєкцій відносної швидкості цього вектора на осі цієї ж рухомої системи та проєкцій переносної швидкості вектора, обумовленої обертанням із деякою кутовою швидкістю рухомої системи відносно абсолютної.

У векторній формі ця залежність має вигляд

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}_P \mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{a}. \quad (\text{Д4.4})$$

Тут позначено $\frac{\tilde{d}_P \mathbf{a}}{dt}$ - локальна похідна вектора \mathbf{a} (його швидкість відносно рухомої системи відліку); $\boldsymbol{\omega}^P$ – вектор абсолютної кутової швидкості рухомої системи.

На основі (4) можна сформулювати **правило диференціювання вектора у рухомій системі відліку**:

абсолютна похідна за часом від вектора дорівнює сумі його локальної похідної (відносно рухомої системи відліку) та векторного добутку вектора абсолютної кутової швидкості обертання цієї рухомої системи на сам вектор.

Можна також сформулювати це правило так:

абсолютна швидкість вектора дорівнює його відносній швидкості, складеній з переносною швидкістю, обумовленою обертанням рухомої системи відліку і рівною векторному добутку вектора абсолютної кутової швидкості рухомої системи відліку на сам вектор.

Д4.2. Кінематичне рівняння Пуассона

Матричне подання векторного співвідношення (4) матиме такий вид

$$(C^{SP})^t \frac{dA_S}{dt} = \frac{dA_P}{dt} + (\boldsymbol{\omega}_P^{PS} \times) \cdot A_P. \quad (\text{Д4.5})$$

Тут $(\boldsymbol{\omega}_P^{PS} \times)$ - позначення кососиметричної матриці із проєкцій вектора кутової швидкості системи P відносно системи S на її осі:

$$(\boldsymbol{\omega}_P^{PS} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{3P}^{PS} & \omega_{2P}^{PS} \\ \omega_{3P}^{PS} & 0 & -\omega_{1P}^{PS} \\ -\omega_{2P}^{PS} & \omega_{1P}^{PS} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{Д4.6})$$

Зіставляючи (5) із (3), можна зробити висновок, що

$$(\boldsymbol{\omega}_P^{PS} \times) = (C^{SP})^t \cdot \frac{dC^{SP}}{dt}. \quad (\text{Д4.7})$$

Це співвідношення зв'язує проєкції кутової швидкості обертання системи P відносно S на осі системи P з матрицею напрямних косинусів між цими системами відліку. В дещо зміненій формі

$$\frac{dC^{SP}}{dt} = C^{SP} \cdot (\boldsymbol{\omega}_P^{PS} \times) \quad (\text{Д4.8})$$

це ж співвідношення може прислужитися задля визначення похідної від МНК за заданими проєкціями кутової швидкості. Воно називається **рівнянням Пуассона**.

Якщо матричне подання (4) записати через проєкції на осі абсолютної системи

$$\frac{dA_S}{dt} = C^{SP} \cdot \frac{dA_P}{dt} + (\boldsymbol{\omega}_S^{PS} \times) \cdot A_S, \quad (\text{Д4.9})$$

де

$$(\omega_S^{PS} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{3S}^{PS} & \omega_{2S}^{PS} \\ \omega_{3S}^{PS} & 0 & -\omega_{1S}^{PS} \\ -\omega_{2S}^{PS} & \omega_{1S}^{PS} & 0 \end{bmatrix}. \quad (D4.10)$$

то, порівнюючи (9) с (2), можна одержати аналогічну залежність для проєкцій кутової швидкості на нерухомі осі

$$(\omega_S^{PS} \times) = \frac{dC^{SP}}{dt} \cdot (C^{SP})^t, \quad (D4.11)$$

звідки

$$\frac{dC^{SP}}{dt} = (\omega_S^{PS} \times) \cdot C^{SP}, \quad (D4.12)$$

яке є однією з форм того ж рівняння Пуассона.

Д4.3. Кінематичні рівняння Ейлера

Найбільш поширеною формою кінематичних рівнянь є така, в якій вони подані через кути Ейлера послідовних поворотів.

Через те що подання повороту через кути послідовних поворотів не є єдиним, форма кінематичних рівнянь у цьому випадку також не є єдиною і визначається цією послідовністю поворотів. Тому розглянемо як приклад кінематичні рівняння для послідовності, поданої на рис. Д2.4 (Додаток 2).

Вектор кутової швидкості ω^P системи P відносно системи S, як очевидно (див. рис. Д2.4), складається із трьох векторних складових, що відповідають швидкостям змінювання трьох кутів послідовних поворотів:

$$\omega^P = \dot{\psi} + \dot{\vartheta} + \dot{\varphi}. \quad (D4.13)$$

Якщо спроеціювати це векторне співвідношення на осі системи S, одержимо (див. рис Д2.4):

$$\begin{cases} \omega_{1S}^P = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cdot \sin \vartheta; \\ \omega_{2S}^P = \dot{\vartheta} \cdot \cos \psi - \dot{\varphi} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \psi; \\ \omega_{3S}^P = \dot{\vartheta} \cdot \sin \psi + \dot{\varphi} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \psi; \end{cases} \quad (D4.14)$$

Проеціювання на осі рухомої системи приводить до результату

$$\begin{cases} \omega_{1P}^P = \dot{\vartheta} \cdot \sin \varphi + \dot{\psi} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi; \\ \omega_{2P}^P = \dot{\vartheta} \cdot \cos \varphi - \dot{\psi} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi; \\ \omega_{3P}^P = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \sin \vartheta. \end{cases} \quad (D4.15)$$

Рівняння типу (14) і (15), які виражають проєкції кутової швидкості деякої системи відліку через швидкості змінювання кутів послідовних поворотів, що визначають кутове положення цієї системи, будемо називати **кінематичними рівняннями Ейлера**.

Окрім цього, так називатимемо у подальшому й обернені рівняння, що виражають швидкості змінювання кутів Ейлера через проєкції кутової швидкості:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \omega_{1S}^P - tg\vartheta \cdot (\omega_{3S}^P \cdot \cos\psi - \omega_{2S}^P \cdot \sin\psi); \\ \dot{\vartheta} = \omega_{2S}^P \cdot \cos\psi + \omega_{3S}^P \cdot \sin\psi; \\ \dot{\phi} = (\omega_{3S}^P \cdot \cos\psi - \omega_{2S}^P \cdot \sin\psi) / \cos\vartheta; \end{cases} \quad (D4.16)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi} = (\omega_{1P}^P \cdot \cos\phi - \omega_{2P}^P \cdot \sin\phi) / \cos\vartheta; \\ \dot{\vartheta} = \omega_{2P}^P \cdot \cos\phi + \omega_{1P}^P \cdot \sin\phi; \\ \dot{\phi} = \omega_{3S}^P - tg\vartheta \cdot (\omega_{1P}^P \cdot \cos\phi - \omega_{2P}^P \cdot \sin\phi). \end{cases} \quad (D4.17)$$

Д4.4. Кінематичні рівняння у кватерніонах

Для одержання аналогічних рівнянь у кватерніонній формі, скористаємося рівнянням повороту (Д3.42) із Додатка 3. Візьмемо похідну за часом з обох частин цього рівняння. Одержимо (крапка зверху позначає похідну за часом):

$$\dot{\mathbf{a}}_S = \mathbf{Q}^{SP} \circ \dot{\mathbf{a}}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} + \dot{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{a}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} + \mathbf{Q}^{SP} \circ \mathbf{a}_P \circ \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}^{SP}. \quad (D4.18)$$

Перепроєціюємо одержаний результат на осі системи P (див. (Д3.44)):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{a}}_S \circ \mathbf{Q}^{SP} &= \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} \circ \dot{\mathbf{a}}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} + \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{a}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} + \\ &+ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} \circ \mathbf{a}_P \circ \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} = \dot{\mathbf{a}}_P + \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{a}_P + \mathbf{a}_P \circ \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP}. \end{aligned}$$

Використаємо співвідношення

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} = 1,$$

яке випливає з того, що кватерніон повороту є нормованим. Диференціюючи його за часом, одержимо

$$\dot{\tilde{\mathbf{Q}}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} = -\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP}.$$

З врахуванням цього можна записати:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{a}}_S \circ \mathbf{Q}^{SP} &= \dot{\mathbf{a}}_P + \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{a}_P - \mathbf{a}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP} = \\ &= \dot{\mathbf{a}}_P + 2 \cdot (\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP}) \times \mathbf{a}_P \end{aligned} \quad (D4.19)$$

Тут враховано властивість (Д3.18а) і позначено $(\mathbf{Q}) \times = \mathbf{q} \times$ векторний добуток векторної частини кватерніону \mathbf{Q} на наступний вектор.

Доведемо, що добуток спряженого до кватерніону повороту на його похідну за часом завжди є вектором, тобто його скалярна частина дорівнює нулеві:

$$sqal(\tilde{\mathbf{Q}} \circ \dot{\mathbf{Q}}) = 0. \quad (D4.20)$$

Доведення. Запишемо кватерніон повороту у виді (див. (Д3.38), (Д3.39))

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \cdot (e_1 \cdot \mathbf{i} + e_2 \cdot \mathbf{j} + e_3 \cdot \mathbf{k}), \quad (D4.21)$$

причому виконується співвідношення

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \quad (D4.22)$$

Тоді матимемо:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \cos \frac{\delta}{2} - \sin \frac{\delta}{2} \cdot (e_1 \cdot \mathbf{i} + e_2 \cdot \mathbf{j} + e_3 \cdot \mathbf{k}); \quad (D4.23)$$

$$\Omega_S^{PS} = 2 \cdot \frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt} \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP}, \quad (Д4.28)$$

де позначено

$$\Omega_S^{PS} = \mathbf{1}_S \cdot \omega_{1S}^{PS} + \mathbf{2}_S \cdot \omega_{2S}^{PS} + \mathbf{3}_S \cdot \omega_{3S}^{PS}. \quad (Д4.29)$$

Інакше це можна записати у такий спосіб

$$\frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt} = \frac{1}{2} \Omega_S^{PS} \circ \mathbf{Q}^{SP}, \quad (Д4.30)$$

Резюмуючи, можна сформулювати наступні **правила визначення вектора кутової швидкості**:

вектор-кватерніон із проєкцій кутової швидкості однієї системи відліку відносно іншої на осі першої системи дорівнює подвійному добуткові спряженого кватерніону повороту від другої системи до першої на похідну за часом від кватерніону того ж повороту;

вектор-кватерніон із проєкцій кутової швидкості однієї системи відліку відносно іншої на осі другої (початкової) системи дорівнює подвійному добуткові похідної за часом від кватерніону повороту від другої системи до першої на спряжений кватерніон того ж повороту.

Д4.5. Кінематичні рівняння орієнтації штучного супутника Землі

У задачах кутової орієнтації штучного супутника Землі (ШСЗ) задля визначення поточного кутового положення ШСЗ (зв'язаної з ним системи відліку) відносно орбітальної системи відліку у ряді випадків використовують вимірювальну інформацію про проєкції абсолютної кутової швидкості ШСЗ на осі зв'язаної системи відліку, яку одержують за допомогою блоку гіроскопічних тахометрів. За цією інформацією по кінематичних рівняннях у тій чи іншій формі, інтегруючи їх, одержують інформацію про шукане кутове положення ШСЗ. При цьому, вочевидь, потрібно також використовувати інформацію про кутову швидкість орбітальної системи у інерціальному просторі. Таку інформацію одержують у вигляді проєкцій поточного значення вектора орбітальної кутової швидкості на осі саме орбітальної системи відліку.

Використаємо попередні позначення, вважаючи

- S – орбітальна система відліку;
- P – система координат, зв'язана з корпусом ШСЗ;
- ω^{PS} - вектор кутової швидкості повороту ШСЗ відносно орбітальної системи координат,

а також уведемо позначення:

- ω^P - вектор абсолютної (відносно інерціального простору) кутової швидкості ШСЗ;
- ω^S - вектор абсолютної кутової швидкості орбітальної системи відліку.

Між ними існує наступний зв'язок:

$$\omega^{PS} = \omega^P - \omega^S. \quad (Д4.31)$$

Рівняння (8) Пуассона у цьому випадку набуває вигляд:

$$\frac{dC^{SP}}{dt} = C^{SP} \cdot (\omega_P^{PS} \times) = C^{SP} \cdot (\omega_P^P \times) - C^{SP} \cdot (\omega_P^S \times).$$

Як зазначалося, вектор ω^P належить припускати відомим у проекціях на осі зв'язаної системи, тобто вважати відомою матрицю $(\omega_P^P \times)$, а вектор ω^S слід вважати відомим у проекціях на осі системи координат S.

Щоб виразити $(\omega_P^S \times)$ через відому матрицю $(\omega_S^S \times)$, скористаємося співвідношенням (Д2.21), яке у цьому випадку набуде вигляду

$$(\omega_P^S \times) = (C^{SP})^t \cdot (\omega_S^S \times) \cdot C^{SP}.$$

Підставлення його у попереднє співвідношення приводить до практично корисної форми кінематичного рівняння Пуассона

$$\frac{dC^{SP}}{dt} = C^{SP} \cdot (\omega_P^{PS} \times) - (\omega_S^S \times) \cdot C^{SP}. \quad (Д4.32)$$

Аналогічно можна відшукати кватерніонне рівняння орієнтації. Для цього скористаємося рівнянням (26). З врахуванням (31) його можна подати у вигляді

$$\frac{dQ^{SP}}{dt} = \frac{1}{2} (Q^{SP} \circ \Omega_P^P - Q^{SP} \circ \Omega_S^S). \quad (Д4.33)$$

Якщо тепер використати перетворення (Д3.45) у формі

$$\Omega_P^S = \tilde{Q}^{SP} \circ \Omega_S^S \circ Q^{SP},$$

то одержимо з (33)

$$\frac{dQ^{SP}}{dt} = \frac{1}{2} (Q^{SP} \circ \Omega_P^P - \Omega_S^S \circ Q^{SP}). \quad (Д4.34)$$

Кінематичні рівняння (32) і (34) використовуються при побудові систем орієнтації ШСЗ.

ДОДАТОК 5. Кінематика твердого тіла

Д5.1. Швидкість точки тіла, яке рухається

Щоб визначити швидкість довільної точки твердого тіла (див. рис. Д2.1, Додаток 2) достатньо продиференціювати за часом загальний вираз (Д2.2) для радіуса-вектора точки

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + ix + jy + kz, \quad (Д5.1)$$

або в матричній формі (Д2.8)

$$R_S = R_{oS} + C^{SP} \cdot R_P. \quad (Д5.2)$$

При диференціюванні будемо припускати, що рухома система відліку Р є жорстко пов'язаною з тілом, рух якого досліджується. З того випливає, що координати x , y і z точки у системі Р, отже й матриця-стовпець R_P і вектор \mathbf{p} , є величинами незмінними, а величини \mathbf{r}_o , \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , R_{oS} , C^{SP} можуть залежати від часу.

Позначимо абсолютну (тобто відносно нерухомої системи відліку S) швидкість довільної точки тіла через $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, абсолютну швидкість полюса O

через $\mathbf{v}_o = \frac{d\mathbf{r}_o}{dt}$. Тоді, враховуючи правило (Д4.4) диференціювання вектора у рухомій системі відліку, матимемо

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \frac{\tilde{d}_P \mathbf{p}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^{PS} \times \mathbf{p}. \quad (Д5.3)$$

Але, з огляду на вищезазначене, відносна швидкість змінювання вектора \mathbf{p} (відносно рухомої системи Р) дорівнює нулю, а вектор $\boldsymbol{\omega}^{PS}$ кутової швидкості рухомої системи відносно нерухомої у розглядуваному випадку збігається з вектором $\boldsymbol{\omega}$ абсолютної кутової швидкості самого тіла (бо система Р жорстко пов'язана з тілом). Тому

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}. \quad (Д5.4)$$

З одержаної формули випливає, що швидкість довільної точки твердого тіла є геометричною сумою двох векторів: одного - \mathbf{v}_o , однакового для усіх точок тіла і рівного швидкості полюса, та другого - $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$, який змінюється разом із положенням точки у тілі і який має наступні проєкції на осі, що пов'язані з тілом

$$\omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y; \quad \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z; \quad \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x.$$

Вектор \mathbf{v}_o є швидкістю, яку мала б будь-яка точка тіла, якщо б тіло рухалося поступально з цією швидкістю. Вектор $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$ є швидкістю, яку мала б та сама точка тіла, якщо б твердому тілу було надано обертання з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$ навколо осі, що проходить крізь полюс. Через те що проєкції вектора $\boldsymbol{\omega}$, які визначаються співвідношеннями (Д4.7), залежать у загальному випадку від часу, то й вісь обертання може змінювати своє положення відносно тіла (системи Р) і нерухомого простору (системи S). Тому вектор $\boldsymbol{\omega}$ кутової швидкості називають миттєвим. Отже, - швидкість довільної точки твердого тіла є рівнодіючою

швидкості поступального руху разом із полюсом та швидкості внаслідок обертання точки навколо миттєвої осі, що проходить крізь полюс.

Формула (4) має ґрунтовне значення для кінематики твердого тіла. Відносно прийнятої нерухомої системи відліку рух твердого тіла буде повністю визначений, якщо у цьому тілі обрано довільну точку O - полюс і є заданими (як функції часу) два вектори \mathbf{v}_o та $\boldsymbol{\omega}$. Проекції цих векторів на осі, що сполучені з тілом, називатимемо характеристиками руху твердого тіла.

Диференціюючи матричну рівність (2) за тих самих умов, можна дійти матричного аналогу залежності (4) (позначення див. (Д2.7)):

$$\dot{R}_S = \dot{R}_{oS} + \dot{C}^{SP} \cdot R_P. \quad (Д5.5)$$

Зручніше за все подати це рівняння у проекціях на осі рухомої системи. Для цього слід помножити (5) зліва на матрицю $C^{PS} = (C^{SP})^t$:

$$(C^{SP})^t \cdot \dot{R}_S = (C^{SP})^t \cdot \dot{R}_{oS} + (C^{SP})^t \cdot \dot{C}^{SP} \cdot R_P, \quad (Д5.6)$$

або, враховуючи (Д4.7)

$$(C^{SP})^t \cdot \dot{R}_S = (C^{SP})^t \cdot \dot{R}_{oS} + (\boldsymbol{\omega}_P \times) \cdot R_P, \quad (Д5.6a)$$

Тут у лівій частині міститься матриця-стовпець із проекцій абсолютної швидкості точки на осі системи відліку, пов'язаної з тілом, перший доданок правої частини - аналогічні складові швидкості полюса, а останній член - матриця-стовпець із складових переносної швидкості точки, обумовленої обертанням тіла у просторі.

Дійдемо аналогічних співвідношень у кватерніонній формі. За основу візьмемо такий кватерніонний (див. (Д3.42)) аналог векторного співвідношення (1) (або (Д2.1)):

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_{oS} + \mathbf{Q}^{SP} \circ \boldsymbol{\rho}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP}, \quad (Д5.7)$$

де $\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_{oS}, \boldsymbol{\rho}_P$ - вектор-кватерніони точки тіла відповідно у нерухомій системі, полюса у нерухомій системі й точки в рухомій системі відліку, а \mathbf{Q}^{SP} - нормований кватерніон повороту рухомої системи відносно нерухомої.

Якщо продиференціювати (7) і провести необхідні перетворення (див., наприклад (Д4.19) та (Д4.26)), можна одержати остаточно

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{r}}_S \circ \mathbf{Q}^{SP} = \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{r}}_{oS} \circ \mathbf{Q}^{SP} + \boldsymbol{\omega}_P \times \boldsymbol{\rho}_P. \quad (Д5.8)$$

Д5.2. Швидкість полюса

У загальному випадку вектор швидкості полюса може мати довільний напрямок як відносно до нерухомої, так і до зв'язаної з тілом системи відліку. У будь-якій системі відліку вектор \mathbf{v}_o можна повністю охарактеризувати за допомогою завдання його значення та двох кутів між ним і осями обраної координатної системи.

Якщо тіло (наприклад, транспортний засіб) рухається у середовищі, яке чинить опір, зазначені два кути задаються між вектором швидкості полюса й осями системи відліку, яка жорстко пов'язана з тілом. Причина такого обрання полягає у тому, що головний вектор і головний момент сил опору залежать, в основному, від значення вектора швидкості та його орієнтації відносно тіла.

З метою завдання вектора \mathbf{v}_o зазвичай уводять у розгляд так звану *швидкісну систему відліку* $X_V Y_V Z_V$ з початком у полюсі, одна з осей якої орієнтована вдовж вектора швидкості полюса \mathbf{v}_o . Взаємне розташування

швидкісної ($X_V Y_V Z_V$) і пов'язаної з тілом (XYZ) систем, яке прийняте у наш час в аерогідромеханіці, подане на рис. Д5.1

Кут між векторів швидкості полюса та його проекцією на площину XV , який зазвичай позначається β , називається *кутом дрейфу* або *кутом ковзання*. Кут між зазначеною проекцією й віссю X називають *кутом атаки* й позначають літерою α . У динаміці рухомих об'єктів (літаків, ракет-носіїв, снарядів, суден тощо) як площина XV приймається їхня діаметральна площина, тобто вісь X спрямовується удовж повздовжньої осі об'єкта, а вісь Y - удовж нормальної осі об'єкта.

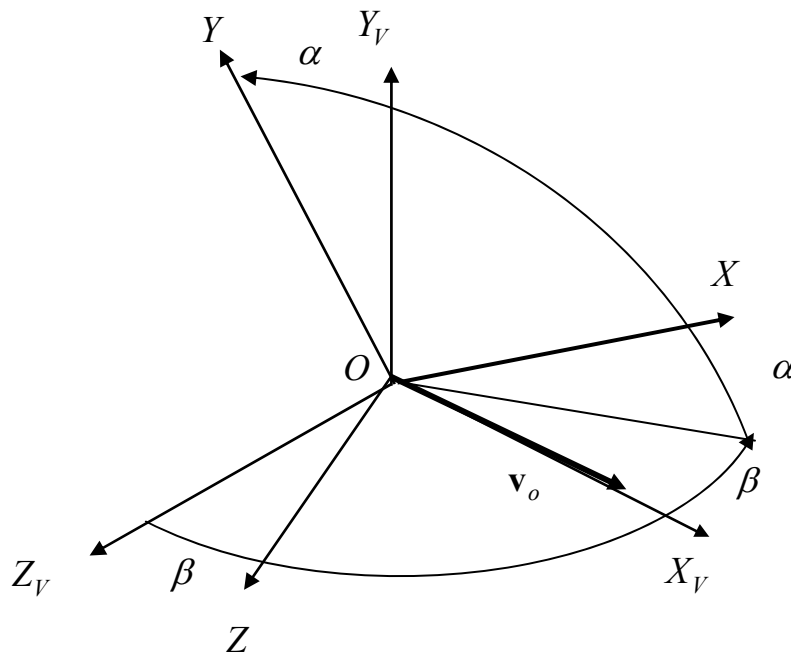


Рис. Д5.1. Швидкісна система відліку

Система $X_V Y_V Z_V$ є зв'язаною лише з напрямком вектора швидкості полюса. Відносно тіла ця координатна система може повертатися, бо кути α й β у більшості випадків є функціями часу.

У відповідності до рис. Д5.1, проекції вектора швидкості полюса на осі зв'язаної з тілом системи відліку є такими:

$$v_{ox} = v_o \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta; \quad v_{oy} = -v_o \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha; \quad v_{oz} = v_o \cdot \sin \beta. \quad (\text{Д5.9})$$

Варто взяти до відома, що проекції вектора швидкості на осі зв'язаної системи самі по собі не можуть повністю охарактеризувати поступальний рух тіла разом із полюсом. Для цього потрібно знати також взаємне положення осей зв'язаної й нерухомої систем відліку, яке визначається матрицею напрямних косинусів.

Д5.3. Прискорення точок твердого тіла

Прискорення довільної точки у твердому тілі відшукується двократним диференціюванням за часом радіуса-вектора цієї точки або диференціюванням вектора її швидкості. У відповідності з (4) одержимо

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_o}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}. \quad (\text{Д5.10})$$

Тут \mathbf{w} - вектор абсолютного прискорення точки тіла, яка має радіус-вектор \mathbf{p} відносно полюса O , $\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{w}_0$ - вектор абсолютного прискорення полюса.

Вектор $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}$ називають вектором кутового абсолютного прискорення тіла.

Використовуючи правило диференціювання вектора у обертовій системі відліку i , враховуючи, як і досі, що за рухомою систему відліку приймається система, жорстко зв'язана з тілом, а потому

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\tilde{d}_P \mathbf{p}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{p} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}, \quad (Д5.11)$$

де $\boldsymbol{\omega}$ - кутова швидкість тіла, перетворимо (10) до вигляду

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}). \quad (Д5.12)$$

Другий доданок у правій частині (12) називається обертальним прискоренням, а третій - доосьовим (доцентровим) прискоренням. Останнє спрямоване вдовж перпендикуляра, який опущено з розглядуваної точки на напрямок вектора миттєвої кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$. Доосьове прискорення можна подати у виді

$$|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})| = |\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p} \cdot \omega^2| = R\omega^2, \quad (Д5.13)$$

де R - відстань від точки до прямої, яка збігається з напрямком осі миттєвого обертання і проходить крізь полюс.

Формула (13) виражає теорему Рівальса про прискорення точки тіла.

Д5.4. Складний рух матеріальної точки

Нехай деяка точка M рухається відносно рухомої системи відліку P , яка у власну чергу переміщується відносно нерухомої системи S . У цьому випадку говорять про складний рух точки, тобто одночасне її переміщення у двох системах відліку - абсолютній S і рухомій P . У відповідності до цього рух точки M у системі P називають відносним, а її рух у системі S - абсолютним. Термін "абсолютний" слід розуміти лише у тому сенсі, що рух точки віднесено до системи S , ще є основною. Рух рухомої системи P по відношенню до нерухомої S є для точки переносним рухом.

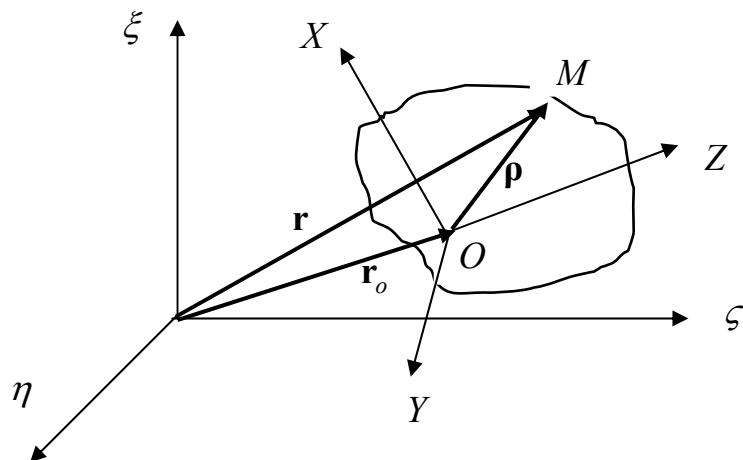


Рис. Д5.2. Кінематика складеного руху матеріальної точки

Положення точки М відносно нерухомої координатної системи визначається її радіусом-вектором \mathbf{r} (рис. Д5.2). Якщо \mathbf{r}_o - радіус-вектор полюса, а \mathbf{p} - радіус-вектор точки М в координатній системі xyz (P), то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{p}. \quad (\text{Д5.14})$$

За зовнішнім виглядом векторна рівність (14) збігається з (Д2.1), але вона суттєво вирізняється від останньої тим, що відносні координати x , y і z вектора \mathbf{p} у загальному випадку є вже не незмінними, а деякими функціями часу.

Д5.4.1. Абсолютна швидкість точки

Абсолютну швидкість точки М, яку позначимо \mathbf{v} , можна одержати диференціюванням абсолютного радіуса-вектора \mathbf{r} за часом. У відповідності із правилом диференціювання вектора, заданого в рухомій системі відліку, застосовуючи цю операцію до (14), отримаємо

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{p} + \frac{\tilde{d}_P \mathbf{p}}{dt}, \quad (\text{Д5.15})$$

де $\boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega}^P$ - переносна кутова швидкість системи xyz (P).

Перші два доданки визначають швидкість точки М при її русі сумісно із системою P відносно S. Позначимо цю швидкість \mathbf{v}_e . Матимемо

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{p}. \quad (\text{Д5.16})$$

Останній доданок у виразі (15) визначає відносну швидкість точки $\mathbf{v}_r = \frac{\tilde{d}_P \mathbf{p}}{dt}$.

Відтак, для визначення абсолютної швидкості точки М:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{p} + \mathbf{v}_r, \quad (\text{Д5.17})$$

яка показує, що у кожному мить абсолютна швидкість точки дорівнює сумі відносної й переносної швидкостей.

Д5.4.2. Абсолютне прискорення точки

Абсолютне прискорення точки визначається як похідна за часом від абсолютної її швидкості

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_o}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega}_e \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt}. \quad (\text{Д5.18})$$

Вектори \mathbf{p} і \mathbf{v}_r задані у рухомій системі координат. Застосовуючи до них правило (Д4.4), одержуємо

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\tilde{d}_P \mathbf{p}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{p} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{p}, \quad (\text{Д5.19})$$

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}_P \mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r, \quad (\text{Д5.20})$$

Таким чином, абсолютне прискорення точки у її складеному русі визначається формулою

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}_o}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{p}) + 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r + \frac{\tilde{d}_P \mathbf{v}_r}{dt}. \quad (\text{Д5.21})$$

Перші три доданки правої частини визначають прискорення тієї точки, незмінно зв'язаної із системою P, в якій у цю мить розташовано точку М. Це прискорення називається переносним \mathbf{w}_e .

Останній член у формулі (21) визначає, очевидно, прискорення точки М у її русі відносно рухомої системи Р. Це прискорення називається відносним і позначається \mathbf{w}_r .

Залишився ще подвійний вектор $\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$, що залежить як від відносного, так й від переносного рухів. Складову прискорення, що визначається цим вектором, називають коріолісовим прискоренням і позначають \mathbf{w}_c .

Таким чином, для абсолютного прискорення точки маємо наступну формулу

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c, \quad (Д5.22)$$

причому

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_e &= \frac{d\mathbf{v}_o}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}); \\ \mathbf{w}_r &= \frac{\tilde{d}_P \mathbf{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}_P^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2}; \end{aligned} \quad (Д5.23)$$

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r.$$

Формула (22) виражає теорему Коріоліса: абсолютне прискорення точки складається з переносного, відносного і коріолісова.

Звернемо увагу на те, що у формулі для визначення переносного прискорення фігурує абсолютна похідна від вектора швидкості полюса. У випадку, коли швидкість полюса задається у рухомій системі відліку, переносне прискорення зручніше подавати у вигляді:

$$\mathbf{w}_e = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_o}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_o + \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}). \quad (Д5.24)$$

Д5.5. Складний рух твердого тіла

Нехай тепер тверде тіло і зв'язаний з ним тригранник Т ($OXYZ$) здійснює рух відносно координатної системи Р ($AX_cY_cZ_c$), а остання, своєю чергою, рухається відносно умовно нерухомої системи координат $S\xi\eta\zeta$. Рух тіла відносно нерухомої системи називають абсолютним, відносно проміжної системи Р – відносним, а рух рухомої проміжної системи Р відносно нерухомої S – переносним.

Положення системи координат $AX_cY_cZ_c$ по відношенню до системи $S\xi\eta\zeta$ визначається трьома координатами ξ_A, η_A, ζ_A полюса А і дев'ятьма напрямними косинусами a_{ik} кутів між осями X_c, Y_c, Z_c і ξ, η, ζ . Аналогічно, положення тіла по відношенню до системи $AX_cY_cZ_c$ задається також трьома "відносними" координатами x_{cO}, y_{cO}, z_{cO} полюса О і дев'ятьма напрямними косинусами b_{ik} між осями систем $AX_cY_cZ_c$ та XYZ . Природно, абсолютному рухові твердого тіла також відповідатимуть також три "абсолютні" координати ξ_O, η_O, ζ_O полюса О (рис. Д5.2) і дев'ять напрямних косинусів кутів між осями XYZ і $\xi\eta\zeta$.

У прикладних задачах часто потрібно визначити один із рухів тіла – абсолютний, переносний або відносний, коли два інших рухи є відомими. Це й складає задачу визначення складеного руху тіла.

Нехай потрібно визначити положення тіла в абсолютному просторі при заданому його відносному положенні й абсолютному положенні рухомої системи.

Як це впливає з рис. Д5.3 безпосередньо, положення полюса O в абсолютній системі координат визначається векторним співвідношенням:

$$\mathbf{r}_O = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}_O, \quad (Д5.25)$$

що відповідає наступним скалярним

$$\begin{cases} \xi_O = \xi_A + a_{11} \cdot x_{cO} + a_{12} \cdot y_{cO} + a_{13} \cdot z_{cO} \\ \eta_O = \eta_A + a_{21} \cdot x_{cO} + a_{22} \cdot y_{cO} + a_{23} \cdot z_{cO} \\ \zeta_O = \zeta_A + a_{31} \cdot x_{cO} + a_{32} \cdot y_{cO} + a_{33} \cdot z_{cO} \end{cases} \quad (Д5.26)$$

і матричному

$$R_{OS} = R_{AS} + A \cdot R_{OP} \quad (Д5.27)$$

співвідношенням. Тут використані позначення:

$$R_{OS} = \begin{bmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{bmatrix}; \quad R_{AS} = \begin{bmatrix} \xi_A \\ \eta_A \\ \zeta_A \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (Д5.28)$$

причому A є матрицею напрямних косинусів переносного руху.

Матриця C напрямних косинусів абсолютного руху дорівнює добуткові матриці A переносного руху й матриці B відносного руху:

$$C = A \cdot B. \quad (Д5.29)$$

Аналогічно визначається положення тіла у відносному русі, якщо є заданими абсолютний і переносний рухи. Обертаючи співвідношення (27), одержуємо

$$R_{OP} = A^t \cdot (R_{OS} - R_{AS}). \quad (Д5.30)$$

а, розв'язуючи (29) відносно матриці B , дійдемо формули

$$B = A^t \cdot C. \quad (Д5.31)$$

Задля визначення координат полюса A у переносному русі можуть бути використані вирази (26) і (27), а для відшукування матриці напрямних косинусів A - вираз

$$A = C \cdot B^t, \quad (Д5.32)$$

що впливає з (29).

Д5.6. Швидкості й прискорення точок твердого тіла у складеному його русі

Розглянемо рух довільної точки M тіла (рис. Д5.3), положення якої відносно зв'язаної системи T задано радіусом-вектором $\boldsymbol{\rho}$. Радіус-вектор цієї точки відносно нерухомої системи у відповідності з рис. Д5.3 подається у вигляді суми

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}, \quad (Д5.33)$$

де \mathbf{r}_O - радіус-вектор полюса O .

Абсолютна швидкість розглядуваної точки M тіла, у відповідності до цього, може бути подана у наступний спосіб:

$$\mathbf{v} = \frac{d \mathbf{r}}{dt} = \frac{d \mathbf{r}_O}{dt} + \frac{d \boldsymbol{\rho}}{dt}. \quad (Д5.34)$$

Першій доданок визначає абсолютну швидкість початку координат системи $OXYZ$, зв'язаної з тілом.

Нехай у подальшому $\boldsymbol{\omega}_r$ - вектор миттєвої кутової швидкості обертання тіла (системи $OXYZ$) відносно проміжної рухомої системи $P (AX_cY_cZ_c)$, а $\boldsymbol{\omega}_e$ - кутова швидкість останньої по відношенню до нерухомої системи $S (S\xi\eta\zeta)$. Вектор $\boldsymbol{\rho}$ зазвичай є заданим у рухомій системі відліку $OXYZ$, яка обертається відносно $S\xi\eta\zeta$ з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_e$. Тому, у відповідності до правила (Д4.4), матимемо:

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt} + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\rho},$$

оскільки у системі відліку $OXYZ$ вектор $\boldsymbol{\rho}$ не змінюється ані за значенням, ані за напрямком.

Отже, швидкість точки тіла визначається так:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\rho} \quad (\text{Д5.35})$$

Цю формулу можна розвинути далі. Через те що вектор \mathbf{r}_O своєю чергою дорівнює сумі $\mathbf{r}_O = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}_O$ (33), то

$$\mathbf{v}_O = \frac{d\mathbf{r}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}_O}{dt}.$$

Вектор $\boldsymbol{\rho}_O$ зазвичай задається у координатному базисі $AX_cY_cZ_c$ проміжної системи відліку P , яка обертається з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_e$. Тому матимемо

$$\mathbf{v}_O = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}_O = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{rO} + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}_O, \quad (\text{Д5.36})$$

де $\mathbf{v}_{rO} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}_O}{dt}$ - швидкість полюса відносно проміжної системи координат.

Підставляючи знайдений результат у (35) знаходимо остаточно:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{rO} + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}_O + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\rho}. \quad (\text{Д5.37})$$

Завважимо, що перші три доданки у цій формулі визначають абсолютну швидкість початку зв'язаної системи відліку.

Тепер продиференціюємо (35) за часом, щоб одержати абсолютне прискорення довільної точки тіла:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_O}{dt} + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_r}{dt} \right) \times \boldsymbol{\rho} + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}.$$

Першій доданок $\frac{d\mathbf{v}_O}{dt}$ визначає абсолютне прискорення полюса O . У відповідності до виразу (36), беручи до уваги, що вектори \mathbf{v}_{rO} і $\boldsymbol{\rho}_O$ задані у проміжній системі, його можна подати у виді:

$$\mathbf{w}_O = \frac{d\mathbf{v}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_{rO}}{dt} + \boldsymbol{\varepsilon}_e \times \boldsymbol{\rho}_O + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}_O) + 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_{rO}. \quad (\text{Д5.38})$$

Вектори $\boldsymbol{\omega}_e$, $\boldsymbol{\omega}_r$ і $\boldsymbol{\rho}_O$ задаються у рухомих системах координат $AX_cY_cZ_c$ і $OXYZ$, тому

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}_e}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\varepsilon}_e;$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}_r}{dt} + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\varepsilon}_r + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r;$$

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt} + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\rho}.$$

Отже

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}_r}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \right) \times \boldsymbol{\rho} + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \\ & = \boldsymbol{\varepsilon}_e \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\varepsilon}_r \times \boldsymbol{\rho} + (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}) + \\ & + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \boldsymbol{\rho}) \end{aligned}$$

Через те що (див. (Д1.6))

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}) = \\ & = -\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r) + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}) = \\ & = -\boldsymbol{\omega}_e \cdot (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}_r) + \boldsymbol{\omega}_r \cdot (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}_e) + \boldsymbol{\omega}_e \cdot (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}_r) - \boldsymbol{\rho} \cdot (\boldsymbol{\omega}_r \cdot \boldsymbol{\omega}_e) \end{aligned}$$

вираз для прискорення стане наступним:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c. \quad (Д5.39)$$

Перша складова визначає *переносне прискорення* \mathbf{w}_e :

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon}_e \times (\boldsymbol{\rho}_O + \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\rho}_O + \boldsymbol{\rho})), \quad (Д5.40)$$

причому перший доданок – це абсолютне прискорення полюса А, другий – обертальне переносне, третє – доосьове переносне прискорення.

Друга складова у (39) – це *відносне прискорення*

$$\mathbf{w}_r = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_{rO}}{dt} + \boldsymbol{\varepsilon}_r \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \boldsymbol{\rho}). \quad (Д5.41)$$

В ньому першій доданок – прискорення полюса О відносно системи $AX_cY_cZ_c$, другий – обертальне відносне, а третій – доосьове відносне прискорення точки, які обумовлені обертанням системи $OXYZ$ відносно проміжної системи $AX_cY_cZ_c$.

Нарешті, остання складова у (39) подає Коріолісове прискорення точки

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}_e \times (\mathbf{v}_{rO} + \boldsymbol{\omega}_r \times \boldsymbol{\rho}), \quad (Д5.42)$$

яке визначається одночасно і переносним, і відносним рухом точки.