

НТУУ "Київський політехнічний інститут"

Кафедра приладів і систем орієнтації і навігації

Ю. Ф. Лазарєв

Лекції

з навчальної дисципліни

"Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації – 3"

Ч. 3. Лекції 10 - 14

Розділ 2. Деякі прикладення теорії

Тема 2.1. Нелінійні властивості маятника

Київ – 2015

Зміст

ЛЕКЦІЯ 10. ТОЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ	3
<i>Контрольні запитання</i>	<i>7</i>
ЛЕКЦІЯ 11. ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ МЕТОДАМИ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ.....	8
<i>Контрольні запитання</i>	<i>10</i>
ЛЕКЦІЯ 12. АМПЛІТУДНО-ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ... 	11
<i>Контрольні запитання</i>	<i>13</i>
ЛЕКЦІЯ 13. ВИПРЯМНИЙ ЕФЕКТ ФІЗИЧНОГО МАЯТНИКА	14
<i>Контрольні запитання</i>	<i>17</i>
ЛЕКЦІЯ 14. МЕТОД БАЛАНСУ.....	18
14.1. Загальний підхід	18
14.2. Лінійна вібрація точки підвісу	20
14.2.1. Вертикальна вібрація.....	20
14.2.2. Горизонтальна вібрація.....	23
14.2.3. Навскісна вібрація основи	27
Висновки.....	28
ЗАПИТАННЯ ДО ТЕМИ 2.1	30
АБЕТКОВИЙ ПОКАЖЧИК	31

Лекція 10. Точне дослідження власних коливань

Одним з часто застосовуваних елементів у приладах і системах орієнтації, навігації і керування рухом у просторі є маятник. Хоча його рідко використовують як самостійний чутливий елемент, але важко уявити більшість систем орієнтації без маятника як однієї з найважливіших її частин. Наведений далі теоретичний матеріал показує, з одного боку, методику використання певних методів досліджування, а з другого, надає можливість вивчити деякі маловідомі, але важливі властивості відомих пристроїв.

Багато нелінійних властивостей фізичного маятника (ФМ) можна вивчити за математичною моделлю, що описується диференціальним рівнянням (2.3) другого порядку.

Теоретичне дослідження зручно проводити за дещо перетвореними рівняннями, передусім зведеними до безрозмірного вигляду. Для цього слід ввести у розгляд безрозмірний час τ , наприклад, за формулою:

$$\tau = \omega_o t,$$

де

$$\omega_o = \sqrt{\frac{mgl}{J_z}}$$

– частота власних малих коливань маятника.

Тепер рівняння маятника можна подати у такому виді:

$$\gamma'' + 2\zeta\gamma' + [1 + n_\eta(\tau)]\sin \gamma = -n_\xi(\tau)\cos \gamma + 2\zeta\phi' + \mu(\tau). \quad (10.1)$$

Тут $\tau = R/(2\sqrt{mgl \cdot J_z})$ – відносний коефіцієнт загасання; $\gamma' = d\gamma/d\tau$ – безрозмірна кутова швидкість маятника; $\gamma'' = d^2\gamma/d\tau^2$ – безрозмірне кутове прискорення маятника; $\phi' = \dot{\phi}/\omega_o$ – безрозмірна кутова швидкість основи; $n_\eta(\tau)$ і $n_\xi(\tau)$ – перевантаження (відношення прискорення до прискорення сили тяжіння) точки підвісу маятника відповідно у вертикальному і горизонтальному напрямках; $\mu(\tau) = M_{OZ}/mgl$ – безрозмірний момент сил, що діють на маятник, окрім сил тяжіння і тертя.

Для деяких випадків диференціальні рівняння доцільно подавати у нормальній формі Коші, тобто у вигляді сукупності диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних. Щодо рівняння (10.1), це можна здійснити, наприклад, введенням наступних нових змінних

$$y_1 = \gamma; \quad y_2 = \gamma'.$$

Тоді рівняння (10.1) можна подати у вигляді системи з двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = y_2; \\ \frac{dy_2}{d\tau} = -2\zeta[y_2 - \phi'(\tau)] - [1 + n_y(\tau)]\sin y_1 - n_x(\tau)\cos y_1 + \mu(\tau). \end{cases} \quad (10.2)$$

Головні висновки про нелінійні особливості поведження ФМ можна зробити, аналізуючи рівняння (10.1) або (10.2).

З досвіду відомо, що період коливань гойдалки залежить від її розмаху: якщо амплітуда розгойдування наближається до 180° , період коливань помітно збільшується. Таку властивість мають лише нелінійні системи (у лінійних стаціонарних системах, поведження яких можна описати лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, частоти власних коливань залишаються такими самими за будь-яких значень амплітуди цих коливань). Її називають *неізохронністю власних коливань*.

Щоб вивчити теоретично цю властивість, розглянемо вільні незгасавні коливання ФМ, коли точка його підвісу нерухома, а коефіцієнт демпфірування дорівнює нулю. У цих умовах рівняння (10.1) маятника набуде вигляду

$$\gamma'' + \sin \gamma = 0. \quad (10.3)$$

Для знаходження *точного розв'язку нелінійного рівняння* (10.3) помножимо його на $d\gamma$ і проінтегруємо:

$$\int_0^\phi \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d\gamma}{d\phi} \right) d\gamma + \int_0^\phi \sin \gamma \cdot d\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} [(\gamma')^2 - (\gamma'_0)^2] - [\cos \gamma - \cos \gamma_0] = 0. \quad (10.4)$$

Співвідношення (10.4) описує відомий результат – *сума кінетичної і потенціальної енергій залишається незмінною протягом усього руху маятника*.

Припустимо, що в початковий момент часу початкова швидкість маятника дорівнює нулю $\gamma'_0 = 0$, а початкове відхилення – деякій величині a ($\gamma_0 = a$). Тоді рівняння (10.4) можна перетворити до такого

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \mp \sqrt{2(\cos \gamma - \cos a)},$$

а отже, можна поділити змінні:

$$\tau = \mp \int_a^\gamma \frac{d\gamma}{\sqrt{2(\cos \gamma - \cos a)}}. \quad (10.5)$$

Власне вираз (10.5) і є шуканим точним розв'язком рівняння (10.3), тільки записаний у незвичній формі (розв'язаний відносно часу, а не відносно шуканої змінної γ). Знак « \rightarrow » слід використовувати в разі зменшення кута γ від a до $-a$, а знак « $+$ » – у разі збільшення куту від $-a$ до a .

Позначимо:

$$k = \sin \frac{a}{2}; \quad \sin z = \frac{1}{k} \sin \frac{\gamma}{2}. \quad (10.6)$$

В цих позначеннях матимемо

$$\begin{aligned} \sqrt{2(\cos \gamma - \cos a)} &= \sqrt{2(1 - 2\sin^2 \frac{\gamma}{2} - 1 + 2\sin^2 \frac{a}{2})} = \\ &= \sqrt{4\sin^2 \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin^2 \frac{a}{2}}\right)} = 2k \cos z. \end{aligned}$$

Диференціюючи другий вираз (10.6), дістанемо

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\gamma}{2} d\gamma = k \cos z dz,$$

звідки

$$d\gamma = \frac{2k \cos z}{\cos \frac{\gamma}{2}} dz = \frac{2k \cos z}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 z}} dz.$$

Тепер розв'язок (10.5) можна подати у вигляді

$$\tau = \mp \int_{\pi/2}^z \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 z}}. \quad (10.7)$$

Функція $\tau(z)$ є багатозначною. Певному значенню величини z відповідає безліч різних моментів часу τ . Щоразу, коли кут γ сягає максимального або мінімального значення, знак перед інтегралом у виразі (10.7) змінюється на протилежний. Наприклад, на першому проміжку, коли кут γ змінюється від свого максимального значення a , зменшуючись і наближаючись до нуля, залежність (10.7) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \tau &= - \int_{\pi/2}^z \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}} = \int_z^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}} - \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}} = K(k) - F(k, z). \end{aligned} \quad (10.8)$$

Тут використано відомі позначення $F(k, z)$ – еліптичного інтегралу першого роду у лежандровій формі $F(k, z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 z}}$; $K(k) = F(k, \frac{\pi}{2})$ – повний еліптичний інтеграл першого роду.

Визначимо період T_o власних незгасаючих коливань маятника.

Щоб визначити проміжок часу, протягом якого маятник опускається від найвищого свого положення до вертикалі, достатньо у виразі (10.7) покласти $z = 0$. Цей проміжок, очевидно, дорівнює четвертій частині шуканого періоду. Тому

$$T_o = 4K(k) = 4K(\sin(\frac{a}{2})). \quad (10.9)$$

Звідси випливає точна формула для частоти власних незгасаючих коливань маятника як функції їх амплітуди

$$\lambda(a) = \frac{2\pi}{T_o} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{K(\sin(\frac{a}{2}))}. \quad (10.10)$$

Побудуємо графік точної скелетної кривої за допомогою вбудованої функції *ellipke*, яка обчислює величину еліптичного інтегралу:

```
% Hronos
% Програма побудови скелетних кривих ФМ
```

```

a=pi/1000:pi/180:pi;
[K,E]=ellipke((sin(a/2)).^2); lam1=sqrt(sin(a)./a); lam=pi./(2*K);
x=0:0.01:1; y=pi*ones(length(x))*180/pi; a2=pi/1000:pi/100:4.5;
lam2=sqrt(3*(sin(a2)-a2.*cos(a2))./a2.^3);
plot(lam,a*180/pi,'.k',lam1,a*180/pi,'*k',lam2,a2*180/pi,'ok',x,y,'-k'), grid,
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',16)
title('Залежність частоти власних коливань ФМ від їх амплітуди')
xlabel('Відносна частота власних коливань')
ylabel('Амплітуда, град.')
legend('точна','лінеаризація по кінцях','пряма лінеаризація',0)

```

Цей графік подано на рис. 10.1 пунктирною лінією.

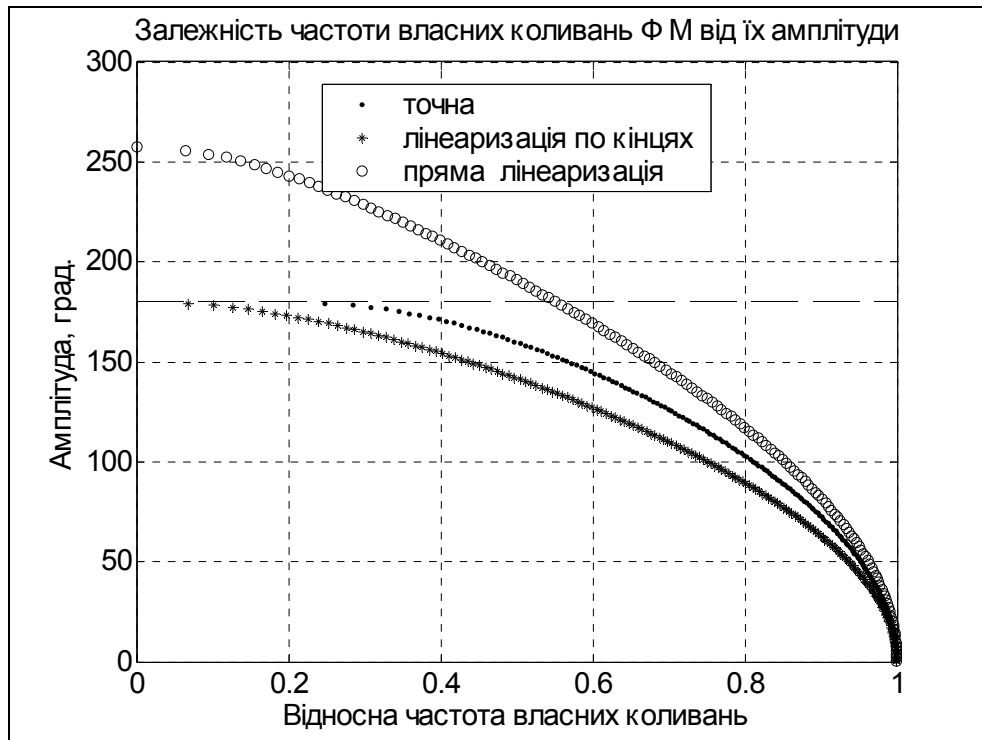


Рис. 10.1. Скелетні криві фізичного маятника

Отже, частота власних коливань маятника залежить від амплітуди цих коливань. Таку властивість нелінійних систем називають *неізохронністю* власних коливань. При збільшенні амплітуди до 180° частота власних коливань маятника зменшується до нуля (період власних коливань збільшується до нескінченності).

Результати чисельного інтегрування у середовищі Matlab рівняння (10.3) показано на рис. 10.2. Отримано графік залежності кута відхилення маятника від вертикалі від часу і фазовий портрет маятника за умови, що початкове відхилення маятника (а отже, і амплітуда його вільних коливань) дорівнює $179,9^\circ$.

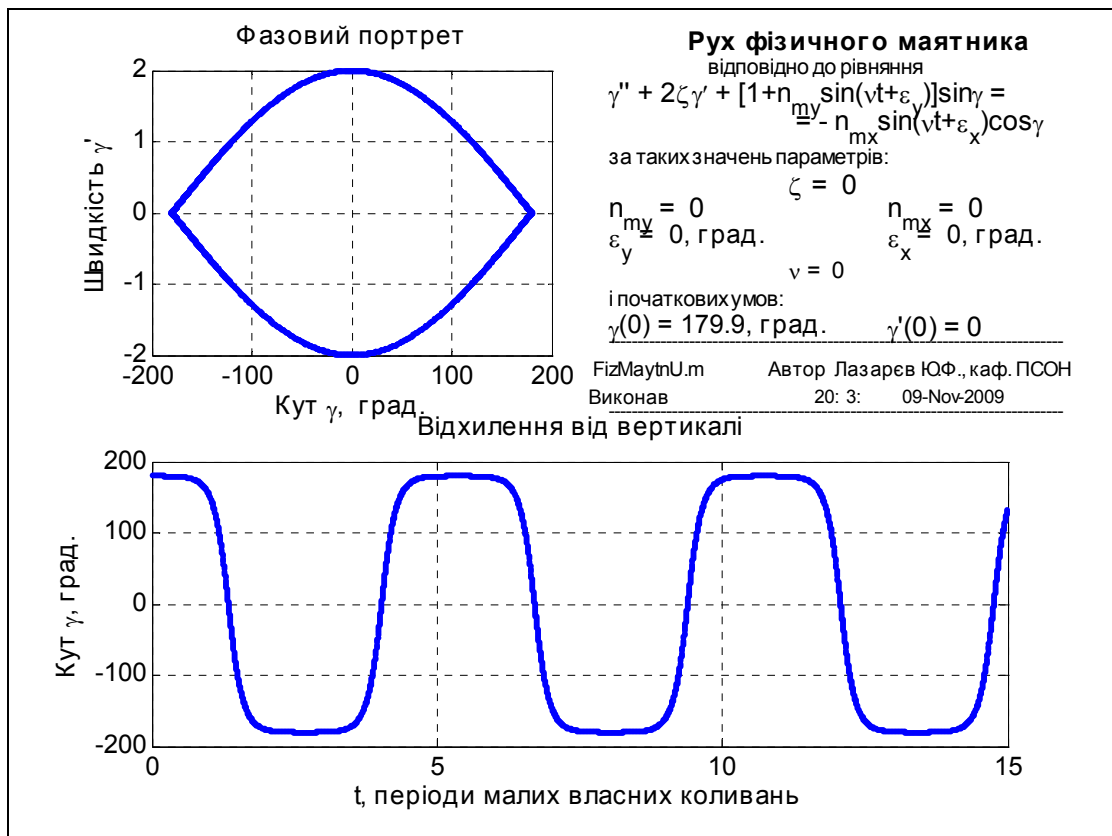


Рис. 10.2. Результати чисельного моделювання вільного руху ФМ

З графіків випливає, що за вказаних умов форма власних коливань суттєво відрізняється від гармонічних, період коливань у 5,366 разів більший за період малих коливань, тобто частота власних коливань становить 0,1864 від частоти коливань за вельми малої амплітуди. Це повністю узгоджується з результатами розрахунків за формулами (10.9) та (10.10).

На рисунку 10.2 наведений так званий *фазовий портрет* руху маятника, тобто *залежність поточної швидкості* обертання маятника від його *узагальної координати* (куту відхилення від вертикалі).

Контрольні запитання

1. Що таке неізохронність коливань?
2. Що називають скелетною кривою? Чому її так назвали?
3. Як змінюється частота власних коливань маятника при збільшенні їх амплітуди?
4. Що називають фазовим портретом коливальної системи?

Лекція 11. Дослідження вільних коливань методами лінеаризації

Точну залежність частоти власних коливань від їх амплітуди вдається встановити далеко не завжди. Наближено таку залежність можна відшукати, якщо застосувати, наприклад один із методів лінеаризації.

Згідно з методами лінеаризації, припускаючи, що ФМ в умовах вільного руху здійснює симетричні відносно вертикалі незгасальні коливання зі сталою амплітудою a , наближено замінимо нелінійний член $\sin \gamma$ на лінійний

$$\sin \gamma \Rightarrow \sigma(a)\gamma.$$

Величина $\sigma(a)$ у загальному випадку є функцією амплітуди a коливань. Конкретний вигляд цієї функції визначається особливостями обраного методу лінеаризації. Якщо розглядувані коливання стаціонарні (тобто їх амплітуда не змінюється з часом), то $\sigma(a)$ є постійною величиною, і відповідне лінеаризоване рівняння

$$\gamma'' + \sigma(a)\gamma = 0$$

стає рівнянням з постійними коефіцієнтами, розв'язок якого такий:

$$\gamma(\tau) = a \cos(\sqrt{\sigma(a)}\tau + \varepsilon). \quad (11.1)$$

Значення амплітуди a і початкової фази ε власних коливань визначаються (як сталі інтегрування) початковими умовами. Не зменшуючи узагальненості результатів, задля спрощення вважатимемо, що у початковий момент часу кут швидкість $\gamma'(0)$ дорівнює нулю, тобто маятник відхилено на початковий кут a від вертикалі і відпущено без поштовху. Тоді розв'язок дещо спрощується

$$\gamma(\tau) = a \cos(\sqrt{\sigma(a)}\tau), \quad (11.2)$$

причому амплітуда a тепер дорівнює початковому відхиленню маятника.

Величина

$$\lambda(a) = \sqrt{\sigma(a)} \quad (11.3)$$

має зміст частоти власних коливань. Точніше, урахувавши безрозмірну форму первинного рівняння, – відношення частоти власних коливань маятника до значення тієї ж частоти при прагненні амплітуди коливань до нуля (малих власних коливань).

Конкретизуємо залежність (11.3).

Спочатку використаємо *лінеаризацію по кінцях*. Згідно з нею, відрізок нелінійної залежності $y = f(x)$, що міститься всередині інтервалу $[-a, a]$, замінюємо на пряму, що проходить крізь точки цього відрізка на кінцях інтервалу (тобто через точки $[-a, f(-a)]$ та $[a, f(a)]$). Тому коефіцієнт лінеаризації $\sigma(a)$, який визначає тангенс кута нахилу прямої до осі абсцис, дорівнюватиме

$$\sigma_1(a) = \frac{f(a) - f(-a)}{2a} = \frac{\sin(a) - \sin(-a)}{2a} = \frac{\sin(a)}{a}. \quad (11.4)$$

Більш складною виявляється аналогічна формула за *прямої лінеаризації*:

$$\sigma_2(a) = \frac{3}{2a^3} \int_{-a}^a xf(x)dx.$$

Через інтегрування частинами цей вираз для розглядуваної нелінійності $\sin x$ приводить до результату

$$\sigma_2(a) = \frac{3}{a^3} [\sin(a) - a \cdot \cos(a)].$$

У теорії нелінійних коливань *графік залежності частоти власних коливань від амплітуди*, побудований так, що амплітуду відкладено вздовж осі ординат, а частоту – вздовж осі абсцис, називають *скелетною кривою*.

Результат розрахунку скелетних кривих наведено на рис. 10.1. Крива із зірочок відповідає лінеаризації по кінцях, а з кіл – прямій лінеаризації.

Аналіз кривих дозволяє зробити висновок, що за великих амплітуд ($a > 1$ рад) криві значно розрізняються. Але якщо амплітуди є малими ($a \ll 1$ рад) обидва види лінеаризації приводять до близьких значень. Упевнимся в цьому.

За малих амплітуд вираз (11.4) набуває наближеного вигляду

$$\sigma_1(a) = \frac{\sin(a)}{a} \approx \frac{1}{a} \left(a - \frac{a^3}{6} \right) = 1 - \frac{a^2}{6}.$$

Аналогічно знайдемо

$$\sigma_2(a) = \frac{3}{a^3} [\sin(a) - a \cos(a)] \approx \frac{3}{a^3} \left[a - \frac{a^3}{6} - a \left(1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} \right) \right] = 1 - \frac{a^2}{8}.$$

Як бачимо, залежності від амплітуди є однотипними (квадратичними), розрізняються вони лише значеннями коефіцієнтів.

Переходячи до виразів власної частоти, матимемо

$$\lambda_1(a) \approx \sqrt{\sigma_1(a)} \approx \sqrt{1 - \frac{a^2}{6}} \approx 1 - \frac{a^2}{12}; \quad \lambda_2(a) \approx \sqrt{\sigma_2(a)} \approx \sqrt{1 - \frac{a^2}{8}} \approx 1 - \frac{a^2}{16}.$$

Згідно методу *гармонічної лінеаризації*, якщо розв'язок рівняння має вигляд (11.2), відповідний кутовий коефіцієнт лінеаризації визначається співвідношенням

$$\sigma_3(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta. \quad (11.5)$$

Безпосереднє застосування формули (11.5) до нелінійності $\sin x$ приводить до інтегралу

$$\sigma_3(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \sin(a \cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta,$$

якого немає серед табличних інтегралів. Тому обмежимося лише випадком малих коливань, розглядаючи замість $\sin \gamma$ його наближений розклад у ряд Маклорена $\gamma - \frac{\gamma^3}{6}$. Застосовуючи формулу (11.5) для цієї нелінійності, матимемо

$$\sigma_3(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \left[a \cos \vartheta - \frac{(a \cos \vartheta)^3}{6} \right] \cos \vartheta d\vartheta = 1 - \frac{a^2}{8}.$$

Отже, за малих амплітуд метод гармонічної лінеаризації приводить до тих самих результатів, що й метод прямої лінеаризації.

Контрольні запитання

1. Які наближені методи дозволяють визначити неізохронність вільних коливань маятника?
2. Чому відрізняються скелетні криві маятника, отримані різними методами? Чи є між ними щось загальне?
3. Чому метод гармонічної лінеаризації приводить до значних похибок у визначенні частоти вільних коливань за великих їх амплітуд?

Лекція 12. Амплітудно-частотні характеристики вимушених коливань

Тепер розглянемо випадок дії на маятник моменту зовнішніх сил. Рівняння (10.1) у цьому разі набуває вигляду

$$\gamma'' + 2\zeta\gamma' + \sin \gamma = \mu(\tau).$$

Припустимо, що момент змінюється з часом за законом

$$\mu(\tau) = \mu_m \cos(\nu\tau + \alpha),$$

де n – відносна частота вібрації, тобто відношення частоти вібрації ω до частоти ω_0 власних малих коливань маятника, $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$; μ_m – амплітуда змінювання безрозмірного моменту; α – початкова фаза вібрації.

Вивчатимемо вимушений рух цієї нелінійної системи за допомогою *методу лінеаризації*. Для цього лінеаризуємо нелінійність $\sin \gamma$, вважаючи, що шуканий розв'язок має вигляд

$$\gamma(\tau) = a \cos \nu\tau, \tag{12.1}$$

що відповідає вимушеним усталеним коливанням маятника з частотою зовнішньої дії. У результаті матимемо лінійне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами

$$\gamma'' + 2\zeta\gamma' + \lambda^2(a)\gamma = \mu_m \cos(\nu\tau + \alpha). \tag{12.2}$$

Тут амплітуда a та фаза α є шуканими величинами.

Підставляючи розв'язок (12.1) у рівняння (12.2) і прирівнюючи коефіцієнти за $\cos \nu\tau$ та $\sin \nu\tau$, отримаємо два алгебричних рівняння відносно двох невідомих a та α :

$$\begin{cases} (\lambda^2(a) - \nu^2)a = \mu_m \cos \alpha; \\ -2\zeta\nu a = -\mu_m \sin \alpha. \end{cases}$$

Вилучаючи з цих рівнянь невідому фазу, дістанемо рівняння лише відносно амплітуди

$$(\lambda^2(a) - \nu^2)^2 + 4\zeta^2\nu^2 = \mu_m^2 / a^2.$$

Розв'яжемо це рівняння з частоти ν вимушених коливань (вона ж є частотою збурювальної сили):

$$\nu = \sqrt{\lambda^2(a) - 2\zeta^2 \pm \sqrt{\frac{\mu_m^2}{a^2} - 4\zeta^2(\lambda^2(a) - \zeta^2)}}. \tag{12.3}$$

Тепер можна побудувати АЧХ, якщо відомі коефіцієнт лінеаризації $\sigma(a)$ як функція амплітуди, параметри маятника і амплітуда μ_m зовнішньої дії. Для цього потрібно задавати певні значення амплітуди a коливань маятника і розраховувати на основі (12.3) відповідні до них значення частоти зовнішньої дії ν .

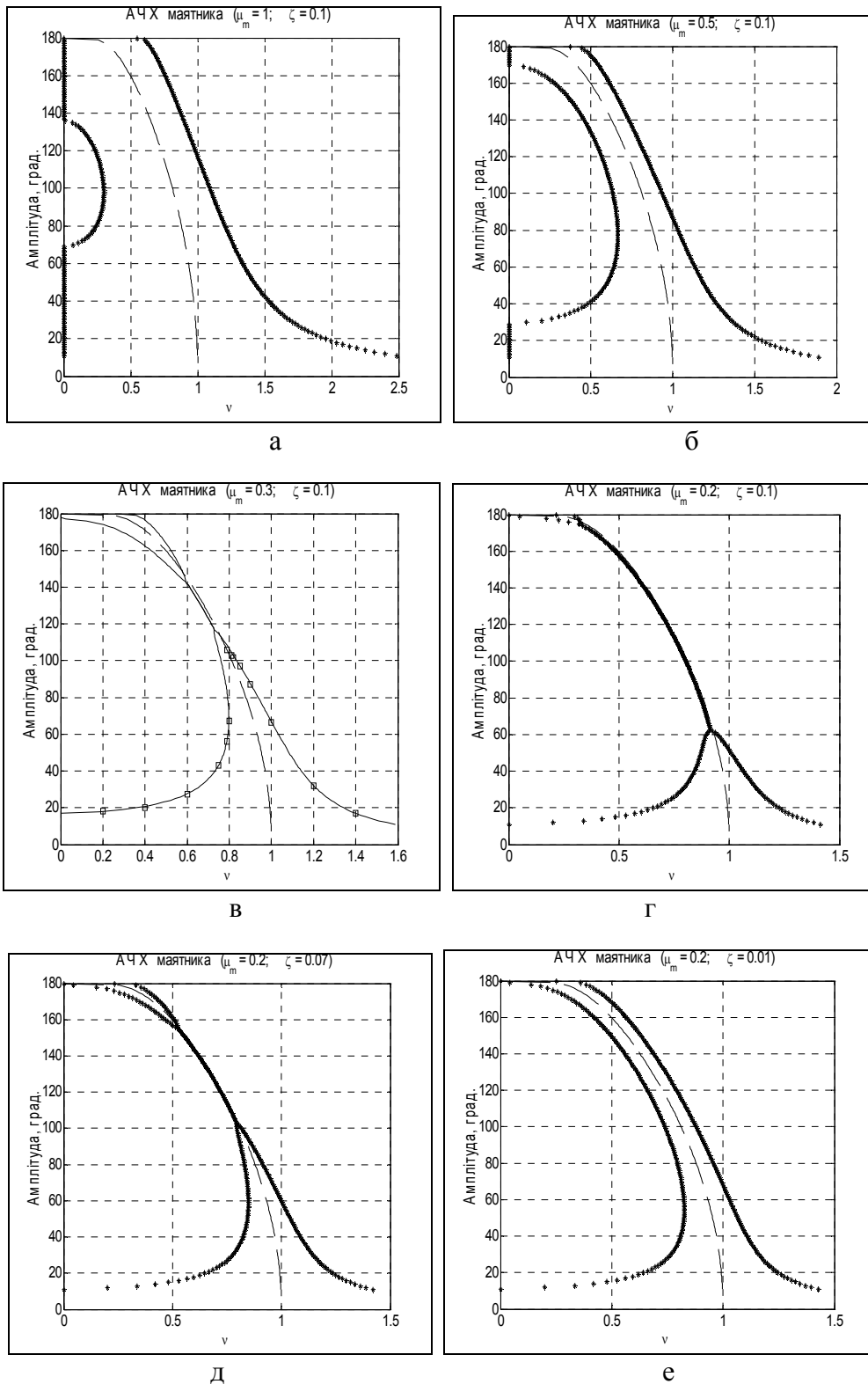


Рис. 12.1. АЧХ маятника за різних умов

Зауважимо, що значення частоти ν , розраховані за виразом (12.3), групуються відносно значень скелетної кривої $\lambda(a)$ як навколо «скелета», чим і обумовлено назву скелетної кривої.

Складемо програму у середовищі Matlab для обчислення значень АЧХ маятника, використовуючи як частоту власних коливань лінеаризованої моделі знайдений раніше точний вираз частоти власних коливань (10.10):

```
%      АСН_ФМ
% Програма побудови графіків АЧХ ФМ
dz=0.1; dz2=dz^2;      nxm=0.3;      % Параметри маятника і зовнішньої дії
str1=sprintf(' \mu_m = %g; ',nxm); str2=sprintf(' \zeta = %g) ',dz);
s=1; da=pi/180; k=0; kn=10;      a=kn*da;      % Параметри для розрахунків
% Розрахунок А Ч Х
for k=1:(180-kn)
    a=a+da;          [K,E]=ellipke((sin(a/2)).^2);
    Lam(k)=pi/(2*K);      lam2=(Lam(k))^2;
    s=(nxm/a)^2-4*dz2*(lam2-dz2); A(k)=a*180/pi; d=sqrt(s);
    Nu1(k)=sqrt(lam2-2*dz2-d);      Nu2(k)=sqrt(lam2-2*dz2+d);
end
% Побудова графіка
plot(Lam,A,'-k',Nu1,A,'k',Nu2,A,'k')
% nus=[0.2 0.4 0.6 0.75 0.79 0.79 0.8 0.81 0.82 0.85 0.9 1 1.2 1.4];
% as=[18.3 20. 27.5 43. 56. 106. 67.3 103. 101.5 97. 87. 66.5 32. 17];
% hold on, plot(nus,as,'sk'), grid,
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize', 16)
title(['А Ч Х маятника',str1,str2])
xlabel('\nu '), ylabel('Амплітуда, град.')
```

Амплітудно-частотні характеристики, побудовані для значення відносно-го коефіцієнта згасання $\zeta = 0,1$ і значень амплітуди моменту сил через вібрацію $\mu_m = 1; 0,5; 0,3$ та $0,2$ відповідно, подані на рис. 12.1, а, б, в, г; АЧХ за амплітуд дії $\mu_m = 0,2$ та $\zeta = 0,07$ і $0,01$ подано на рис. 12.1, д і 12.1, е.

Безпосереднє інтегрування точного диференціального рівняння за $\mu_m = 0.3$ та $\zeta = 0.1$ дає такі результати:

ν	0,2	0,4	0,6	0,75	0,79	0,8	0,79
a , градуси	18,3	20	27,5	43	56	67,3	106
ν	0,81	0,82	0,85	0,9	1	1,2	1,4
a , градуси	103	101,5	97	87	66,5	32	17

Відповідні точки нанесено на рис. 12.1, в у вигляді квадратних маркерів. Неважко впевнитися, що результати моделювання досить добре збігаються з результатами теоретичного дослідження.

Контрольні запитання

1. Які особливості мають АЧХ маятника?
2. Чи можна за АЧХ маятника виявити положення стійких центрів вимушених коливань? їх стійкість? амплітуду цих коливань?
3. Чим відрізняються одна від одної АЧХ маятника за різних амплітуд збурення?

Лекція 13. Випрямний ефект фізичного маятника

При вібрації точки підвісу маятника одночасно у горизонтальному і вертикальному напрямках, спостерігається ще одне цікаве нелінійне явище: *середнє положення маятника за усталених вимушених його коливань буде відхилятися від положення вертикалі у той чи іншій бік*. Таке явище є притаманним лише для нелінійних або лінійних нестационарних систем. В спеціальній літературі з гіроскопії його прийнято називати **випрямним ефектом**. Розглянемо його теоретично, користуючись *методом збурень*.

Для цього скористаємося рівнянням (10.1), у якому вважатимемо основу необертовою, момент сил нульовим, а поступальна вібрація основи здійснюється за законами

$$n_{\eta}(\tau) = n_{ym} \sin(\nu\tau + \varepsilon), \quad n_{\xi}(\tau) = n_{xm} \sin(\nu\tau),$$

тобто припускається, що точка підвісу маятника здійснює гармонійні коливання в вертикальному і горизонтальному напрямках з однією і тією самою частотою, але з різними амплітудами і фазами.

Із врахуванням цього рівняння (10.1) набуде вигляду

$$\gamma'' + 2\zeta\gamma' + [1 + n_{ym} \sin(\nu\tau + \varepsilon)] \sin \gamma = -n_{xm} \sin(\nu\tau) \cos \gamma. \quad (13.1)$$

Відповідно до методу збурень будемо знаходити розв'язок цього рівняння у вигляді ряду

$$\gamma(\tau) = \mu\gamma_{(1)}(\tau) + \mu^2\gamma_{(2)}(\tau) + \dots, \quad (13.2)$$

де μ – деякий малий параметр, $\gamma_{(1)}(\tau)$ і $\gamma_{(2)}(\tau)$ – розв'язки рівнянь першого і другого наближень відповідно.

Рівняння першого і другого наближень утворюються групуванням членів рівняння, що містять як множник малий параметр μ у першому або другому степені відповідно. Для цього *вважатимемо, що амплітуди вібрації основи малі*, тому замінимо у рівнянні (13.1) їх на такі величини

$$n_{ym} \Rightarrow \mu n_{ym}; \quad n_{xm} \Rightarrow \mu n_{xm}. \quad (13.3)$$

Тепер підставимо вирази (13.3) і (13.2) у (13.1) і згрупуємо коефіцієнти при членах рівняння, що мають як множник малий параметр у першому степені. Отримаємо *рівняння першого наближення*:

$$\gamma_{(1)}'' + 2\zeta\gamma_{(1)}' + \gamma_{(1)} = -n_{xm} \sin(\nu\tau). \quad (13.4)$$

Аналогічно, групуючи члени з множником μ^2 , одержимо *рівняння другого наближення*:

$$\gamma_{(2)}'' + 2\zeta\gamma_{(2)}' + \gamma_{(2)} = -n_{ym}\gamma_{(1)} \sin(\nu\tau + \varepsilon). \quad (13.5)$$

Якщо обмежитися знаходженням лише усталених коливань, то розв'язок рівняння (13.4) матиме вигляд:

$$\gamma_{(1)}(\tau) = \gamma_s \sin \nu\tau + \gamma_c \cos \nu\tau, \quad (13.6)$$

де

$$\gamma_s = -\frac{(1-v^2)}{(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2} n_{xm}; \quad \gamma_c = \frac{2\zeta v}{(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2} n_{xm}.$$

Використаємо розв'язок (13.6) для конкретизації правої частини рівняння (13.5) другого наближення:

$$\begin{aligned} \gamma''_{(2)} + 2\zeta\gamma'_{(2)} + \gamma_{(2)} &= -n_{ym}(\gamma_s \sin v\tau + \gamma_c \cos v\tau) \sin(v\tau + \varepsilon) = \\ &= -\frac{n_{xm}n_{ym}}{2[(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2]} \left\{ [(1-v^2) \cos \varepsilon - 2\zeta v \sin \varepsilon] + \right. \\ &\quad \left. + [(1-v^2) \sin \varepsilon - 2\zeta v \cos \varepsilon] \sin 2v\tau - [(1-v^2) \cos \varepsilon + 2\zeta v \sin \varepsilon] \right\}. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Обмежимося пошуком не повного розв'язку рівняння другого наближення, а лише його сталої складової, значення якої, вочевидь, визначається сталою складовою у правій частині рівняння (13.7). Маємо:

$$\langle \gamma(\tau) \rangle = \langle \gamma_{(2)}(\tau) \rangle = \frac{n_{xm} \cdot n_{ym}}{2} \frac{(1-v^2) \cos \varepsilon - 2\zeta v \sin \varepsilon}{(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2},$$

або

$$\langle \gamma(\tau) \rangle = \frac{n_{xm} \cdot n_{ym}}{2} \frac{\cos(\varepsilon + \Delta)}{\sqrt{(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2}}, \quad (13.8)$$

де

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{2\zeta v}{1-v^2}.$$

Отже, теоретичний аналіз підтверджує можливість виникнення випрямного ефекту.

Проаналізуємо вираз (13.8). Привертає до себе увагу значна залежність сталої складової кута відхилення маятника від зсуву фаз ε між вібраціями у вертикальному і горизонтальному напрямках точки підвісу маятника. Залежно від цього зсуву фаз стала складова відхилення може дорівнювати нулю (якщо $\varepsilon = -\Delta \pm (2k+1)\pi/2$), може бути максимальною за величиною і додатною (при $\varepsilon = -\Delta \pm 2k\pi$), або максимальною за величиною і від'ємною ($\varepsilon = -\Delta \pm (2k+1)\pi$).

Як впливає з (13.8), найбільше значення відхилення становить

$$|\langle \gamma(\tau) \rangle|_{\max} = \frac{n_{xm} n_{ym}}{2} \frac{1}{\sqrt{(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2}}. \quad (13.9)$$

Результати моделювання шляхом чисельного інтегрування рівняння (13.1) наведені на рис. 13.1 (за таких значень параметрів: $\zeta = 0.1$; $n_{xm} = n_{ym} = 2$, $v = 4$). Як бачимо, у системі встановлюються усталені вимушені коливання між крайніми значеннями від $(-13,8^\circ)$ до $(-0,7^\circ)$. Середнє значення кута відхилення маятника від вертикалі дорівнює $-6,6^\circ$. Розрахунок за формулою (13.9) дає значення $7,6^\circ$.

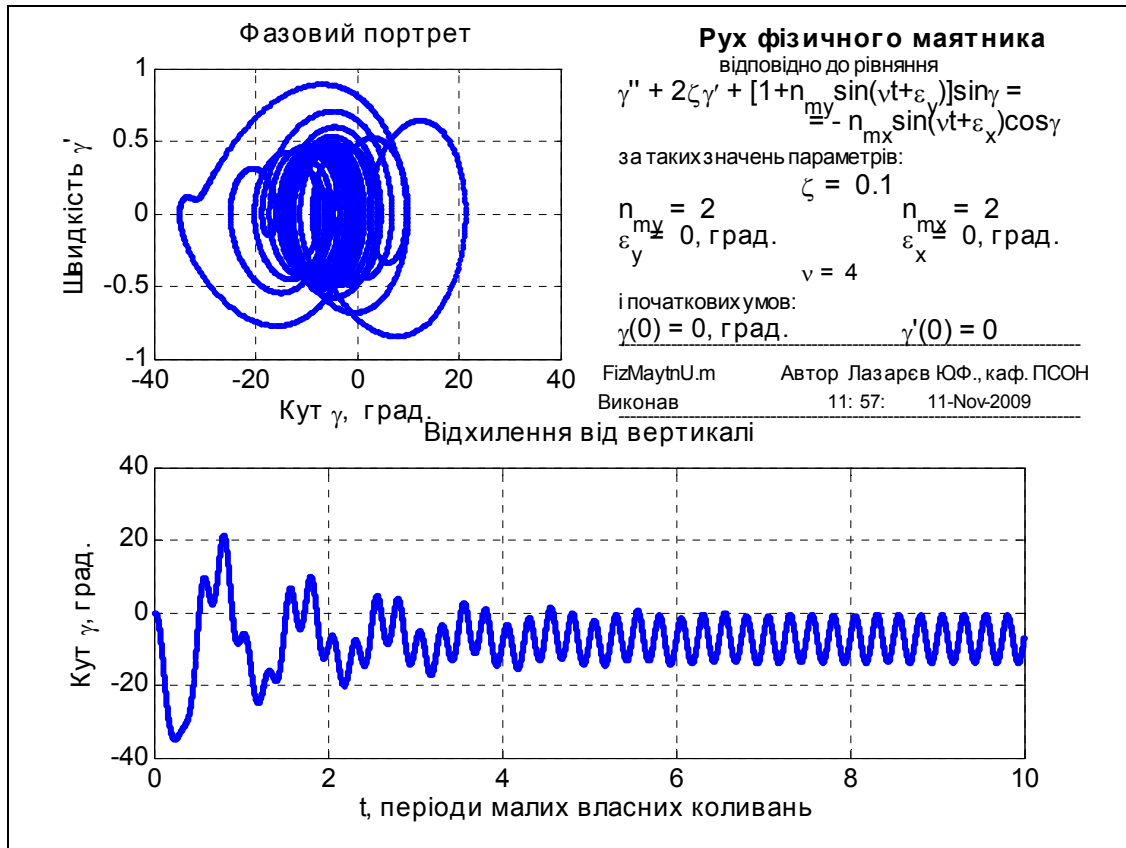


Рис. 13.1. Результати чисельного інтегрування рівнянь ФМ при «навискій» вібрації

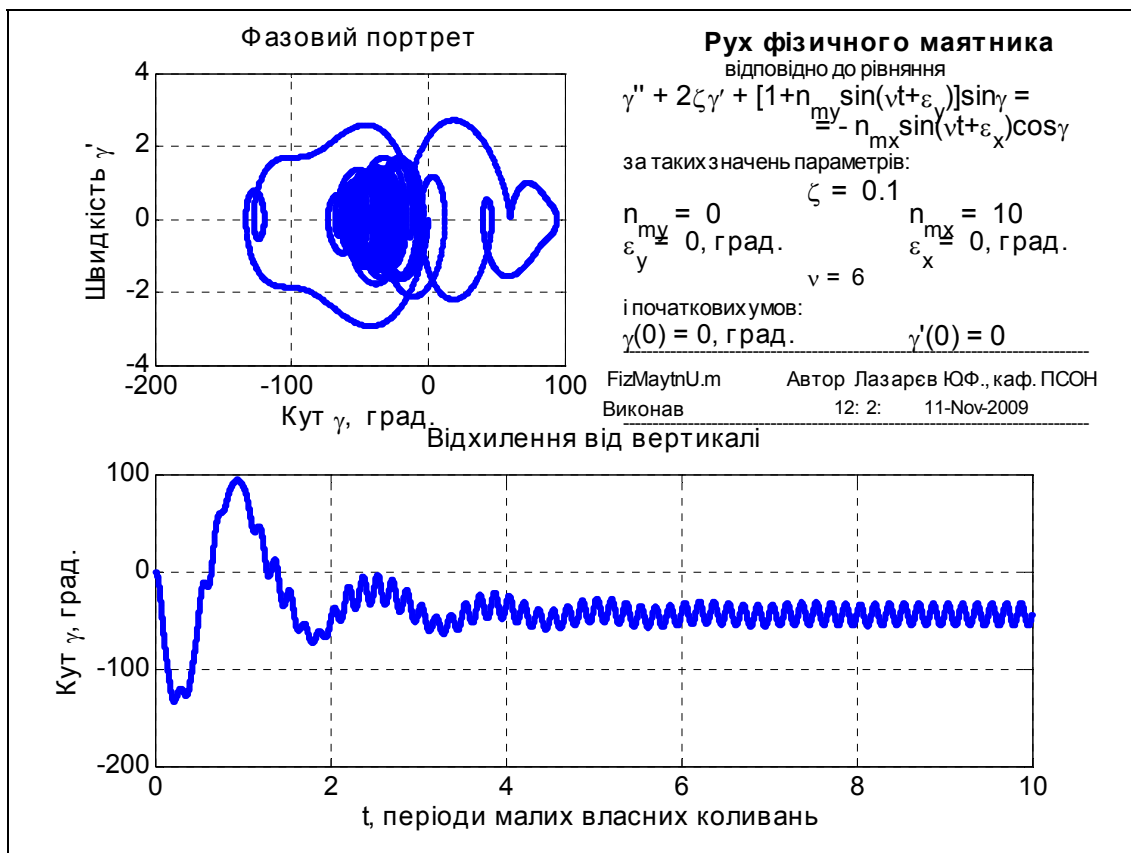


Рис. 13.2. Випрямний ефект за горизонтальної вібрації

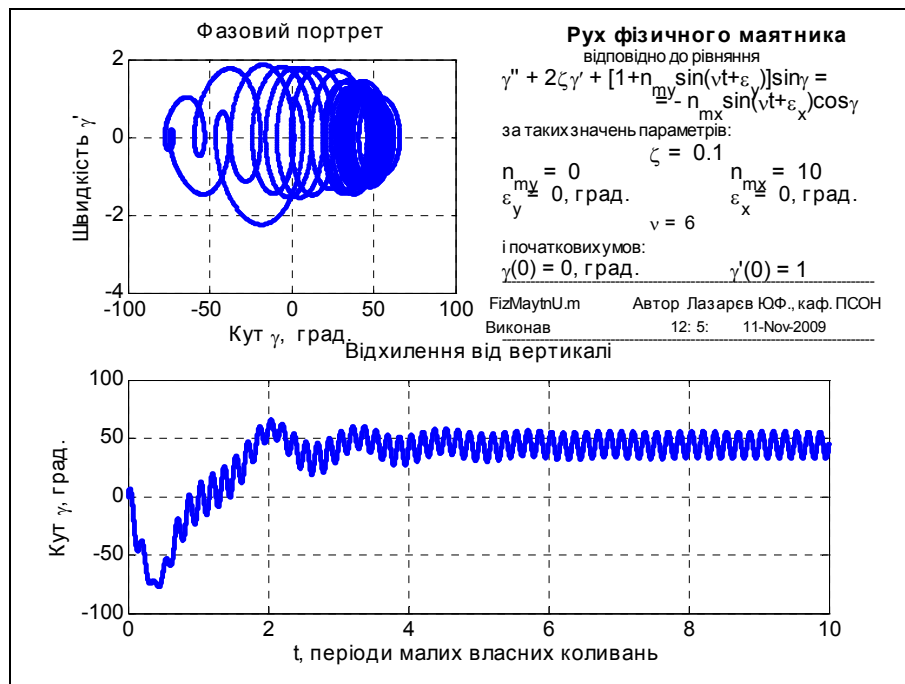


Рис. 13.3. Випрямний ефект за горизонтальної вібрації (інші початкові умови)

Цікаве явище, яке ще не описано в літературі з нелінійних коливань, виявлено через чисельне моделювання за тою самою програмною моделлю. Дуже значний *випрямний ефект може спостерігатися при суто горизонтальній інтенсивній вібрації основи*. Для прикладу на рис. 13.2 і 13.3 наведені результати моделювання руху маятника за таких умов: $\zeta = 0.1$; $n_{xm} = 10$; $n_{ym} = 0$; $v = 6$. На рис. 13.2 відображено рух маятника за нульових початкових умов ($\gamma(0) = \gamma'(0) = 0$). З нього можна впевнитися, що середнє відхилення маятника від вертикалі дорівнює близько (-45°). Початкові умови для рис. 13.3 обрані іншими: $\gamma(0) = 0$; $\gamma'(0) = 1$. Тепер середнє відхилення ($+45^\circ$) має протилежний напрямок.

Розглядання графіків приводить до таких досить несподіваних висновків, які не збігаються з висновками попереднього теоретичного дослідження:

1) випрямний ефект (і вельми значний) може спостерігатися не тільки за навкисній вібрації основи, але й за суто горизонтальної її вібрації;

2) середнє положення маятника може відхилитися від вертикалі у тому чи протилежному напрямку; в якому саме залежить від початкових умов.

Теоретичного опису цього явища досі немає у відомій літературі.

Контрольні запитання

1. Які наближені методи дозволяють визначати параметри випрямного ефекту?
2. Яке значення має випрямний ефект маятника при його використанні у якості вказівника вертикалі?
3. Чи можливе відхилення маятника у середньому від вертикалі при вібрації точки його підвісу? Якщо можливе, то за якої вібрації?

Лекція 14. Метод балансу

14.1. Загальний підхід

Розглянемо рух маятника за інтенсивної високочастотної вібрації основи. Для цього скористаємося рівнянням (13.1).

Шукатимемо його розв'язок у вигляді стаціонарних коливань

$$\gamma(\tau) = \gamma^* + \Delta\gamma(\tau), \quad (14.1)$$

де γ^* припускається незмінною величиною – середнім значенням кута γ за період вимушених коливань, $\Delta\gamma(\tau)$ – флуктуаційною складовою цього розв'язку, середнє значення якого дорівнює нулю $\langle \Delta\gamma(\tau) \rangle = 0$.

З врахуванням (14.1) рівняння (13.1) може бути записано у вигляді:

$$\begin{aligned} \gamma'' + n_{O\xi}(\cos \gamma^* \cos \Delta\gamma - \sin \gamma^* \sin \Delta\gamma) + n_{O\eta}(\sin \gamma^* \cos \Delta\gamma + \cos \gamma^* \sin \Delta\gamma) + \\ + \sin \gamma^* \cos \Delta\gamma + \cos \gamma^* \sin \Delta\gamma = 0. \end{aligned} \quad (14.2)$$

У першому наближенні можна вважати амплітуду флуктуаційної складової малою і замінити у виразі (14.2) її тригонометричні функції першими членами їх розкладу в ряд Маклорена. Отримаємо

$$\gamma'' + n_{O\xi}(\cos \gamma^* - \sin \gamma^* \Delta\gamma) + n_{O\eta}(\sin \gamma^* + \cos \gamma^* \Delta\gamma) + \sin \gamma^* + \cos \gamma^* \Delta\gamma = 0. \quad (14.3)$$

Розкладемо рівняння (14.3) на два рівняння:

1) що містить члени з постійними складовими (і, можливо, з парними гармоніками)

$$\sin \gamma^* - n_{O\xi}(\tau)\Delta\gamma(\tau)\sin \gamma^* + n_{O\eta}(\tau)\Delta\gamma(\tau)\cos \gamma^* = 0; \quad (14.4)$$

2) що містить лише члени з першою гармонікою

$$\Delta\gamma'' + n_{O\xi}(\tau)\cos \gamma^* + n_{O\eta}(\tau)\sin \gamma^* + \cos \gamma^* \Delta\gamma = 0. \quad (14.5)$$

Частинний розв'язок рівняння (14.5) матиме вигляд

$$\Delta\gamma(\tau) = \gamma_m \sin(\nu\tau + \vartheta). \quad (14.6)$$

Розглядатимемо випадок високочастотної вібрації основи, тобто вважатимемо $\nu \gg 1$. Тоді, через те що $\Delta\gamma''(\tau) = -\nu^2 \gamma_m \sin(\nu\tau + \vartheta) = -\nu^2 \Delta\gamma \gg \cos \gamma^* \Delta\gamma$, з виразу (14.5) наближено отримаємо:

$$\Delta\gamma(\tau) = \frac{1}{\nu^2} [n_{O\xi}(\tau)\cos \gamma^* + n_{O\eta}(\tau)\sin \gamma^*]. \quad (14.7)$$

Використаємо цей розв'язок для перетворення рівняння (14.4):

$$\sin \gamma^* + \frac{1}{\nu^2} \left\{ \frac{1}{2} [n_{O\eta}^2(\tau) - n_{O\xi}^2(\tau)] \sin 2\gamma^* + n_{O\xi}(\tau)n_{O\eta}(\tau) \cos 2\gamma^* \right\} = 0. \quad (14.8)$$

Усереднюючи рівняння (14.8) по явному часу, отримаємо тригонометричного рівняння для визначення центра вимушених коливань

$$\sin \gamma^* + \frac{1}{\nu^2} \left\{ \frac{1}{2} [\langle n_{O\eta}^2(\tau) \rangle - \langle n_{O\xi}^2(\tau) \rangle] \sin 2\gamma^* + \langle n_{O\xi}(\tau)n_{O\eta}(\tau) \rangle \cos 2\gamma^* \right\} = 0. \quad (14.9)$$

Здійснивши це усереднення, дійдемо такого співвідношення

$$\sin \gamma^* + \frac{1}{v^2} \left\{ \frac{1}{4} (n_{ym}^2 - n_{xm}^2) \sin 2\gamma^* + \frac{1}{2} n_{ym} n_{xm} \cos(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\gamma^* \right\} = 0. \quad (14.10)$$

Далі зручніше перейти до амплітуд безрозмірної швидкості точки підвісу маятника. Для цього використаємо такі очевидні співвідношення соотношения

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{dV(t)}{dt}; & n_m g \sin \omega t &= \frac{d}{dt} (-V_m \cos \omega t); & n_m g &= V_m \omega; \\ n_m &= \frac{V_m \omega}{g} = \frac{V_m \omega_0}{g} \frac{\omega}{\omega_0} = \bar{V}_m \cdot v; & \bar{V}_m &= \frac{V_m \omega_0}{g}, \end{aligned} \quad (14.11)$$

де \bar{V}_m – безрозмірна амплітуда швидкості. Для математичного маятника $\bar{V}_m = \frac{V_m}{\sqrt{gl}}$.

Тепер рівняння (14.10) можна перетворити до такого

$$\sin \gamma^* + \frac{1}{4} \{ (\bar{V}_{ym}^2 - \bar{V}_{xm}^2) \sin 2\gamma^* + 2\bar{V}_{xm} \bar{V}_{ym} \cos(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\gamma^* \} = 0. \quad (14.12)$$

Отже, отримане тригонометричне рівняння, розв'язуючи яке можна знайти положення центрів можливих вимушених коливань маятника, обумовлених вібрацією основи. Как неважко впевнитися, знайдені у відповідності з рівнянням (14.12) *положення центрів можливих вимушених коливань не залежать від частоти вібрації основи. Вони визначаються виключно амплітудами швидкостей точки підвісу маятника.*

Щоб тепер встановити, чи відповідає знайдений центр стійким коливанням, слід перевірити знак функції

$$\Phi(\gamma) = \left(\frac{\omega_0^*}{\omega_0} \right)^2 = \cos \gamma - \frac{1}{2} \{ (\bar{V}_{xm}^2 - \bar{V}_{ym}^2) \cos 2\gamma + 2\bar{V}_{xm} \bar{V}_{ym} \cos(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\gamma \}, \quad (14.13)$$

яка являє собою похідну від лівої частини рівняння (14.12) з куту γ , у точці γ^* , що відповідає центру коливань. Якщо знак функції (14.13) є додатним, то знайдений центр є стійким, якщо ж він від'ємний – коливання відносно знайденого центра є нестійкими. Легко бачити, що за фізичним сенсом функція (14.13) є квадратом безрозмірної частоти власних коливань маятника відносно знайденого центра.

У кінцевому підсумку, після знаходження координати γ^* стійкого центра коливань, можна знайти і явний вираз флуктуаційної складової у відповідності до (14.7):

$$\Delta\gamma(\tau) = \frac{1}{v^2} [n_{xm} \sin(v\tau + \varepsilon_x) \cos \gamma^* + n_{ym} \sin(v\tau + \varepsilon_y) \sin \gamma^*] = \gamma_m \sin(v\tau + \vartheta), \quad (14.14)$$

зокрема, знайти амплітуду вимушених коливань відносно цього центру

$$\gamma_m = \frac{1}{v} \sqrt{\bar{V}_{xm}^2 \cos^2 \gamma^* + \bar{V}_{ym}^2 \sin^2 \gamma^* + \bar{V}_{xm} \bar{V}_{ym} \sin 2\gamma^* \cos(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}. \quad (14.15)$$

З нього, між тим, випливає, що якщо забезпечити початкові умови

$$\gamma(0) = \gamma^* + \frac{1}{v} (\bar{V}_{xm} \sin \varepsilon_x \cos \gamma^* + \bar{V}_{ym} \sin \varepsilon_y \sin \gamma^*);$$

$$\gamma'(0) = \bar{V}_{xm} \cos \varepsilon_x \cos \gamma^* + \bar{V}_{ym} \cos \varepsilon_y \sin \gamma^*, \quad (14.16)$$

то одразу встановляться шукані вимушені коливання маятника.

Викладений метод назвемо *методом балансу*, оскільки він оснований на поділі первинного диференціального рівняння нелінійної системи на два, отриманих з ідеї збалансованості окремо постійних і центрованих складових у рівняння.

14.2. Лінійна вібрація точки підвісу

Лінійною назвемо таку вібрацію основи, за якою точка підвісу рухається у просторі вздовж відрізка прямої, нахиленої до площини горизонту. При цьому коливання точки підвісу вздовж горизонтального і вертикального напрямків здійснюються синхронно і синфазно, наприклад:

$$\bar{V}_{o\xi}(\tau) = \bar{V}_{xm} \sin(v\tau); \quad \bar{V}_{o\eta}(\tau) = \bar{V}_{ym} \sin(v\tau).$$

Якщо кут нахилу лінії вібрації до площини горизонту позначити φ , а амплітуду швидкості точки підвісу основи вздовж лінії вібрації – \bar{V}_m , то отримаємо

$$\bar{V}_{xm} = \bar{V}_m \cos \varphi; \quad \bar{V}_{ym} = \bar{V}_m \sin \varphi.$$

Рівняння (14.12), яке визначає можливі положення центрів коливань, перетворюється на таке

$$\sin \gamma^* - \frac{\bar{V}_m^2}{4} \sin 2(\gamma^* - \varphi) = 0, \quad (14.17)$$

а умову (14.13) стійкості коливань навколо цього центру можна записати так

$$\cos \gamma^* > \frac{\bar{V}_m^2}{2} \cos 2(\gamma^* - \varphi). \quad (14.18)$$

Частота власних коливань маятника визначиться виразом

$$\omega_0^* = \sqrt{\cos \gamma^* - \frac{\bar{V}_m^2}{2} \cos 2(\gamma^* - \varphi)}. \quad (14.19)$$

Співвідношення (14.1), яке визначає самий розв'язок, у цьому випадку приймає вигляд

$$\gamma(\tau) = \gamma^* + \frac{\bar{V}_m}{v} \cos(\gamma^* - \varphi) \sin(v\tau + \vartheta). \quad (14.20)$$

14.2.1. Вертикальна вібрація

Розглянемо частковий випадок, коли вібрація основи у горизонтальному напрямку відсутня. У цьому випадку $\varphi = 90^\circ$, і рівняння (14.17) суттєво спрощується

$$\sin \gamma^* + \frac{1}{2} \bar{V}_m^2 \sin \gamma^* \cos \gamma^* = 0. \quad (14.21)$$

Тригонометричне рівняння (14.21) припускає такі розв'язки:

- 1) $\gamma^* = 0$; (нижнє положення рівноваги);
- 2) $\gamma^* = \pi$; (верхнє положення рівноваги);
- 3) $\cos \gamma^* = -\frac{2}{\bar{V}_m^2}$; (два положення рівноваги вище за площину горизонту).

Функція стійкості при вертикальній вібрації стає такою

$$\Phi(\gamma) = \cos \gamma + \frac{\bar{V}_m^2}{2} \cos 2\gamma. \quad (14.22)$$

Нижнє положення рівноваги. У цьому випадку $\sin \gamma^* = 0$ і $\cos \gamma^* = 1$. Підставивши ці значення у (14.22), отримаємо

$$\Phi(\gamma) = 1 + \frac{\bar{V}_m^2}{2}. \quad (14.23)$$

Цей вираз завжди є додатним, що відповідає стійкому положенню рівноваги. При цьому

$$\Delta\gamma(\tau) = \frac{1}{v} \bar{V}_m \sin(v\tau + \varepsilon_y) \sin \gamma^* = 0.$$

Іншими словами, *нижнє положення рівноваги при вертикальній вібрації точки підвісу маятника завжди є стійким, а самі вимушені коливання мають амплітуду, що дорівнює нулю.*

Верхнє положення рівноваги. У цьому випадку $\sin \gamma^* = \sin \pi = 0$, $\cos \gamma^* = -1$ і $\cos 2\gamma^* = 1$. При такому значенні кута функція (14.22) стає рівною

$$\Phi(\gamma) = -1 + \frac{1}{2} \bar{V}_{ym}^2. \quad (14.24)$$

Додатною вона буде за умови

$$\bar{V}_m > \sqrt{2}. \quad (14.25)$$

Як і у нижньому положенні рівноваги, самі вимушені коливання мають амплітуду рівну нулю. Тобто, *верхнє положення рівноваги стає стійким, якщо амплітуда швидкості вібрації точки підвісу в вертикальному напрямку перевищує величину $1,41 \cdot V$, де $V = \sqrt{\frac{gJ}{ml}} = \frac{g}{\omega_0}$.*

Інші положення рівноваги. Розглянемо положення рівноваги, що визначені третім розв'язком рівняння (14.21). Для цього випадку маємо

$$\cos \gamma^* = -\frac{2}{\bar{V}_m^2}; \quad \cos 2\gamma^* = 2 \cos^2 \gamma^* - 1 = \frac{8}{\bar{V}_m^4} - 1.$$

Щоб ці співвідношення мали сенс, необхідно виконання умови (14.25). Функція стійкості (14.22) в точці положення рівноваги набуває вигляду

$$\Phi(\gamma) = \cos \gamma^* + \frac{\bar{V}_{ym}^2}{2} \cos 2\gamma^* = \frac{2}{\bar{V}_{ym}^2} - \frac{\bar{V}_{ym}^2}{2}.$$

Неважко углядіти, що за умови (14.25) цей вираз буде від'ємним. Це означає, що *ці положення рівноваги є нестійкими.*

На рис. 14.1 показані (лініями зі крапками) графіки залежностей (див. (14.23) і (14.24)) частоти власних коливань маятника відносно нижнього (синя лінія) і верхнього (червона лінія) положень рівноваги від амплітуди швидкості вібрації основи в вертикальному напрямку.

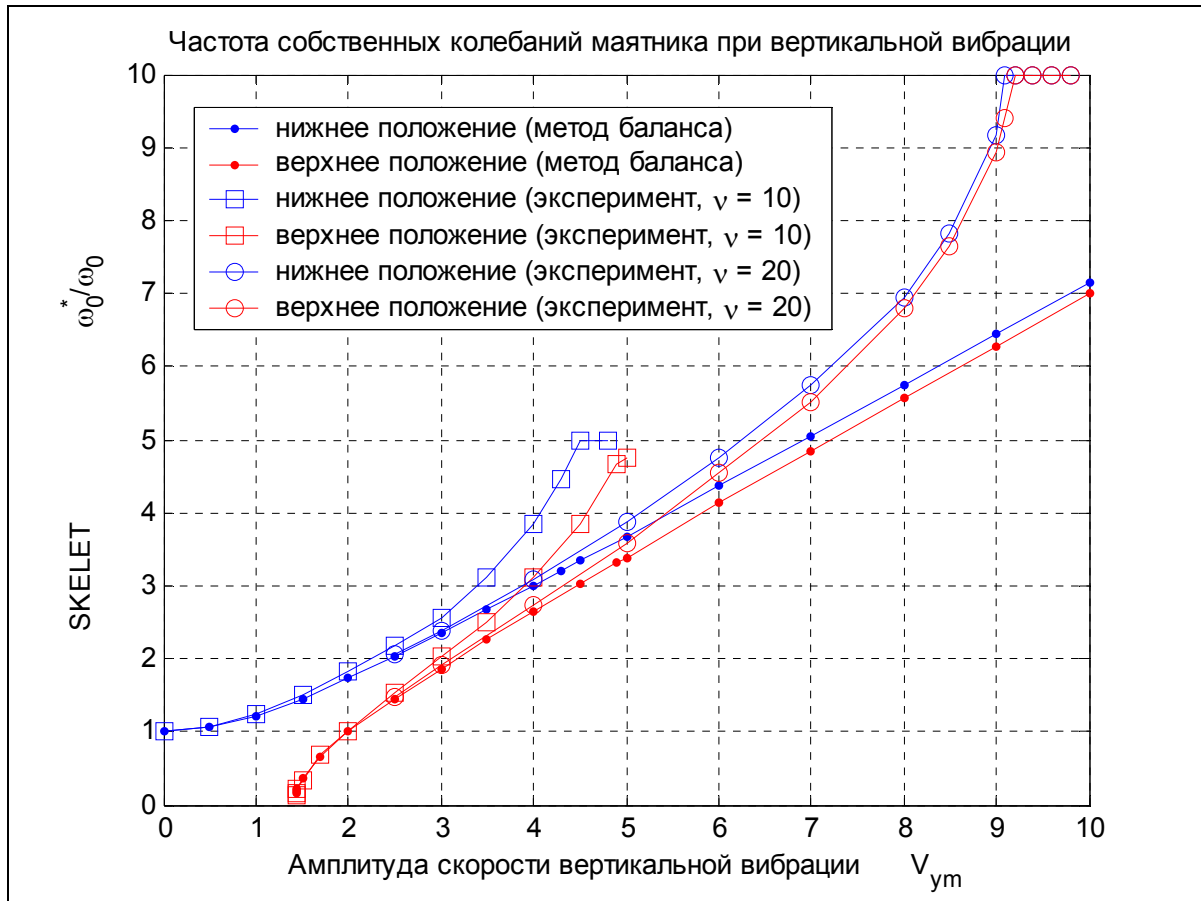


Рис. 14.1. Залежності частоти власних коливань маятника від амплітуди вертикальної швидкості основи

Зазвичай на це цікаве явище не звертають належної уваги в літературі, хоча підхід Н. Н. Боголюбова дозволяє теоретично описати його за не надто великих амплітудах вібрації основи. На цьому ж рисунку квадратними маркерами показані результати вимірювання частоти власних коливань при комп'ютерному моделюванні (чисельному інтегруванні диференціального рівняння (13.1)) при частоті вібрації $\nu = 10$. Кружками відзначені результати експериментів при частоті $\nu = 20$.

Неважко углядіти, що за малих амплітуд ($\bar{V}_m < \frac{\nu}{3}$) вібрації метод балансу (який приводить до тих самих результатів, що й метод усереднення) дає задовільний збіг з модельним експериментом. Однак за великих амплітуд ($\frac{\nu}{2} > \bar{V}_m > \frac{\nu}{3}$) відмінність експерименту з теорією сягає 35%. За ще більших ам-

плітуд ($\bar{V}_m > \frac{v}{2}$) коливальні режими припиняються, замінюючись на одностороннє обертання маятника.

14.2.2. Горизонтальна вібрація

У цьому випадку $\varphi = 0$, і рівняння (14.17) набуває вигляду

$$\sin \gamma^* - \frac{\bar{V}_{xm}^2}{2} \sin \gamma^* \cos \gamma^* = 0. \quad (14.26)$$

а функція (14.13) стає такою

$$\Phi(\gamma) = \cos \gamma - \frac{\bar{V}_{xm}^2}{2} \cos 2\gamma. \quad (14.27)$$

Рівняння (14.26) має розв'язки

- 1) $\gamma^* = 0$ – нижнє положення рівноваги;
- 2) $\gamma^* = \pi$ – верхнє положення рівноваги;
- 3) $\cos \gamma^* = \frac{2}{\bar{V}_m^2}$ – інші положення центру коливань.

Нижнє положення рівноваги. У цьому випадку $\sin \gamma^* = 0$ і $\cos \gamma^* = 1$. Використовуючи ці значення у (14.27), матимемо

$$\Phi(\gamma) = 1 - \frac{\bar{V}_{xm}^2}{2}. \quad (14.28)$$

Цей вирає є додатним за малих амплітуд вібрації і від'ємним – за великих, тобто за умови

$$\bar{V}_{xm} > \sqrt{2}. \quad (14.29)$$

Інакше кажучи, *коливання навколо нижнього положення рівноваги є стійкими лише за умови, що амплітуда віброшвидкості основи в горизонтальному напрямку менша за певну величину*

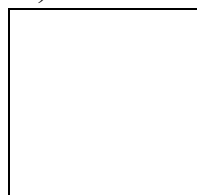
$$\bar{V}_{xm} < \sqrt{2}, \quad (14.30)$$

при цьому вимушені коливання відносно нижнього положення рівноваги здійснюються за законом

$$\gamma(\tau) = \frac{\bar{V}_{xm}}{v} \sin(v\tau + \varepsilon_x). \quad (14.31)$$

і стають нестійкими при амплітудах швидкості, більших цієї величини.

Верхнє положення рівноваги. У цьому випадку $\sin \gamma^* = \pi$, $\cos \gamma^* = -1$ и $\cos 2\gamma^* = 1$. Значення функції (14.27) стає таким



тобто відемним за будь-яких амплітуд вібрації основи. **Коливання маятника навколо верхнього положення рівноваги при горизонтальній вібрації основи завжди є нестійкими.**

Інші положення рівноваги. Положення рівноваги, що визначаються умовою

$$\text{[Blank Box]} \tag{14.32}$$

мають реальний сенс лише за умови виконання (14.29). При цьому функція (14.27) набуває вигляду

$$\text{[Blank Box]} \tag{14.33}$$

При виконанні умови (14.29) коливання маятника навколо положень рівноваги (14.32) є стійкими.

Через те, що косинус кута відхилення положення рівноваги від вертикалі у розглядуваному випадку є додатним, йому відповідають два положення рівноваги, що розташовані симетрично відносно вертикалі нижче за точку підвісу

$$\text{[Blank Box]} \tag{14.34}$$

На рисунку 14.2 приведені графіки теоретичних залежностей (14.33) частоти власних коливань маятника навколо нижнього і бічних центрів рівноваги від амплітуди швидкості вібрації основи.

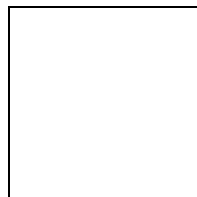
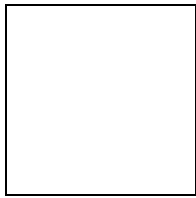


Рис. 14.2. Залежність частоти власних коливань маятника від амплітуди швидкості горизонтальної вібрації основи

Як бачимо, при збільшенні амплітуди швидкості частота власних коливань відносно нижнього положення рівноваги зменшується до нуля (при



). Частота ж власних коливань відносно бічних центрів збільшується,

починаючи з нуля (при ) до несконченності.

Графічне подання залежності (14.26) наведено на рис. 14.3 (суцільна лінія).

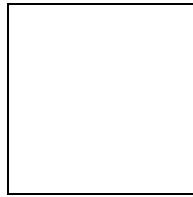
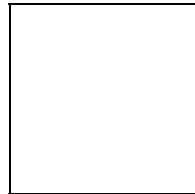


Рис. 14.3. Залежність положень центрів стійких коливань від амплітуди швидкості горизонтальної вібрації основи

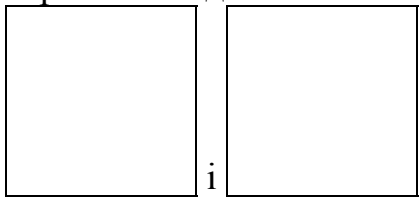
Вимушені коливання відносно бічних положень рівноваги здійснюються за законом



(14.34)

Теоретична залежність амплітуди вимушених коливань від амплітуди швидкості горизонтальної вібрації графічно подана на рисунку 14.4.

На тих же рисунках 14.3 и 14.4 показані також відповідні результати, отримані модельним експериментом для двох значень частоти вібрації основи



Результати експериментів збігаються з передбаченими теоретично в усьому діапазоні існування вимушених коливань. Як видно з рисунків, значна

відмінність експериментів від теорії починається при частоті  з ам-

плітуди швидкості , а при частоті з амплітуди швидко-
сті . Експерименти доводять, що починаючи з цих значень амплітуд
швидкості, вимушені коливань, що здійснюються з частотою віб-
рації основи, змінюються на параметричні, частота яких удвічі менша.

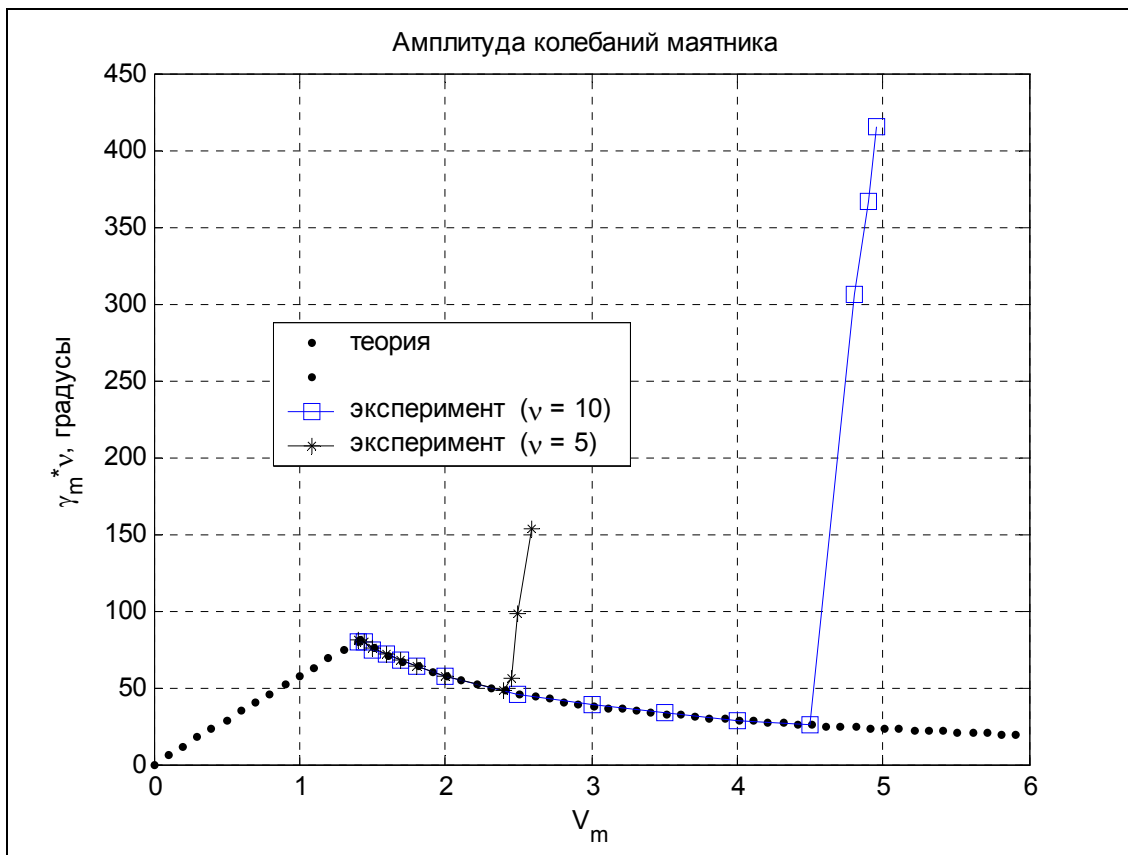


Рис. 14.4. Залежність амплітуди стійких коливань маятника від амплітуди швидкості горизонтальної вібрації основи

14.2.3. Навскісна вібрація основи

Рисунок 14.5 демонструє графіки залежностей положень стійких центрів коливань маятника від амплітуди швидкості вібрації основи, побудованих у відповідності з рівнянням (14.12) для різних додатних значень кутів нахилу лі-

ній вібрації до площини горизонту. Графіки для відповідних від'ємних нахилів виходять дзеркальним відбитком отриманих відносно осі абсцис.

Докладніше вивчено таку залежність для куту нахилу $\phi = 45^\circ$. На рисунку 14.6 наведені графік залежності, отриманий методом балансу (точками), графік залежності, отриманий методом збурень та експериментальні положення центрів при частоті вібрації $\nu = 10$.

Порівняння цих графіків показує добрий збіг з експериментом результатів, отриманих методом балансу. Метод збурень у цьому випадку приводить до прийняттого результату тільки за малих амплітуд швидкості $\bar{V}_m \leq 1$. За більш інтенсивної вібрації метод збурень приводить до значних похибок, які збільшуються зі збільшенням інтенсивності вібрації. Окрім того, метод принципово не може визначити другий центр коливань, що більше за 100° , а для метода балансу це не представляє труднощів.

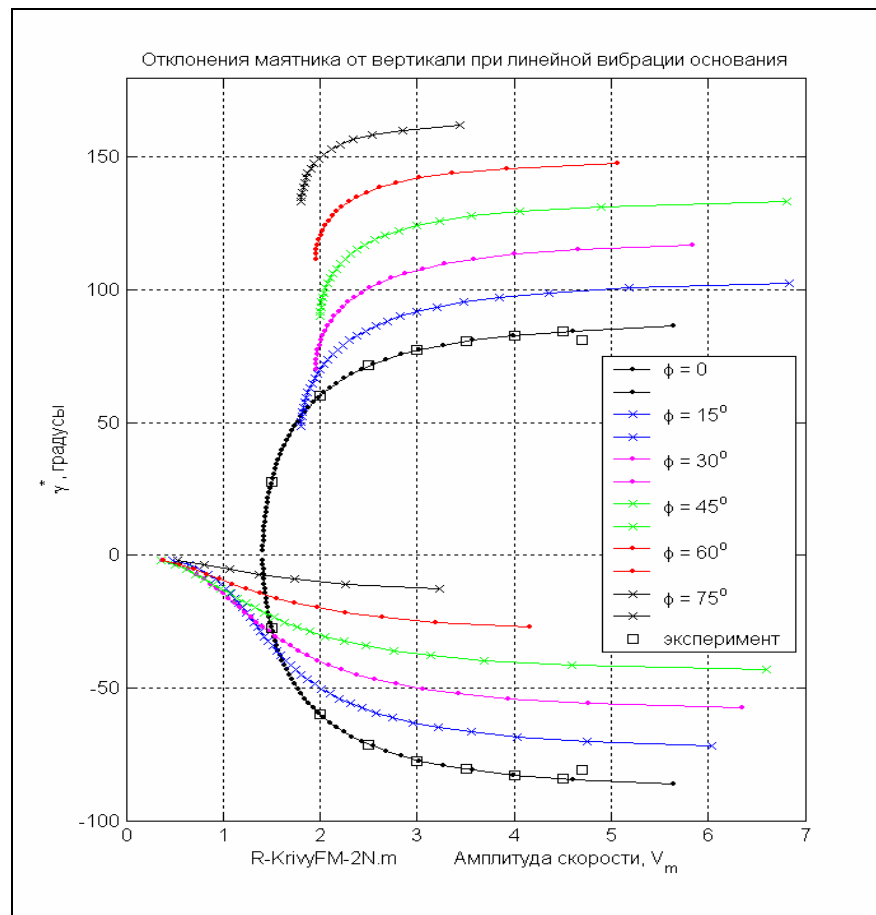


Рис. 14.5. Залежність положень центрів стійких коливань маятника від амплітуди швидкості навскісної вібрації основи

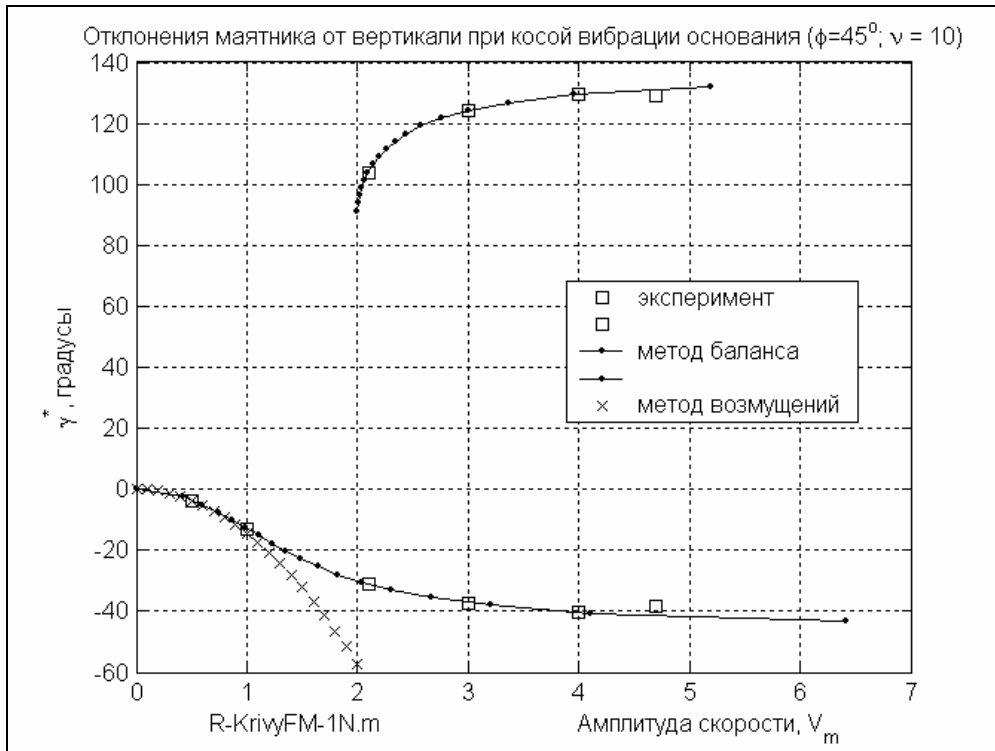


Рис. 14.6. Порівняння різних методів визначення положення центрів стійких коливань

Висновки

1. Метод балансу досить простий і ефективний у визначенні параметрів вимушених коливань нелінійної коливальної системи за інтенсивного високочастотного вібраційного збурення. Він дозволяє визначати положення центрів стійких коливань, їх амплітуду, а також частоту перехідного процесу, що приводить до таких коливань.
2. Основним параметром, що впливає на положення центрів вимушених коливань маятника, є амплітуда безрозмірної швидкості вібрації точки його підвісу. Частота вібрації основи не впливає на положення цих центрів.
3. Амплітуда вимушених коливань залежить, окрім амплітуди швидкості, від частоти вібрації основи, бо є величиною, зворотно їй пропорційною.
4. Комп'ютерне моделювання показує, що при поступовому збільшенні амплітуди швидкості вібрації основи, вимушені коливання при амплітуді безрозмірної швидкості, близької до половини безрозмірної частоти вібрації, різко переходять у параметричні коливання.
5. Отримані методом балансу результати знаходяться у повному збігу з відомими вивченими раніше особливостями поведінки маятника, дозволяючи поглибити і розвинути як кількісно, так і якісно наші уявлення про цей цікавий об'єкт.

Запитання до теми 2.1

1. Що таке ізохронність коливань і хто її відкрив?
2. Що таке неізохронність коливань і в яких системах вона спостерігається?
3. Що називають скелетною кривою? Чим обумовлено їх назву? Які методи дозволяють визначати і будувати скелетні криві? Що таке "м'які" і "жорсткі" нелінійні системи?
4. Які методи дозволяють визначати і будувати графіки амплітудно-частотні характеристики нелінійних систем?
5. Чим суттєво відрізняються АЧХ лінійних систем від АЧХ нелінійних систем?
6. Які характерні особливості мають амплітудно-частотні характеристики маятника?
7. Що таке випрямний ефект? В яких системах він може виникати? Які методи теоретичного дослідження можуть бути застосовані для виявлення і аналізу випрямного ефекту?
8. Що є характерною рисою випрямного ефекту? Від якого параметру суттєво залежить його величина?
9. За яких умов виникає випрямний ефект у маятника? В якій особливості руху маятника він полягає?
10. За яких умов нижнє положення маятника стає нестійким, а верхнє положення рівноваги стає стійким?
11. Чи може спостерігатися випрямний ефект у маятника при суто горизонтальній вібрації точки його підвісу? Якщо так, то за яких умов?
12. Як залежить випрямний ефект маятника від амплітуди вібрації точки його підвісу та від зсуву фаз між коливаннями цієї точки у вертикальному і горизонтальному напрямках?
13. У чому полягає метод балансу? Чим він відрізняється від інших наближених методів?
14. Опишіть сферу застосовності методу балансу. Які переваги і недоліки цього методу?
15. Які параметри нелінійних коливань можуть бути визначені методом балансу?
16. За яких умов нижнє положення рівноваги маятника стає нестійким?
17. За яких умов верхнє положення рівноваги маятника стає стійким?
18. Що називають фазовим портретом колівальної системи?
19. Які головні особливості поведінки зображувальної точки на фазовому портреті?
20. За рахунок чого маятник здійснює коливання навколо того чи іншого з кількох стійких положень рівноваги?
21. Чи змінюється частота перехідного процесу маятника при переході від одного до іншого стійкого положення рівноваги?

Абетковий покажчик

	А		метод збурень 14
АЧХ маятника 12			методи лінеаризації 8, 11
	В		Н
випрямний ефект 16			неізохронність власних коливань 4, 6
	Е		нормальна форма Коші диференціальних рівнянь 3
еліптичний інтеграл першого роду 5			П
ефект випрямний 14			параметр малий 14
	К		перевантаження 3
коефіцієнт загасання відносний 3			Р
крива скелетна 6, 9			рівняння другого наближення 14
	Л		рівняння першого наближення 14
лінеаризація гармонічна 9			Ф
лінеаризація по кінцях 8			фазовий портрет 7
лінеаризація пряма 9			Ч
	М		час
маятник 3			безрозмірний 3
метод			частота власних малих коливань маятника 3
балансу 20			частота власних незгасаючих коливань маятника 5