

НТУУ "Київський політехнічний інститут"

Кафедра приладів і систем орієнтації і навігації

Ю. Ф. Лазарєв

Лекції

з навчальної дисципліни

"Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації – 3"

Ч. 1. Лекції 1 - 5

Розділ 1. Основи прикладних теоретичних досліджень

Тема 1.1. Прикладні методи теоретичного дослідження

Київ – 2015

Зміст

ЛЕКЦІЯ 1. ВСТУП У ТЕОРІЮ КОЛИВАНЬ	3
Контрольні запитання	11
ЛЕКЦІЯ 2. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ	12
2.1. Теоретичне дослідження вільного руху	12
2.2. Теоретичне дослідження вимушених коливань. Метод комплексних амплітуд.....	13
2.3. Вимушені коливання гіроскопа у кардановому підвісі	19
Контрольні запитання	22
ЛЕКЦІЯ 3. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ І НЕСТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ	23
3.1. Методи лінеаризації	24
3.1.1. «Класична» лінеаризація.....	24
3.1.2. Лінеаризація «по кінцях».....	26
3.1.3. Пряма лінеаризація.....	27
3.1.4. Гармонічна лінеаризація	29
3.2. Вимушені коливання нелінійної системи.....	31
Контрольні запитання	38
ЛЕКЦІЯ 4. ТЕОРІЯ ЗБУРЕНЬ.....	39
4.1. Метод Пуассона.....	39
4.2. Метод О. М. Крилова	42
4.3. Метод Остроградського–Ляпунова.....	44
Контрольні запитання	45
ЛЕКЦІЯ 5. ДОСЛІДЖЕННЯ ВИПРЯМНОГО ЕФЕКТУ. ДРЕЙФ МАГНУСА.....	46
Контрольні запитання	48
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО ТЕМИ 1.1	49

Лекція 1. Вступ у теорію коливань

Головним режимом роботи приладів і систем орієнтації та навігації, що встановлюються на рухомі об'єкти, є коливальні процеси. Тому передусім слід ознайомитися з основними поняттями, які використовуються у теорії коливань.

Об'єктом вивчення теорії коливань є динамічні системи. Динамічною системою зазвичай називають реальний об'єкт, поведінка якого може бути описано із задовільною для практики точністю системою звичайних диференціальних рівнянь, аргументом яких є час.

Під коливальним процесом (коливанням) розуміють немонотонне змінювання на деякому відрізку часу одного або кількох параметрів динамічної системи. Характерною особливістю такого процесу є багаторазове збільшення та зменшення параметрів з часом. Якщо параметри системи змінюються монотонно на відрізку часу $[t_1, t_2]$, то процес не є коливальним. Проте часто неможливо встановити різницю між коливальним і неколивальним процесами. Тому більш загальне визначення коливального процесу можна сформулювати так: система здійснює коливання за деяким параметром q , якщо швидкість змінювання цього параметра $\dot{q} = dq/dt$ багаторазово змінює свій знак на заданому проміжку часу.

Динамічну систему, здатну здійснювати коливання без будь-яких зовнішніх дій лише за рахунок первинно накопиченої енергії, називають коливальною системою.

Колівальні явища надзвичайно поширені, різноманітні й можуть відбуватися у динамічних системах будь-якої природи – фізичної, хімічної, біологічної, економічної тощо. До коливальних процесів належать, наприклад, ритми головного мозку і биття серця, пульсації зірок і туманностей, акустичні та електромагнітні явища, змінюваність кількості хижаків у популяції тварин тощо.

Колівання можуть бути сталими чи перехідними від одного сталого руху до іншого. Сталий рух характеризується повторністю та стабільністю деяких характеристик коливального руху, зміст яких буде уточнено далі. Перехідні процеси характеризуються тим сталим рухом, до якого вони наближаються.

Сталі рухи динамічних систем реалізуються у вигляді або стаціонарних коливань, або станів рівноваги.

Стаціонарними на відрізку $[t_1, t_2]$ називають коливання, в яких середнє значення, а також екстремальні (максимальні і мінімальні) значення коливальної величини, які досягаються на цьому досить великому відрізку часу, відносно мало змінюються у разі переміщення цього відрізка уздовж осі часу (рис. 1.1).

Окремим випадком стаціонарних коливань є періодичні коливання, коли різні стани динамічної системи повторюються через рівні проміжки часу T , які називають періодом коливань (рис. 1.1, б).

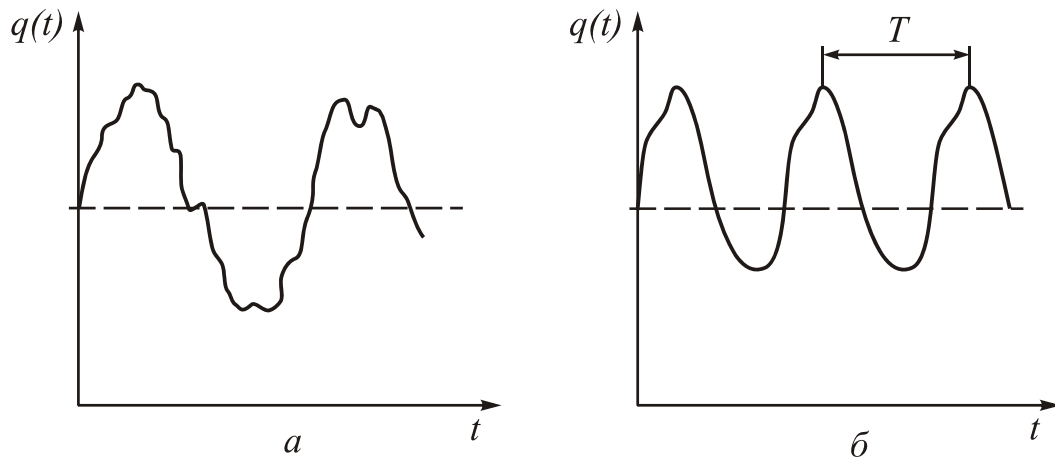


Рис. 1.1. Стаціонарні коливання

Нестационарні коливальні процеси є перехідними й бувають загасальними або наростаючими. Загасальні коливання (рис. 1.2, а) характеризуються зменшенням з часом максимальних за модулем відхилень коливної величини $q(t)$ від її середнього значення (амплітуд) на відміну від наростаючих (рис. 1.2, б) коливань, яким властиве зростання амплітуд коливань.

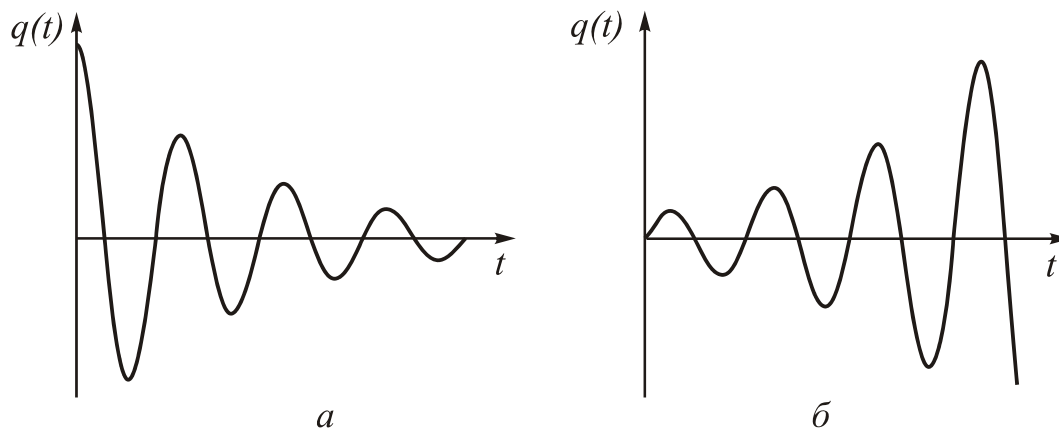


Рис. 1.2. Нестационарні коливання

З плином часу загасальні коливання або перетворюються у стаціонарні з меншою, ніж раніше, амплітудою, або переходять у стан рівноваги, і тоді значення амплітуд коливних величин наближаються до нуля.

Наростаючі коливання переходять у стаціонарні з більшою амплітудою. Проте у реальних конструкціях часто система руйнується від напружень у матеріалі раніше, ніж встановиться новий стаціонарний режим.

Розглянемо кінематичні характеристики коливальних процесів. До таких характеристик належать амплітуда, частота, період, часова форма коливань і деякі інші.

Найпростішим видом стаціонарних коливань є гармонічні коливання, коли коливна величина $q(t)$ змінюється у часі за синусоїдальним законом:

$$q(t) = a \cos(\omega t + \vartheta) = a \sin(\omega t + \varepsilon) = a_s \sin(\omega t) + a_c \cos(\omega t), \quad (1.1)$$

де a – амплітуда; ω – кутова (циклічна, колова) частота; ϑ, ε – початкові фази коливання відповідно у косинусоїдальній і синусоїдальній формах; a_s, a_c – амплітуди відповідно синусоїдальної й косинусоїдальної складових гармонічного коливання. Ці величини пов'язані між собою очевидними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \sin \varepsilon; \quad \sin \vartheta = -\cos \varepsilon; & \vartheta &= \varepsilon - \frac{\pi}{2}; \\ a_s &= -a \sin \vartheta = a \cos \varepsilon; & a_c &= a \cos \vartheta = a \sin \varepsilon; \\ a &= \sqrt{a_s^2 + a_c^2}; & \operatorname{tg} \vartheta &= -\frac{a_s}{a_c}; & \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{a_c}{a_s}. \end{aligned}$$

Такі коливання є періодичними. Період цих коливань виражається через частоту:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Частота визначає кількість повних періодів коливального процесу за час 2π . Початкова фаза характеризує початкове (якщо $t = 0$) значення коливної величини. Величину $\varphi = \omega t + \vartheta$ (або $\varphi_s = \omega t + \varepsilon$) називають поточною фазою коливної величини.

Гармонічні коливання часто зручно відображати у вигляді суми двох комплексно спряжених величин, користуючись відомим співвідношенням

$$\cos(\omega t + \vartheta) = \frac{1}{2} \left[e^{j(\omega t + \vartheta)} + e^{-j(\omega t + \vartheta)} \right], \quad (j = \sqrt{-1}).$$

Тоді вираз (1.1) може бути поданий у такому вигляді:

$$q(t) = a \cos(\omega t + \vartheta) = \frac{a}{2} \left[e^{j(\omega t + \vartheta)} + e^{-j(\omega t + \vartheta)} \right]. \quad (1.2)$$

Якщо ввести у розгляд комплексну величину

$$Q_m = \frac{a}{2} e^{j\vartheta}, \quad (1.3)$$

то гармонічно змінювану величину (1.2) можна подати й так:

$$q(t) = a \cos(\omega t + \vartheta) = Q_m e^{j\omega t} + \bar{Q}_m e^{-j\omega t}, \quad (1.4)$$

де риска над Q_m позначає комплексне спряження цієї величини.

Комплексну величину (1.3) називають комплексною амплітудою гармонічно змінюваної величини. Як видно, модуль комплексної амплітуди дорівнює половині амплітуди, а аргумент – початковій фазі гармонічного коливання, записаного у косинусоїдальній формі.

вектор $q(t)$, який лежить на дійсній осі. З плином часу вектор $\frac{a}{2} e^{j\varphi} = \frac{a}{2} e^{j(\omega t + \vartheta)}$ обертається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω , а вектор $\frac{a}{2} e^{-j\varphi} = \frac{a}{2} e^{-j(\omega t + \vartheta)}$ – з такою самою швидкістю – у протилежному напрямку, тобто за годинниковою стрілкою. Унаслідок цього їх сума утворюватиме прое-

кцію на уявну вісь, що дорівнює нулю, а на дійсну вісь – проекцію, яка буде змінюватися як за величиною, так і за напрямком. При цьому результуючий вектор $q(t)$ змінюватиметься за законом (1.1).

На комплексній площині $u + jv$ (рис. 1.3) кожний з доданків рівняння (1.4) зображується у вигляді вектора довжиною $a/2$. Один із них утворює із додатною піввіссю u кут φ , другий – кут $(-\varphi)$. Сума векторів у кожному мить утворює

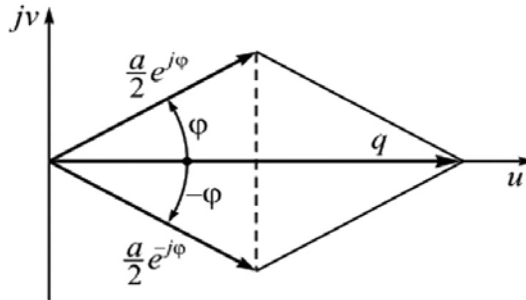


Рис. 1.3. Зображення гармонічного коливання на комплексній площині

Сума двох гармонічних коливань з однаковими частотами утворює також гармонічне коливання з тією самою частотою:

$$a_1 \cos(\omega t + \vartheta_1) + a_2 \cos(\omega t + \vartheta_2) = a \cos(\omega t + \vartheta).$$

Амплітуда і початкова фаза результуючого коливання виражаються через амплітуди і початкові фази процесів-доданків у такий спосіб:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}, \quad \vartheta = \vartheta_1 + \operatorname{arctg} \frac{a_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{a_1 + a_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}.$$

Слід зауважити, що складати гармонічні коливання однакової частоти значно простіше, якщо подавати їх у формі останнього виразу у (1.1):

$$a_{1s} \sin(\omega t) + a_{1c} \cos(\omega t) + a_{2s} \sin(\omega t) + a_{2c} \cos(\omega t) = a_s \sin(\omega t) + a_c \cos(\omega t),$$

звідки випливає:

$$a_s = a_{1s} + a_{2s}; \quad a_c = a_{1c} + a_{2c}.$$

Досить просто підсумовувати такі коливання і в комплексній формі:

$$Q_{1m} e^{j\omega t} + \bar{Q}_{1m} e^{-j\omega t} + Q_{2m} e^{j\omega t} + \bar{Q}_{2m} e^{-j\omega t} = Q_m e^{j\omega t} + \bar{Q}_m e^{-j\omega t}.$$

Порівнюючи праву і ліву частини, дістанемо основне просте співвідношення:

$$Q_m = Q_{1m} + Q_{2m}.$$

Комплексна амплітуда суми гармонічних коливань однієї і тієї самої частоти дорівнює сумі комплексних амплітуд коливань-доданків.

Більш складним видом стаціонарних коливань є полігармонічні коливання, що є сумою двох чи більше гармонічних коливань з різними частотами:

$$q(t) = \sum_{k=1}^n a_k \cos(\omega_k t + \vartheta_k). \quad (1.5)$$

Сукупність частот ω_k утворює частотний спектр, сукупність амплітуд a_k – амплітудний спектр, а сукупність початкових фаз ϑ_k – фазовий спектр полігармонічного коливання.

Якщо частоти частотного спектра полігармонічного коливання відносяться як цілі числа до деякої найменшої частоти ω_1 (тобто для будь-якого k відношення $\omega_k/\omega_1 = m$, де m – ціле число), то коливальний процес є періодичним з періодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$. При цьому складову з частотою ω_1 називають основною гармонікою. Складову з частотою $\omega = m\omega_1$ називають m -ою гармонікою.

Визначення складових спектрів відомого коливального процесу називають спектральним аналізом цього процесу.

У загальному випадку будь-який T -періодичний процес можна подати у вигляді нескінченного ряду Фур'є:

$$q(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t + \vartheta_k) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{kc} \cos k\omega t + a_{ks} \sin k\omega t).$$

Коефіцієнти такого розкладу визначають за формулами:

$$a_{kc} = \frac{2}{T} \int_0^T q(t) \cos(k\omega t) dt; \quad a_{ks} = \frac{2}{T} \int_0^T q(t) \sin(k\omega t) dt; \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T q(t) dt. \quad (1.6)$$

Якщо функція $q(t)$ має простий вигляд і задана аналітично, то спектральний аналіз можна виконати згідно з формулою (1.6). Якщо ж досліджувана T -періодична функція має складний вигляд або задана у графічній чи табличній формі, то для спектрального аналізу використовують графічні чи чисельні методи.

Полігармонічні коливання (1.5) можна подати у комплексній формі:

$$q(t) = \sum_{k=-n}^n Q_{mk} \exp(j\omega_k t),$$

де Q_{mk} – позначення комплексної амплітуди гармонічної складової з частотою ω_k , причому $Q_{(-m)k} = \bar{Q}_{mk}$.

Головними характеристиками стаціонарних коливальних процесів є абсолютні значення максимуму і мінімуму (екстремальні, пікові значення) коливальної величини на деякому відрізку часу T :

$$q_{\max} = \left| \max q(t) \right|_{t \in T}; \quad q_{\min} = \left| \min q(t) \right|_{t \in T},$$

а також розмах коливань

$$\Delta q = q_{\max} - q_{\min}.$$

У багатьох випадках корисно знати усереднені характеристики коливального процесу коливної величини $q(t)$ на відрізку часу $[t, t+T]$:

– середнє значення:

$$q_{\text{сер}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} q(t) dt;$$

– середнє квадратичне значення:

$$q_{\text{сер.кв}} = \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} q^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

– середнє квадратичне (стандартне) відхилення:

$$q_{\text{сер.кв}} = \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} [q(t) - q_{\text{сер}}]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

У теорії динамічних систем сформувалася термінологія, запозичена більшою мірою з теоретичної механіки. Так, усі окремі члени диференціальних рівнянь називають силами. Члени диференціальних рівнянь, які не залежать ні від якої з узагальнених координат і їх похідних (вони можуть залежати лише від часу), називають «зовнішніми силами».

Позначатимемо надалі через $q(t)$ узагальнені координати (тобто ті величини, задання яких у сукупності повністю визначає поточне положення системи у просторі). Кількість узагальнених координат визначається кількістю ступенів вільності системи.

Лінійними системами називають такі динамічні системи, усі члени диференціальних рівнянь яких, окрім вільних членів (зовнішніх сил), є лінійними функціями узагальнених координат і їх похідних. Лінійна динамічна система із s степенями вільності описується у загальному випадку такою системою лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \dots + a_{1s}\ddot{q}_s + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + \dots + b_{1s}\dot{q}_s + c_{11}q_1 + \dots + c_{1s}q_s = e_1(t); \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + \dots + a_{2s}\ddot{q}_s + b_{21}\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2 + \dots + b_{2s}\dot{q}_s + c_{21}q_1 + \dots + c_{2s}q_s = e_2(t); \\ \dots = \dots \\ a_{s1}\ddot{q}_1 + a_{s2}\ddot{q}_2 + \dots + a_{ss}\ddot{q}_s + b_{s1}\dot{q}_1 + b_{s2}\dot{q}_2 + \dots + b_{ss}\dot{q}_s + c_{s1}q_1 + \dots + c_{ss}q_s = e_s(t). \end{cases} \quad (1.7)$$

Якщо використати позначення матриць:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{ss} \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{bmatrix}; \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_s \end{bmatrix}; \quad E(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \dots \\ e_s(t) \end{bmatrix};$$

то систему лінійних диференціальних рівнянь механічної системи, подану через узагальнені координати, можна записати у такому матричному вигляді:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = E(t). \quad (1.8)$$

Якщо реальну динамічну систему вдається задовільно для потреб теоретичного вивчення із заданою метою описати сукупністю рівнянь вигляду (1.7), то її називають лінійною динамічною системою. Якщо при цьому матриці A , B та C системи (1.8) не змінюються з плином часу (тобто всі коефіцієнти в системі рівнянь (1.7) є сталими), то таку динамічну систему називають лінійною стаціонарною системою. Проте, якщо хоча б один з коефіцієнтів a_{ij} , b_{ij} або c_{ij} змінюється з плином часу, то таку динамічну систему відносять вже до нестационарної лінійної або параметрично збуджуваної.

У загальному випадку залежності сил від узагальнених координат, швидкостей і прискорень можуть бути довільними, зокрема – нелінійними. Реальні системи, поведіння яких можна задовільно описати лише використовуючи нелінійні сили, дістали назву нелінійних динамічних систем.

Розглянемо деяку класифікацію сил (тобто членів диференціальних рівнянь).

Члени диференціальних рівнянь, пропорційні узагальненим прискоренням, за аналогією із силами Даламбера називають інерційними силами. Матриця A коефіцієнтів при узагальнених прискореннях зазвичай (унаслідок того, що кінетична енергія є квадратичною функцією узагальнених швидкостей) є симетричною.

Матриці ж B і C коефіцієнтів при узагальнених швидкостях та узагальнених координатах можуть бути довільними. Їх зручно подати у вигляді суми двох матриць, одна з яких симетрична, а друга – кососиметрична (це можна зробити завжди, для будь-якої заданої матриці):

$$B = B_d + G; \quad C = C_p + P.$$

З огляду на це, рівняння (1.8) можна подати у більш розгорнутому вигляді:

$$A\ddot{q} + B_d\dot{q} + G\dot{q} + C_pq + Pq = E(t),$$

де B_d і C_p – симетричні, а G і P – кососиметричні матриці.

Члени рівняння, пропорційні узагальненим швидкостям, коефіцієнти при яких утворюють у сукупності усіх рівнянь симетричну матрицю B_d , називають демпфівальними або дисипативними силами. Аналогічно члени, коефіцієнти при яких утворюють кососиметричну матрицю G , називають гіроскопічними силами. Члени рівняння, пропорційні узагальненим координатам, коефіцієнти при яких утворюють разом за всіма рівняннями симетричну матрицю C_d , називають потенціальними або консервативними силами. Члени, коефіцієнти при яких утворюють кососиметричну матрицю P , називають неконсервативними силами або силами радіальної корекції. Члени рівнянь, що утворюють матрицю $E(t)$, називають зовнішніми силами.

Якщо розглядати систему з одним ступенем вільності (тобто з однією узагальненою координатою q), то залежно від того, як і від чого залежить відповідний член диференціального рівняння, розрізняють такі сили:

– лінійну пружну силу, якщо вона лінійно (пропорційно) залежить від узагальненої координати і напрямлена у бік, протилежний її відхиленню від положення рівноваги q_0 :

$$Q = -c(q - q_0),$$

де c – коефіцієнт жорсткості, $c > 0$;

– лінійну демпфірувальну силу або силу в'язкого тертя, якщо вона лінійно залежить від узагальненої швидкості $\dot{q} = dq/dt$ і напрямлена у протилежний бік:

$$Q = -f\dot{q},$$

де f – коефіцієнт в'язкого тертя (демпфірування), $f > 0$;

– нелінійну пружну (відновну) силу, яка завжди напрямлена у бік, протилежний відхиленню від положення рівноваги q_0 :

$$Q = -F(q - q_0),$$

де $F(x)$ – функція, яка додатна за $x > 0$, дорівнює нулю за $x = 0$ і від'ємна за $x < 0$;

– нелінійну демпфірувальну силу, яка залежить від узагальненої швидкості $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ і напрямлена у протилежний бік:

$$Q = -\Phi(\dot{q}),$$

де $\Phi(x)$ – функція, яка додатна за $x > 0$, дорівнює нулю за $x = 0$ і від'ємна за $x < 0$; серед таких сил ще виділяють такі:

– силу сухого тертя, якщо її залежність від узагальненої швидкості має вигляд

$$Q = -k \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|}, \quad (k > 0);$$

для цієї сили характерно, що її величина не залежить від величини узагальненої швидкості;

– силу квадратичного (турбулентного) тертя, залежність якої від швидкості описується співвідношенням

$$Q = -k \cdot \dot{q} |\dot{q}|, \quad (k > 0).$$

Контрольні запитання

1. Що називають динамічною системою?
2. Що називають "силами" в теорії динамічних систем?
3. Які види "сил" розрізняють у теорії динамічних систем?
4. Які сили називають інерційними? дисипативними? потенційними? гіроскопічними? радіальної корекції?
5. Які динамічні системи називають: лінійними? лінійними стаціонарними? нелінійними? нестаціонарними?
6. Що таке коливання? Які динамічні системи називають коливальними?
7. Які коливання називають стаціонарними? перехідними? періодичними? гармонічними? полігармонічними?
8. Чи є полігармонічні коливання періодичними?
9. Що таке спектр коливань? Які види спектру існують?
10. Які види функцій використовуються для подання коливань в теорії динамічних коливань?
11. Якими головними характеристиками описують коливання в теорії коливань?

Лекція 2. Методи дослідження лінійних стаціонарних систем

Теорія лінійних стаціонарних систем спирається на теорію звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, яка є найбільш розвиненою у вищій математиці і дозволяє знаходити повні розв'язки майже в усіх важливих для практичного застосування випадках.

2.1. Теоретичне дослідження вільного руху

Розглянемо процес теоретичного дослідження на прикладі системи, що описується матричним рівнянням (1.8).

Вільним вважається рух системи тоді, коли на неї не діють зовнішні сили. Для динамічної системи це означає, що члени диференціальних рівнянь, що не залежать від узагальнених координат та їх похідних, дорівнюють нулю. Рівняння (1.8) у цьому випадку стає однорідним:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0. \quad (2.1)$$

Відповідно до теорії диференціальних рівнянь, частинний розв'язок рівняння (2.1) має вигляд

$$q = De^{pt}. \quad (2.2)$$

Підставивши вираз (2.2) у рівняння (2.1) дістанемо:

$$(Ap^2 + Bp + C)De^{pt} = 0.$$

Щоб вираз (2.2) був розв'язком рівняння (2.1), це співвідношення має виконуватися за будь-якого значення часу t . Це можливо у двох випадках:

– коли стала D дорівнює нулю; це відповідає тривіальному розв'язку $q(t) \equiv 0$;

– коли сталий параметр p задовольняє матричне рівняння

$$Ap^2 + Bp + C = 0. \quad (2.3)$$

Матрицю $Ap^2 + Bp + C$ називають *характеристичною матрицею системи* диференціальних рівнянь (1.7). Матричне рівняння (2.3) має розв'язок лише за умови обертання у нуль характеристичного визначника, тобто визначника характеристичної матриці:

$$\det(Ap^2 + Bp + C) = 0. \quad (2.4)$$

Запишемо характеристичне рівняння (2.4) більш розгорнуто:

$$\begin{vmatrix} a_{11}p^2 + b_{11}p + c_{11}; & a_{12}p^2 + b_{12}p + c_{12}; & \cdots & a_{1s}p^2 + b_{1s}p + c_{1s} \\ a_{21}p^2 + b_{21}p + c_{21}; & a_{22}p^2 + b_{22}p + c_{22}; & \cdots & a_{2s}p^2 + b_{2s}p + c_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}p^2 + b_{s1}p + c_{s1}; & a_{s2}p^2 + b_{s2}p + c_{s2}; & \cdots & a_{ss}p^2 + b_{ss}p + c_{ss} \end{vmatrix} = 0.$$

Розгортаючи визначник, отримаємо поліном порядку $2s$ за параметром p , тому рівняння (2.4) має $n = 2s$ коренів. Якщо корені різні, загальний розв'язок однорідного рівняння (2.1) матиме вигляд

$$q_{з.о}(t) = \sum_{k=1}^n D_k e^{p_k t},$$

тобто розв'язок з окремої узагальненої координати q_i можна подати так:

$$q_i(t) = \sum_{k=1}^n d_{ik} e^{p_k t}, \quad (i=1, 2, \dots, s).$$

2.2. Теоретичне дослідження вимушених коливань.

Метод комплексних амплітуд

Одним із найбільш типових режимів роботи більшості технічних об'єктів є коливальні режими, зокрема вимушені коливання, спричинені діями сил, які змінюються періодично у часі. Тому на особливу увагу заслуговують методи, які дають можливість ефективно вивчати вимушені коливання. Розглянемо детально один з найбільш зручних методів досліджування вимушених коливань у лінійних стаціонарних системах – метод комплексних амплітуд.

Метод комплексних амплітуд був спочатку утворений як один із варіантів символічного методу. Оскільки оператор диференціювання у комбінаціях з постійними коефіцієнтами підкоряється тим самим законам дистрибутивності, асоціативності та комутативності, що й звичайні числа, то головна ідея символічного методу полягає у заміні оператора диференціювання за часом деяким символом і формальному зведенні системи лінійних *диференціальних* рівнянь з постійними коефіцієнтами до системи лінійних алгебричних рівнянь. Розв'язуючи їх, отримують символічний розв'язок, який належить потім розкрити, користуючись певною рецептурою. Натепер, завдяки фундаментальному розвитку операційного числення, яке зв'язало основи символічного методу з перетвореннями Лапласа і потужними методами теорії функцій комплексних змінних, метод комплексних амплітуд став ефективним засобом дослідження вимушених коливань лінійних стаціонарних систем.

Метод комплексних амплітуд тісно пов'язаний з поняттям передатних функцій, зокрема, частотних передатних функцій, які широко застосовують у теорії автоматичного керування. Тому спочатку розглянемо ці поняття на прикладі одного диференціального рівняння n -го порядку:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad (2.5)$$

де x – деяка відома функція часу, яку будемо вважати вхідною фізичною величиною; y – шукана (невідома) змінна, яку вважатимемо вихідною.

Відомо, що повний розв'язок цього рівняння можна подати як суму

$$y(t) = y_{3.0}(t) + y_{ч.н}(t)$$

двох розв'язків:

1) загального розв'язку $y_{3.0}(t)$ відповідного однорідного рівняння:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0; \quad (2.6)$$

2) частинного розв'язку $y_{ч.н}(t)$ первинного неоднорідного рівняння (2.5), який відповідає заданому закону змінювання вхідної величини $x(t)$.

Відомо також, що окремий k -й розв'язок однорідного рівняння (2.6) має вигляд

$$y_k(t) = C_k e^{p_k t}.$$

Підставивши його в рівняння (1.14), дістанемо:

$$(a_n p_k^n + a_{n-1} p_k^{n-1} + \dots + a_1 p_k + a_0) C_k e^{p_k t} = 0,$$

з чого випливає: щоб це алгебричне рівняння виконувалося у будь-який момент часу t за будь-яких початкових умов, необхідно й достатньо, щоб вираз у дужках дорівнював нулю:

$$a_n p_k^n + a_{n-1} p_k^{n-1} + \dots + a_1 p_k + a_0 = 0,$$

тобто щоб значення p_k було коренем цього рівняння, яке називають характеристичним.

Загальний розв'язок однорідного рівняння, якщо корені характеристичного рівняння є різними (не кратними), являє собою суму таких частинних розв'язків, кожен з яких відповідає одному з коренів характеристичного рівняння:

$$y_{3.0}(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t}.$$

Примітки.

1. Якщо коефіцієнти характеристичного полінома дійсні, то корені характеристичного рівняння є або дійсними, або утворюють комплексно-спряжені пари.

2. Комплексно-спряженій парі коренів $p_1 = \alpha + j\beta$ та $p_2 = \alpha - j\beta$ відповідає частинний розв'язок вигляду

$$y_{1,2}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} = e^{\alpha t} (C_1 e^{j\beta t} + C_2 e^{-j\beta t}) = e^{\alpha t} [A_S \sin(\beta t) + A_C \cos(\beta t)],$$

де A_S і A_C – нові сталі інтегрування, які є дійсними, на відміну від початкових комплексно-спряжених C_1 і C_2 .

Припустимо тепер, що вхідна величина змінюється з плином часу за гармонічним законом

$$x(t) = X_m e^{j\omega t} = X_m \exp(j\omega t), \quad (2.7)$$

де X_m – деяка стала, у загальному випадку комплексна величина, яку називатимемо комплексною амплітудою вхідної величини. Тоді частинний розв'язок рівняння (2.5) має аналогічну залежність від часу:

$$y_{ч.н}(t) = Y_m e^{j\omega t} = Y_m \exp(j\omega t). \quad (2.8)$$

Підставляючи вирази (2.7) і (2.8) у рівняння (2.5), отримаємо рівняння для визначення невідомих комплексних амплітуд Y_m вихідної величини:

$$\begin{aligned} [a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1j\omega + a_0]Y_m e^{j\omega t} = \\ = [b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1j\omega + b_0]X_m e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Звідси маємо:

$$Y_m = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1j\omega + a_0} X_m = W(j\omega)X_m,$$

де величина

$$W(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1j\omega + a_0} = W(p)|_{p=j\omega}$$

є частотною передатною функцією системи. Її визначають як передатну функцію $W(p)$ системи за Лапласом за суто уявних значень оператора p Лапласа.

Отже, частотна передатна функція являє собою відношення комплексної амплітуди гармонічних усталених коливань з частотою ω на виході системи до комплексної амплітуди коливань такої самої частоти вхідної (збурювальної) величини:

$$\frac{Y_m}{X_m} = W(j\omega). \quad (2.9)$$

Як і будь-які комплексні величини, $W(j\omega)$, X_m та Y_m можна подати у двох формах:

$$\begin{cases} W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega); \\ X_m = X_c + jX_s; \\ Y_m = Y_c + jY_s \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} W(j\omega) = W(\omega)e^{j\varepsilon}; \\ X_m = x_m e^{j\alpha}; \\ Y_m = y_m e^{j\beta}. \end{cases} \quad (2.10)$$

У першій формі величини поділено на дійсну та уявну частини:

$$U(\omega) = \operatorname{Re}[W(j\omega)]; \quad V(\omega) = \operatorname{Im}[W(j\omega)];$$

$$X_c = \operatorname{Re}[X_m]; \quad X_s = \operatorname{Im}[X_m]; \quad Y_c = \operatorname{Re}[Y_m]; \quad Y_s = \operatorname{Im}[Y_m].$$

Друга форма – експоненціальна. При цьому коефіцієнти при експонентах є модулями відповідної комплексної величини:

$$W(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad x_m = \sqrt{X_c^2 + X_s^2}; \quad y_m = \sqrt{Y_c^2 + Y_s^2},$$

а показники при уявних степенях експонент – аргументами цих комплексних величин:

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{U(\omega)}{V(\omega)}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{X_s}{X_c}; \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{Y_s}{Y_c},$$

тобто є кутами, які складають вектори, що зображують ці величини на комплексній площині, з додатною дійсною піввіссю (рис. 1.4).

Підставимо у вираз (1.17) вирази (1.18) в експоненціальній формі:

$$y_m e^{j\beta} = W(\omega) x_m e^{j(\varepsilon + \alpha)},$$

тоді

$$y_m = W(\omega) x_m; \quad \beta = \alpha + \varepsilon.$$

Отже, модуль $W(\omega)$ частотної передатної функції дорівнює відношенню амплітуд гармонічних коливань вихідної і вхідної величин, а її аргумент – куту, на який повертається у комплексній площині вектор комплексної амплітуди вхідної величини, щоб дістатися вектора комплексної амплітуди вихідної величини.

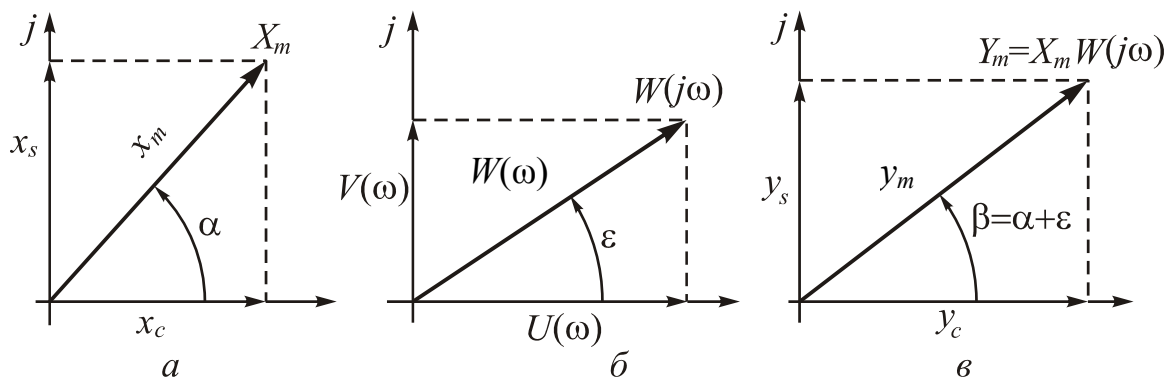


Рис. 2.1. Зображення комплексних величин на комплексній площині

Із рис. 2.1 випливає, що

$$\begin{aligned} X_c &= x_m \cos \alpha; & X_s &= x_m \sin \alpha; \\ Y_c &= y_m \cos(\alpha + \varepsilon); & Y_s &= y_m \sin(\alpha + \varepsilon). \end{aligned}$$

Припустимо тепер, що вхідна величина $x(t)$ є дійсною гармонічною функцією часу:

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \alpha). \quad (2.11)$$

Взаємозв'язок між дійсною (2.11) і комплексною (2.7) формами запису гармонічної величини можна подати двома способами.

За першим способом, згадуючи формулу Ейлера,

$$e^{j(\omega t + \alpha)} = \cos(\omega t + \alpha) + j \sin(\omega t + \alpha),$$

і маючи на увазі, що відповідно до виразу (2.10) комплексну форму (2.7) можна перетворити до вигляду

$$X(t) = x_m e^{j(\omega t + \alpha)}, \quad (2.12)$$

можна впевнитися, що дійсна форма запису гармонічного сигналу є уявною частиною комплексної форми (2.12). Виходячи з цього розуміння, щоб визначити усталену реакцію системи на гармонічне збурення вигляду (2.11), достатньо визначити реакцію системи на комплексне гармонічне збурення (2.12) і у знайденій комплексній величині виділити уявну частину:

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \alpha) = \text{Im} \{x_m e^{j(\omega t + \alpha)}\} \Rightarrow y(t) = \text{Im} \{W(j\omega)x_m e^{j(\omega t + \alpha)}\}.$$

Аналогічно, якщо на вхід системи подається косинусоїдальний сигнал, то для знаходження розв'язку, відповідного вимушеним коливанням, достатньо виокремити дійсну частину у комплексному поданні збурення:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \alpha) = \text{Re} \{x_m e^{j(\omega t + \alpha)}\} \Rightarrow y(t) = \text{Re} \{W(j\omega)x_m e^{j(\omega t + \alpha)}\}.$$

Такий спосіб рекомендується у більшості посібників з електротехніки і теорії автоматичного регулювання.

Можливий, однак, і інший погляд на взаємозв'язок дійсного й комплексного подання гармонічно змінюваної величини. Так, з формули Ейлера випливає:

$$\cos(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}[e^{j(\omega t + \alpha)} + e^{-j(\omega t + \alpha)}]; \quad \sin(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2j}[e^{j(\omega t + \alpha)} - e^{-j(\omega t + \alpha)}].$$

Тому реакцію системи на косинусоїдально змінювану величину можна подати як півсуму реакцій системи на два комплексні збурення – одного з частотою ω та аргументом α , а другого – з частотою $(-\omega)$ і аргументом $(-\alpha)$. Аналогічно можна знайти частинний розв'язок за синусоїдального збурення. Реакцію системи на комплексне збурення з від'ємною частотою $(-\omega)$ визначити нескладно за такою самою методикою. Необхідно лише, відшуковуючи частотну передатну функцію підставити замість оператора Лапласа p не $j\omega$, а $(-j\omega)$.

Обмежимося визначенням вимушених коливань лише в разі косинусоїдальної дії. Подамо цю дію у комплексній формі:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \alpha) = \frac{x_m}{2} e^{j\alpha} e^{j\omega t} + \frac{x_m}{2} e^{-j\alpha} e^{-j\omega t} = X_m e^{j\omega t} + \bar{X}_m e^{-j\omega t}, \quad (2.13)$$

де

$$X_m = \frac{x_m}{2} e^{j\alpha}; \quad \bar{X}_m = \frac{x_m}{2} e^{-j\alpha},$$

являють собою комплексно спряжені величини, першу з яких називатимемо комплексною амплітудою збурення. Неважко бачити, що

$$X_m = \frac{x_m}{2} (\cos \alpha + j \sin \alpha); \quad \bar{X}_m = \frac{x_m}{2} (\cos \alpha - j \sin \alpha),$$

і виконуються такі співвідношення:

$$X_m + \bar{X}_m = x_m \cos \alpha; \quad X_m - \bar{X}_m = j x_m \sin \alpha;$$

$$X_m \bar{X}_m = \frac{x_m^2}{4}; \quad \frac{X_m}{\bar{X}_m} = e^{j2\alpha}.$$

Отже, відповідно до співвідношення (2.13) можна вважати, що на систему діють дві комплексні гармонічні дії: одна з комплексною амплітудою X_m і частотою ω , друга – з амплітудою \bar{X}_m і частотою $(-\omega)$. Застосовуючи метод комплексних амплітуд до першого збурення, дістанемо

$$y_1(t) = W(j\omega)X_m e^{j\omega t}.$$

Для другого збурення відповідна реакція системи матиме вигляд

$$y_2(t) = W(-j\omega)\bar{X}_m e^{-j\omega t}.$$

У цілому реакція системи на косинусоїдальну дію дорівнює сумі цих двох розв'язків (для лінійних систем є слушним принцип суперпозиції – *реакція системи на суму кількох дій дорівнює сумі реакцій цієї системи на кожен з цих дій окремо*):

$$y_{\text{ч.н.}}(t) = y_1(t) + y_2(t) = W(j\omega)X_m e^{j\omega t} + W(-j\omega)\bar{X}_m e^{-j\omega t}. \quad (2.14)$$

Зазначимо одну важливу властивість частотних передатних функцій: *частотна передатна функція для від'ємної частоти є комплексно спряженою відносно частотної передатної функції для додатної частоти*:

$$W(-j\omega) = \bar{W}(j\omega) = U(\omega) - jV(\omega).$$

Ця властивість випливає з того, що дійсна частина $U(\omega)$ частотної передатної функції є парною функцією частоти, а уявна частина $V(\omega)$ – непарною її функцією.

Враховуючи це, запишемо вираз (1.22) так:

$$y_{\text{ч.н.}}(t) = W(j\omega)X_m e^{j\omega t} + \bar{W}(j\omega)\bar{X}_m e^{-j\omega t}.$$

Виходить розв'язок, який вельми нагадує за формою вираз (2.13). Ввівши позначення

$$Y_m = W(j\omega)X_m, \quad (2.15)$$

остаточно подамо розв'язок у такий спосіб:

$$y_{\text{ч.н.}}(t) = Y_m e^{j\omega t} + \bar{Y}_m e^{-j\omega t} = y_m \cos(\omega t + \beta),$$

причому

$$Y_m = \frac{y_m}{2} e^{j\beta}.$$

Отже, для того, щоб визначити вимушені коливання лінійної системи під дією збурення типу (2.13), достатньо:

- 1) знайти частотну передатну функцію системи $W(j\omega)$;
- 2) відшукати комплексну амплітуду вихідної величини за формулою (2.15):

$$Y_m = W(j\omega)X_m = \frac{x_m}{2} W(j\omega) e^{j\alpha} = A + jB,$$

де

$$A = \frac{x_m}{2} [U(\omega) \cos \alpha - V(\omega) \sin \alpha]; \quad B = \frac{x_m}{2} [V(\omega) \cos \alpha + U(\omega) \sin \alpha];$$

- 3) записати остаточний розв'язок у вигляді

$$y_{\text{ч.н.}}(t) = (A + jB)e^{j\omega t} + (A - jB)e^{-j\omega t} = 2A \cos \omega t + 2B \sin \omega t =$$

$$= x_m[U(\omega)\cos(\omega t + \alpha) - V(\omega)\sin(\omega t + \alpha)].$$

Як видно з останнього запису, якщо вимушені коливання поділити на дві частини: одну – яка коливається синфазно зі збуренням (у розглядуваному випадку – ту, що змінюється за законом $\cos(\omega t + \alpha)$), другу – що випереджає збурення за фазою на 90° ($-\sin(\omega t + \alpha)$), то амплітуда першої складової дорівнюватиме добутку амплітуди збурення на дійсну частину частотної передатної функції, а амплітуда другої – добутку амплітуди збурення на уявну частину частотної передатної функції.

2.3. Вимушені коливання гіроскопа у кардановому підвісі

Як приклад застосування методу комплексних амплітуд розглянемо процес визначення вимушених коливань гіроскопа у кардановому підвісі (ГКП).

Лінеаризовані рівняння руху ГКП можна записати у вигляді

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} + H_0 \cos\beta_{\text{сеп}}\dot{\beta} = N - R \sin\beta_{\text{сеп}}; \\ J_3\ddot{\beta} - H_0 \cos\beta_{\text{сеп}}\dot{\alpha} = L, \end{cases} \quad (2.16)$$

де $\beta_{\text{сеп}}$ – деяке стале середнє значення кута β , в околі якого розглядається рух гіроскопа;

$$A = J_1 + J_2 \cos^2 \beta_{\text{сеп}}.$$

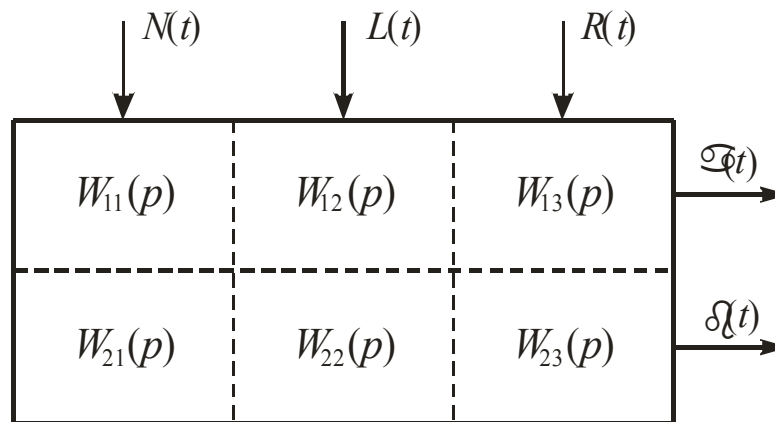


Рис. 2.2. Подання ГКП як багатовимірної системи

Як випливає з рівнянь (2.16), ГКП можна розглядати як систему, що має три «входи» і два «виходи» (рис. 2.2). Входами системи є величини моментів сил, що діють на ГКП уздовж осей його підвісу: $N(t)$ – момент сил, що діє по зовнішній осі підвісу; $L(t)$ – момент, що діє по внутрішній осі підвісу і $R(t)$ – момент по головній осі гіроскопа. Вихідними величинами будемо вважати кутові швидкості $\dot{\alpha}$ та $\dot{\beta}$ повороту ГКП навколо зовнішньої і внутрішньої осей підвісу відповідно.

Така складна (багатовимірна) система характеризується шістьма передатними функціями (кожного виходу за кожним входом). Щоб визначити їх, запи-

шемо систему рівнянь (2.16) в операторно-матричній формі, застосувавши до обох частин перетворення Лапласа:

$$\begin{bmatrix} Ap & H_0 \cos \beta_{\text{сеп}} \\ -H_0 \cos \beta_{\text{сеп}} & J_3 p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}(p) \\ \dot{\beta}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} N(p) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} L(p) + \begin{bmatrix} -\sin \beta_{\text{сеп}} \\ 0 \end{bmatrix} N(p).$$

Тепер передатні функції за Лапласом можна визначити за правилом Крамера – діленням на визначник основної матриці визначника матриці, яка виходить з головної внаслідок заміни стовпця, що відповідає обраній вихідній величині, на стовпець за відповідної вхідної величини. Оскільки

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} Ap & H_0 \cos \beta_{\text{сеп}} \\ -H_0 \cos \beta_{\text{сеп}} & J_3 p \end{vmatrix} = AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{\text{сеп}};$$

$$\Delta_{11}(p) = \begin{vmatrix} 1 & H_0 \cos \beta_{\text{сеп}} \\ 0 & J_3 p \end{vmatrix} = J_3 p; \quad \Delta_{12}(p) = \begin{vmatrix} 0 & H_0 \cos \beta_{\text{сеп}} \\ 1 & J_3 p \end{vmatrix} = -H_0 \cos \beta_{\text{сеп}};$$

$$\Delta_{21}(p) = \begin{vmatrix} Ap & 1 \\ -H_0 \cos \beta_{\text{сеп}} & 0 \end{vmatrix} = H_0 \cos \beta_{\text{сеп}}; \quad \Delta_{22}(p) = \begin{vmatrix} Ap & 0 \\ -H_0 \cos \beta_{\text{сеп}} & 1 \end{vmatrix} = Ap,$$

то вирази передатних функцій набудуть вигляду:

$$W_{11}(p) = \frac{\dot{\alpha}(p)}{N(p)} = \frac{J_3 p}{AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{\text{сеп}}};$$

$$W_{21}(p) = \frac{\dot{\beta}(p)}{N(p)} = \frac{H_0 \cos \beta_{\text{сеп}}}{AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{\text{сеп}}};$$

$$W_{12}(p) = \frac{\dot{\alpha}(p)}{L(p)} = \frac{-H_0 \cos \beta_{\text{сеп}}}{AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{\text{сеп}}};$$

$$W_{22}(p) = \frac{\dot{\beta}(p)}{L(p)} = \frac{Ap}{AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{\text{сеп}}};$$

$$W_{13}(p) = \frac{\dot{\alpha}(p)}{R(p)} = \frac{-J_3 p \sin \beta_{\text{сеп}}}{AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{\text{сеп}}};$$

$$W_{23}(p) = \frac{\dot{\beta}(p)}{R(p)} = \frac{-H_0 \sin \beta_{\text{сеп}} \cos \beta_{\text{сеп}}}{AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{\text{сеп}}}.$$

Частотні передатні функції отримаємо, замінюючи у виразах передатних функцій за Лапласом оператор p на $j\omega$:

$$W_{11}(j\omega) = j \sqrt{\frac{J_3}{A}} \frac{1}{H_0 \cos \beta_{\text{сеп}}} \cdot \frac{v}{1-v^2}; \quad W_{21}(j\omega) = \frac{1}{H_0 \cos \beta_{\text{сеп}}} \cdot \frac{1}{1-v^2};$$

$$\begin{aligned}
 W_{12}(j\omega) &= -\frac{1}{H_0 \cos\beta_{\text{cep}}} \cdot \frac{1}{1-v^2}; & W_{22}(j\omega) &= j\sqrt{\frac{A}{J_3}} \cdot \frac{1}{H_0 \cos\beta_{\text{cep}}} \cdot \frac{v}{1-v^2}; \\
 W_{13}(j\omega) &= -j\sqrt{\frac{J_3}{A}} \frac{\sin\beta_{\text{cep}}}{H_0 \cos\beta_{\text{cep}}} \frac{v}{1-v^2}; & W_{23}(j\omega) &= -\frac{\sin\beta_{\text{cep}}}{H_0 \cos\beta_{\text{cep}}} \cdot \frac{1}{1-v^2}, \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

де

$$v = \frac{\omega}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{H_0 \cos\beta_{\text{cep}}}{\sqrt{AJ_3}}.$$

Виділимо дійсні та уявні частини частотних передатних функцій:

$$U_{11}(\omega) = 0; \quad V_{11}(\omega) = \sqrt{\frac{J_3}{A}} \cdot \frac{1}{H_0 \cos\beta_{\text{cep}}} \cdot \frac{v}{1-v^2};$$

$$U_{12}(\omega) = -\frac{1}{H_0 \cos\beta_{\text{cep}}} \cdot \frac{1}{1-v^2}; \quad V_{12}(\omega) = 0;$$

$$U_{13}(\omega) = 0; \quad V_{13}(\omega) = -\sqrt{\frac{J_3}{A}} \cdot \frac{\sin\beta_{\text{cep}}}{H_0 \cos\beta_{\text{cep}}} \cdot \frac{v}{1-v^2};$$

$$U_{21}(\omega) = \frac{1}{H_0 \cos\beta_{\text{cep}}} \cdot \frac{1}{1-v^2}; \quad V_{21}(\omega) = 0;$$

$$U_{22}(\omega) = 0; \quad V_{22}(\omega) = \sqrt{\frac{A}{J_3}} \cdot \frac{1}{H_0 \cos\beta_{\text{cep}}} \cdot \frac{v}{1-v^2};$$

$$U_{23}(\omega) = -\frac{\sin\beta_{\text{cep}}}{H_0 \cos\beta_{\text{cep}}} \cdot \frac{1}{1-v^2}; \quad V_{23}(\omega) = 0.$$

Припустимо, що моменти сил змінюються за законом

$$N(t) = N_s \sin\omega t + N_c \cos\omega t; \quad L(t) = L_s \sin\omega t + L_c \cos\omega t; \quad R(t) = R_m \sin\omega t. \quad (2.18)$$

Повний частинний розв'язок з кожної вихідної величини, внаслідок принципу суперпозиції, складається з трьох доданків, кожен з яких є розв'язком, що відповідає одній із вхідних величин:

$$\dot{\alpha}_{\text{ч.н}}(t) = \dot{\alpha}_1(t) + \dot{\alpha}_2(t) + \dot{\alpha}_3(t); \quad \dot{\beta}_{\text{ч.н}}(t) = \dot{\beta}_1(t) + \dot{\beta}_2(t) + \dot{\beta}_3(t).$$

Кожен із цих доданків визначається за правилом, сформульованим у попередньому поділі. Зокрема, матимемо:

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}_1(t) &= U_{11}N(t) + V_{11}N\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right) = \\
 &= U_{11}(N_s \sin\omega t + N_c \cos\omega t) + V_{11}\left[N_s \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + N_c \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= U_{11}(N_s \sin \omega t + N_c \cos \omega t) + V_{11}(N_s \cos \omega t - N_c \sin \omega t) = \\
 &= [U_{11}N_s - V_{11}N_c] \sin \omega t + [U_{11}N_c + V_{11}N_s] \cos \omega t = \\
 &= \sqrt{\frac{J_3}{A}} \cdot \frac{1}{H_0 \cos \beta_{\text{cep}}} \cdot \frac{v}{1-v^2} (-N_c \sin \omega t + N_s \cos \omega t);
 \end{aligned}$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = U_{12}L(t) + V_{12}L\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{1}{H_0 \cos \beta_{\text{cep}}} \cdot \frac{1}{1-v^2} (L_s \sin \omega t + L_c \cos \omega t);$$

$$\dot{\alpha}_3(t) = U_{13}R(t) + V_{13}R\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right) = -\sqrt{\frac{J_3}{A}} \cdot \frac{\sin \beta_{\text{cep}}}{H_0 \cos \beta_{\text{cep}}} \cdot \frac{v}{1-v^2} R_m \cos \omega t.$$

Тепер можна записати повний розв'язок з кутової швидкості α :

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}_{\text{ч.н}}(t) = \frac{1}{H_0 \cos \beta_{\text{cep}}} \cdot \frac{1}{1-v^2} \left\{ \left[v(N_s - R_m \sin \beta_{\text{cep}}) \sqrt{\frac{J_3}{A}} - L_c \right] \cos \omega t - \right. \\
 \left. - \left(vN_c \sqrt{\frac{J_3}{A}} + L_s \right) \sin \omega t \right\}. \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Аналогічно визначимо розв'язок з кутової швидкості β :

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta}_{\text{ч.н}}(t) = \frac{1}{H_0 \cos \beta_{\text{cep}}} - \frac{1}{1-v^2} \left\{ \left(N_{\text{cep}} + vL_s \sqrt{\frac{A}{J_3}} \right) \cos \omega t + \right. \\
 \left. + \left[(N_s - R_m \sin \beta_{\text{cep}}) - vL_c \sqrt{\frac{A}{J_3}} \right] \sin \omega t \right\}.
 \end{aligned}$$

Контрольні запитання

1. Що називають лінійною стаціонарною системою?
2. Що розуміють під поняттям "вільний рух системи"?
3. Які постійні параметри визначають вільний рух системи? Як вони визначаються?
4. Що називають вимушеним рухом системи? Якими параметрами визначається вимушений рух системи при гармонічній дії на неї?
5. Що називають передатною функцією системи? частотною передатною функцією? амплітудно-частотною характеристикою? фазочастотною характеристикою системи?
6. У чому полягає метод комплексних амплітуд і для чого він застосовується?
7. Що таке комплексна амплітуда і як вона пов'язана з амплітудою і фазою гармонічного сигналу?

Лекція 3. Методи дослідження нелінійних і нестационарних систем

Загальних методів розв'язування нелінійних (і навіть лінійних, але зі змінними коефіцієнтами) диференціальних рівнянь немає. Тобто математика не надає інженерам загальних засобів теоретичного досліджування нелінійних і нестационарних систем. Лише деякі теоретичні дослідження таких систем закінчуються точним розв'язуванням диференціальних рівнянь. Зазвичай інженерні дослідження проводять із застосуванням наближених методів теоретичного дослідження.

Справа дещо полегшується завдяки тому, що здебільшого інженера цікавить не загальний рух, а лише деякі характеристики можливих стаціонарних коливальних режимів розглядуваної системи. Тому серед наближених методів особливого розвитку набули методи, що пристосовані для визначення параметрів стаціонарних коливань, які відзначаються незмінністю основних характеристик (середнього значення, амплітуди, спектрального складу, фаз тощо). Усі ці методи, у свою чергу, можна згрупувати у кілька великих груп, серед яких виокремлюють дві найбільш важливі в інженерній практиці.

До першої групи належать методи лінеаризації, в яких замість дослідження первинної нелінійної системи вивчають деяку лінійну стаціонарну систему, яка описується лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами і є у деякому розумінні еквівалентною первинній нелінійній системі. Методи лінеаризації розрізняють залежно від того, який зміст вкладається у поняття такої еквівалентності. Отже, суть методів лінеаризації полягає у попередній заміні всіх нелінійних сил (членів диференціальних рівнянь) наближеними лінійними функціями від узагальнених координат і швидкостей. Далі у заданих умовах знаходять усталений розв'язок отриманих лінійних («лінеаризованих») диференціальних рівнянь, і згідно з отриманим розв'язком роблять висновки про рух початкової нелінійної системи.

З описаної схеми стає очевидним, що методи лінеаризації є математично некоректними. Немає ніякого математичного обґрунтування того, що поведінка початкової нелінійної і відповідної їй лінеаризованої системи мають хоч щось спільне. Таке обґрунтування можливе тільки виходячи із зовсім інших, нематематичних міркувань, наприклад, фізичного змісту, теоретичних знань і практичного досвіду про поведінку таких систем тощо. Зате коли заздалегідь відомо, що реальний досліджуваний процес являє собою стаціонарні коливання, застосування методів лінеаризації є цілком справдженим і слушним.

Другою великою групою методів теоретичного дослідження нелінійних коливальних систем є методи малого параметра. Загальним для них є те, що вони застосовуються лише до таких систем, диференціальні рівняння яких, хоча й є нелійними, але містять при нелінійних членах деякий множник (малий параметр) так, що за нульового його значення вони перетворюються у лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами, причому вважається, що у досліджуваному випадку цей множник має досить мале значення. Такі системи

дістали назву квазілінійних. Поняття мализни параметра-множника досить невизначене. Воно ґрунтується на припущенні, що розв'язок початкової нелінійної системи якісно й кількісно незначно відрізняється від розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь, у яку перетворюється початкова система нелінійних диференціальних рівнянь, якщо малий параметр дорівнюватиме нулю, і яку називають породжувальною **Ошибка! Закладка не определена.** системою рівнянь.

До методів малого параметра належать:

1) теорія (методи) збурень, розроблена для вивчення руху планет, і різні її варіанти (наприклад, метод Пуассона), та сучасні модифікації, такі як метод Остроградського–Ляпунова, метод О. М. Крилова та ін.;

2) метод Пуанкаре;

3) асимптотичні методи (зокрема, метод Н. М. Крилова і М. М. Боголюбова);

4) метод усереднення.

Перші два методи призначені для визначення періодичних розв'язків нелінійних систем. Інші два методи (асимптотичний й усереднення) пристосовані не лише для знаходження періодичних розв'язків, але й дослідження перехідних процесів, що робить їх ефективними засобами аналізу нелінійних коливальних систем.

3.1. Методи лінеаризації

Основою методу лінеаризації як методу знаходження періодичних розв'язків нелінійної системи диференціальних рівнянь є лінеаризація нелінійностей, тобто попередня заміна всіх нелінійних членів диференціальних рівнянь на деякі лінійні, у деякому сенсі близькі до первинних нелінійних. Далі аналізують (знаходять розв'язки) вже нові (наближені) лінійні (лінеаризовані) рівняння, на основі чого робляться висновки про рух первинної нелінійної системи.

Зосередимося передусім на різних способах лінеаризації нелінійностей.

3.1.1. «Класична» лінеаризація

Ознайомлення з лінеаризацією нелінійностей зручно почати зі способу, який будемо називати «класичною» лінеаризацією і який поширений в теорії автоматичного керування для дослідження стійкості нелінійних систем. Полягає він у розкладанні нелінійної функції узагальнених координат та швидкостей у ряд Тейлора в околі деякого положення рівноваги й у збереженні у цьому розкладі лише членів, що лінійно залежать від координат і швидкостей:

$$f(q, \dot{q}) \Rightarrow f(q_0, 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q_0, 0} (q - q_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right|_{q_0, 0} \dot{q},$$

де q_0 – значення узагальненої координати у положенні рівноваги.

Геометричний зміст такої лінеаризації досить простий. Класична лінеаризація є еквівалентною заміні початкової гіперповерхні, яка зображує залежність

нелінійної сили від узагальнених координат і швидкостей, на гіперплощину, дотичну до цієї гіперповерхні у точці рівноваги.

Недоліки способу класичної лінеаризації очевидні. Він може бути застосований лише до гладких нелінійностей. Цілий практично значущий для інженерів клас суттєвих нелінійностей (із розривами) не можна досліджувати цим способом. Іншим недоліком способу є та обставина, що «коефіцієнти лінеаризації», під якими розуміють зазвичай тангенси кутів α та β (рис. 3.1) нахилу дотичних до відповідних координатних осей, залишаються такими самими у разі збільшення чи зменшення амплітуд можливих (досліджуваних) коливань координат q або \dot{q} . Але з рис. 3.1 легко впевнитися, що дотичну пряму можна вважати досить близькою до нелінійної кривої лише у разі дуже малих відхилень від положення рівноваги. Із зростанням амплітуди коливань «середня» пряма, близька до відповідного відрізка кривої, має змінювати своє положення відповідно до виду й характеру кривої. Так, на рис. 3.1а зі зростанням амплітуди середня пряма, що замінює відрізок кривої, має підніматися вище відносно дотичної, а на рис. 3.1б – повертатися навколо початку координат, утворюючи все більший кут з віссю \dot{q} .

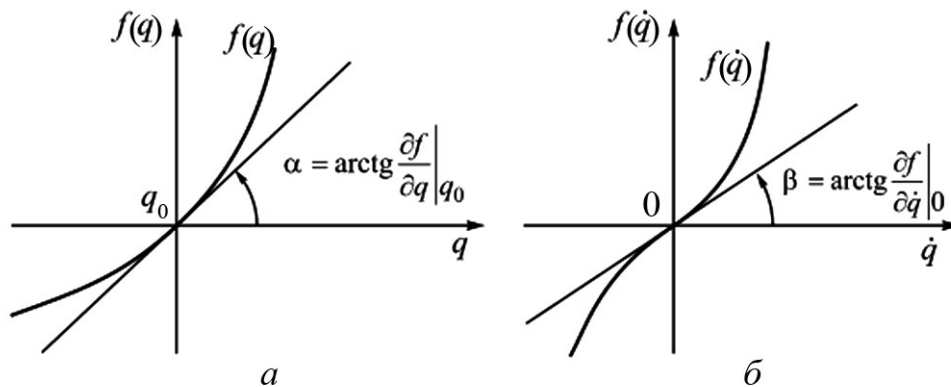


Рис. 3.1. Класична лінеаризація

Цей недолік призводить до того, що метод класичної лінеаризації не дає можливості виявити ніяких специфічних для нелінійних систем особливостей їх поведіння. Зокрема, методом класичної лінеаризації неможливо виявити незохронність власних коливань (тобто залежність періоду власних коливань від їх амплітуди), виникнення «зривів» коливань (тобто стрибкоподібних змін амплітуди вимушених коливань) тощо. Інакше кажучи, класична лінеаризація «надто добре» лінеаризує нелінійну залежність, настільки «добре», що нелінійна система за такого перетворення повністю втрачає всі свої нелінійні властивості і стає в усіх відношеннях звичайною лінійною системою з усіма її характерними особливостями.

Саме тому класичну лінеаризацію не застосовують для відшукування розв'язків нелінійних систем. Її використовують лише для вивчення стійкості руху нелінійної системи.

3.1.2 Лінеаризація «по кінцях».

Лінеаризацію по кінцях не відображено в літературі, але вона найбільш природна і проста за змістом. У багатьох випадках цей спосіб лінеаризації дає задовільні результати. Як і розглянуті далі способи прямої лінеаризації, лінеаризація по кінцях пристосована лише до нелінійної функції однієї змінної (або узагальненої координати, або узагальненої швидкості). Найлегше усвідомити її зміст, вдаючись до геометричної інтерпретації (рис. 3.2).

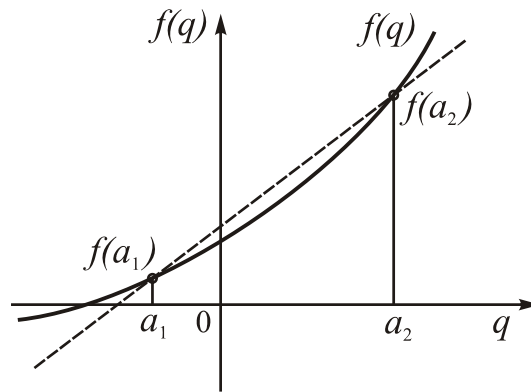


Рис. 3.2. Лінеаризація «по кінцях»

Лінеаризація полягає у заміні відрізка кривої $f(q)$ між значеннями a_1 та a_2 аргумента q на пряму

$$f_e(q) = s_e + c_e q, \quad (3.1)$$

що проходить через кінці цього відрізка (рис. 3.2), тобто через точки $(a_1, f(a_1))$ та $(a_2, f(a_2))$. Неважко зрозуміти, що коефіцієнти лінеаризації s_e та c_e у цьому випадку можна визначити за формулами

$$s_e = \frac{a_2 f(a_1) - a_1 f(a_2)}{a_2 - a_1}; \quad c_e = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}. \quad (3.2)$$

Більш зручно виражати коефіцієнти лінеаризації через середнє значення аргументу a_0 та амплітуду a змінювання аргументу, які визначимо за формулами

$$a_0 = \frac{a_2 + a_1}{2}; \quad a = \frac{a_2 - a_1}{2}.$$

Тепер формули (1.29) визначення коефіцієнтів лінеаризації можна подати у вигляді

$$s_e = \frac{(a_0 + a)f(a_0 - a) - (a_0 - a)f(a_0 + a)}{2a}; \quad c_e = \frac{f(a_0 + a) - f(a_0 - a)}{2a}. \quad (3.3)$$

За будь-якого способу лінеаризації коефіцієнти лінеаризації набувають вигляду функцій середнього значення та амплітуди змінювання узагальненої ко-

ординати. Тому ці коефіцієнти утворюють лінійні члени диференціальних рівнянь тільки у випадку, коли і середнє значення, й амплітуда коливань з часом не змінюються, тобто у випадку стаціонарних коливань. Із цього випливає, що методи лінеаризації придатні для знаходження лише параметрів стаціонарних (усталених) коливань нелінійних систем.

Формули (3.2) суттєво спрощуються, якщо заздалегідь відомо, що в нелінійній системі усталаються центровані коливання, тобто такі коливання, за яких середнє відхилення коливної величини від положення рівноваги дорівнює нулю. Тоді покладаючи $a_0 = 0$, отримаємо з (3.2):

$$s_e = \frac{f(a) + f(-a)}{2}; \quad c_e = \frac{f(a) - f(-a)}{2a}.$$

3.1.3. Пряма лінеаризація

Сутність способу прямої лінеаризації полягає у тому, що відрізок нелінійної кривої $f(q)$, обмежений розмахом коливань, апроксимується прямою з мінімально можливим інтегральним середнім квадратичним відхиленням від заданого відрізка кривої. Саме з цієї умови визначаються параметри апроксимувальної прямої.

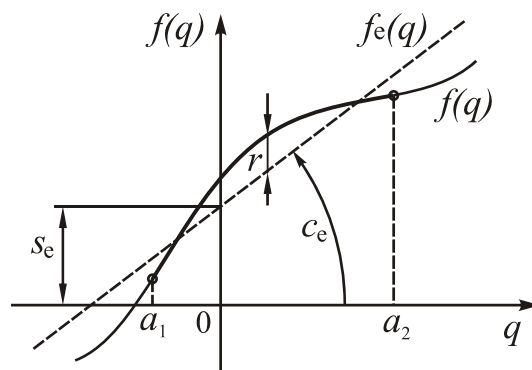


Рис. 3.3. Пряма лінеаризація

Уведемо поняття «відхилення» r , під яким (рис. 3.3) розумітимемо різницю між поточним значенням нелінійної сили $f(q)$ і значенням «лінеаризованої» сили (3.1) за того самого значення аргументу q :

$$r = f(q) - f_e(q) = f(q) - s_e - c_e q. \quad (3.4)$$

Як міру інтегрального відхилення прямої $f_e(q)$ від кривої $f(q)$ на відрізку $a_1 < q < a_2$ візьмемо інтеграл

$$\Phi = \int_{a_1}^{a_2} r^2(q) dq = \int_{a_0-a}^{a_0+a} r^2(q) dq.$$

З урахуванням (3.4) маємо

$$\Phi = \int_{a_0-a}^{a_0+a} \{f(q) - s_e - c_e q\}^2 dq = \Phi(s_e, c_e, a, a_0) \quad (3.5)$$

Потрібно так підібрати шукані величини s_e та c_e , щоб функціонал (3.5) за цих значень здобув мінімальне значення. Умови екстремуму визначають шляхом прирівнювання до нуля часткових похідних від функціоналу (3.5) за шуканими величинами s_e та c_e :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial s_e} &= \frac{\partial}{\partial s_e} \left(\int_{a_0-a}^{a_0+a} (f(q) - s_e - c_e q)^2 dq \right) = \int_{a_0-a}^{a_0+a} \frac{\partial}{\partial s_e} \{ (f(q) - s_e - c_e q)^2 \} dq = \\ &= 2 \int_{a_0-a}^{a_0+a} (f(q) - s_e - c_e q)(-1) dq = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_e} = 2 \int_{a_0-a}^{a_0+a} (f(q) - s_e - c_e q)(-q) dq = 0.$$

Звідси впливає система двох алгебричних рівнянь з двох невідомих s_e та c_e :

$$\begin{cases} s_e \int_{a_0-a}^{a_0+a} dq + c_e \int_{a_0-a}^{a_0+a} q dq = \int_{a_0-a}^{a_0+a} f(q) dq; \\ s_e \int_{a_0-a}^{a_0+a} q dq + c_e \int_{a_0-a}^{a_0+a} q^2 dq = \int_{a_0-a}^{a_0+a} f(q) q dq. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему дістанемо:

$$\begin{cases} c_e = \frac{3}{2a^3}(B - a_0 A); \\ s_e = \frac{1}{2a} \left\{ \left[1 + 3 \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right] A - \frac{3a_0}{a^2} B \right\}, \end{cases}$$

де

$$A = \int_{a_0-a}^{a_0+a} f(q) dq; \quad B = \int_{a_0-a}^{a_0+a} f(q) q dq.$$

За умови, що шукані коливання центровані, отримуємо:

$$\begin{cases} c_e = \frac{3}{2a^3} B; \\ s_e = \frac{1}{2a} A, \end{cases} \quad \left(A = \int_{-a}^a f(q) dq \right); \quad \left(B = \int_{-a}^a f(q) q dq \right).$$

3.1.4. Гармонічна лінеаризація

Один із найпоширеніших (передусім у теорії автоматичного керування) способів лінеаризації – гармонічна лінеаризація, яка полягає у заміні змінної нелінійної сили $f(q, \dot{q})$ за гармонічного закону змінювання узагальненої координати ($q = a_0 + a \cos \omega t$; $\dot{q} = -a\omega \sin \omega t$) на лінійну силу

$$f_e(q) = s_e + c_e q + k_e \dot{q} \quad (3.6)$$

у такий спосіб, щоб амплітуди «нульової» і першої гармонік у розкладі нелінійної сили у ряд Фур'є збігалися з відповідними амплітудами лінеаризованої сили.

Розкладемо нелінійну силу в ряд Фур'є (це можливо тому, що згідно з умовою $f(q, \dot{q})$ є періодичною функцією часу):

$$f(q, \dot{q}) = f(a_0 + a \cos \omega t, -a\omega \sin \omega t) = f_0 + f_c \cos \omega t + f_s \sin \omega t + \dots, \quad (3.7)$$

де крапками позначено члени з гармоніками, вищими за першу. Три коефіцієнти розкладу визначаються формулами

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) d\vartheta; \\ f_c &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta; \\ f_s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \end{aligned} \quad (\vartheta = \omega t). \quad (3.8)$$

Лінеаризовану силу можна подати за тих самих умов у вигляді

$$\begin{aligned} f_e(q) = s_e + c_e q + k_e \dot{q} &= s_e + c_e (a_0 + a \cos \omega t) + k_e (-a\omega \sin \omega t) = \\ &= (s_e + c_e a_0) + c_e a \cos \omega t - k_e a \omega \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Прирівнюючи амплітуди нульової і першої гармонік у виразах (3.7) і (1.36) з урахуванням (3.9), дістанемо формули для обчислення коефіцієнтів лінеаризації:

$$\begin{aligned} c_e &= \frac{f_c}{a} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta; \\ k_e &= -\frac{f_s}{a\omega} = -\frac{1}{\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta; \\ s_e &= f_0 - c_e a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) d\vartheta - c_e a_0. \end{aligned}$$

Якщо коливання узагальненої координати центровані, формули дещо спрощуються:

$$c_e = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta;$$

$$k_e = -\frac{1}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta; -a \omega \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta;$$

$$s_e = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta; -a \omega \sin \vartheta) d\vartheta.$$

У якості прикладу проведемо лінеаризацію кількох типових найбільш поширених в інженерній практиці нелінійностей розглянутими способами. Задля простоти лінеаризацію виконаємо, припустивши, що очікувані коливання будуть центровані, тобто за спрощеними формулами.

Результати наведено у табл. 3.1, з яких можна зробити такі висновки:

1) різні способи лінеаризації приводять до різних значень коефіцієнтів лінеаризації;

2) коефіцієнти лінеаризації, отримані різними способами, тим не менше приблизно однаково залежать від амплітуди і середнього значення коливної величини; різниця полягає лише у значеннях коефіцієнтів у цій залежності; хоча всі вони є близькими за значеннями, різниця між ними може сягати 40 %.

Таблица 3.1. Коефіцієнти лінеаризації типових нелінійностей

$f(q)$	s_e			c_e		
	По кінцях	Пряма	Гармонічна	По кінцях	Пряма	Гармонічна
$\frac{q}{ q }$	0	0	0	$\frac{1}{a}$	$\frac{3}{2a}$	$\frac{4}{\pi a}$
$q \cdot q $	0	0	0	a	$\frac{3a}{4}$	$\frac{8a}{3\pi}$
q^2	a^2	$\frac{2a^2}{3}$	$\frac{a^2}{2}$	0	0	0
q^3	0	0	0	a^2	$\frac{3a^2}{5}$	$\frac{3a^2}{4}$
$\sin q$	0	0	0	$\frac{\sin a}{a}$	$3 \frac{(\sin a - a \cos a)}{a^3}$	—

Акцентуємо увагу на деяких головних особливостях методів лінеаризації.

1. Методи лінеаризації можна застосовувати лише для визначення стаціонарних періодичних режимів у нелінійних системах, бо тільки тоді коефіцієнти лінеаризації, які є функціями амплітуди й середнього значення коливної величини, будуть незмінними у часі. Інакше кажучи, за допомогою методів лінеаризації можна лише дослідити:

– рух автономних нелінійних систем (без надходження енергії) без дисипативних сил (тобто й без втрат енергії);

– усталені вимушені коливання нелінійних систем, які відбуваються під дією періодично змінюваної сили.

2. Усі методи лінеаризації (окрім класичної, яку застосовують для дослідження стійкості руху) не є коректними у математичному сенсі. Існування періодичного розв'язку лінеаризованої системи рівнянь зовсім не означає, що йому обов'язково відповідає аналогічний періодичний рух реальної нелінійної системи. Іноді буває так, що у початковій нелінійній системі такі періодичні рухи неможливі, незважаючи на те, що періодичний розв'язок відповідної лінеаризованої системи існує. Проблема існування періодичних усталених рухів нелінійної системи не може бути вирішена застосуванням методів лінеаризації. Припущення про існування періодичного руху має бути додатково обґрунтоване іншими методами і міркуваннями (зокрема, фізичними). Власне кажучи, саме математичною некоректністю пояснюється наявність значної кількості методів лінеаризації. Некоректність зумовлено тим, що немає однозначного критерію близькості прямої до відрізка кривої. Ця близькість не може бути близькістю у кожній точці, а інтегральна близькість на інтервалі – поняття неоднозначне.

3. Оскільки у лінійній стаціонарній системі, яка зазнає дії зовнішньої періодичної сили, можливе усталення лише коливань, які мають такий самий період (період змушувальної сили), то методи лінеаризації дають змогу досліджувати лише періодичні режими з частотою збурення і не дозволяють досліджувати нелінійні резонанси (тобто рухи нелінійної системи, які здійснюються з періодом у кілька разів більшим або меншим за період збурення).

4. Методи лінеаризації не дають можливості досліджувати ані стійкість періодичних режимів, ані процеси усталювання цих періодичних режимів. Зокрема, їх не можна застосовувати для дослідження вільних загасальних коливань нелінійних систем.

5. Оскільки в лінійній стаціонарній системі у разі дії на неї центрованих (середнє значення яких дорівнює нулю) збурювальних зовнішніх сил, усталюються лише центровані ж коливання, методи лінеаризації не дають можливості виявити і дослідити випрямні ефекти (виникнення сталих складових вихідних величин за дії центрованих збурень).

6. Методи лінеаризації не дають змоги дослідити часову форму власних коливань нелінійної системи, тобто їх спектральний склад.

3.2. Вимушені коливання нелінійної системи

Як приклад розглянемо рівняння руху нелінійної одномасової колівальної системи з одним ступенем вільності:

$$m\ddot{x} + F(\dot{x}, x) = -mA(\omega)\cos(\omega t + \varphi),$$

де m – маса; x – переміщення маси відносно основи; $A(\omega)$ – амплітуда віброприскорення основи; ω – частота вібрації основи; $F(\dot{x}, x)$ – нелінійна пружно-демпфірувальна сила, що діє на масу з боку основи. Після лінеаризації виходить лінеаризоване рівняння

$$m\ddot{x} + k_e(a)\dot{x} + c_e(a)x = -mA(\omega)\cos(\omega t + \varphi),$$

де $k_e(a)$ та $c_e(a)$ – коефіцієнти лінеаризації нелінійної сили.

Уведемо позначення:

$$\lambda_e(a) = \sqrt{\frac{c_e(a)}{m}}; \quad \zeta_e(a) = \frac{k_e(a)}{2\sqrt{mc_e(a)}}.$$

Перша величина є частотою власних коливань нелінійної системи, друга – відносним коефіцієнтом загасання цих коливань.

З урахуванням цього початкове лінеаризоване рівняння можна подати так:

$$\ddot{x} + 2\zeta_e(a)\lambda_e(a)\dot{x} + \lambda_e^2(a)x = -A(\omega)\cos(\omega t + \varphi). \quad (3.10)$$

Розглянемо три випадки залежності амплітуди $A(\omega)$ віброприскорення основи від частоти вібрації: а) $A(\omega)$ не залежить від частоти; б) змінюється пропорційно частоті $A(\omega) = A_1\omega$ (тоді в усьому діапазоні частот вібрації незмінною залишається амплітуда A_1 віброшвидкості); 3) змінюється пропорційно квадрату частоти $A(\omega) = A_2\omega^2$ (зі змінюванням частоти зберігається незмінною амплітуда A_2 вібропереміщення основи).

Усталений рух будемо шукати у формі

$$x = a \cos(\omega t). \quad (3.11)$$

При цьому вважається, що невідомий зсув фаз між збуренням і коливаннями маси дорівнює φ . Підставляючи вираз (3.11) у рівняння (3.10), отримаємо такі два алгебричні рівняння для знаходження двох невідомих – амплітуди переміщення a і зсуву фаз φ :

$$\begin{cases} a[\lambda_e^2(a) - \omega^2] = -A(\omega)\cos\varphi; \\ 2\zeta_e(a)\lambda_e(a)\omega = A(\omega)\sin\varphi. \end{cases}$$

Вилучивши фазу φ , дістанемо рівняння, що пов'язує між собою шукану амплітуду коливань з частотою вібрації основи:

$$[\lambda_e^2(a) - \omega^2]^2 + 4\zeta_e^2(a)\lambda_e^2(a)\omega^2 = \left(\frac{A(\omega)}{a}\right)^2.$$

Оскільки λ_e та ζ_e є складними функціями невідомої амплітуди, то у загальному випадку отримане рівняння виявляється нерозв'язним відносно амплітуди. Однак, якщо задачу обернути, тобто розв'язувати рівняння відносно частоти, то воно стає однозначно розв'язним за довільних залежностей $\lambda_e(a)$ та $\zeta_e(a)$. Для трьох зазначених вище випадків змінювання амплітуди вібрації основи з її частотою залежність частоти вимушених коливань від їх амплітуди визначиться такими формулами:

– за незалежної від частоти збурення амплітуди A віброприскорення основи

$$\omega = \lambda_e(a) \sqrt{1 - 2\zeta_e^2(a) \pm \sqrt{\left(\frac{A}{a\lambda_e^2(a)}\right)^2 - 4\zeta_e^2(a)[1 - \zeta_e^2(a)]}}; \quad (3.12)$$

– за незалежної від частоти збурення амплітуди A_1 віброшвидкості основи

$$\omega = \lambda_e \sqrt{1 - 2\zeta_e^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{a\lambda_e} \right)^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\left(\frac{A_1}{a\lambda_e} \right)^2 - 4\zeta_e^2 \right] \left[\left(\frac{A_1}{a\lambda_e} \right)^2 + 4(1 - \zeta_e^2) \right]}};$$

– за незалежної від частоти збурення амплітуді A_2 вібропереміщення основи

$$\omega = \frac{\lambda_e(a)}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{a} \right)^2}} \sqrt{1 - 2\zeta_e^2(a) \pm \sqrt{\left(\frac{A_2}{a} \right)^2 \left[2 - \left(\frac{A_2}{a} \right)^2 \right] - 4\zeta_e^2(a)[1 - \zeta_e^2(a)]}}.$$

Ці співвідношення дають змогу побудувати графіки амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) нелінійної (точніше – лінеаризованої) системи, тобто залежності амплітуди вимушених коливань нелінійної одномасової коливальної системи від частоти змінювання змушувальної сили за заданого значення амплітуди коливань основи (A або A_1 , або A_2). Але спосіб побудови таких графіків дещо незвичний. Потрібно задатися значенням шуканої амплітуди a та обчислити відповідні значення частоти ω . Очевидно, кожному значенню амплітуди a може відповідати або два значення ω_1 та ω_2 (якщо значення внутрішнього підрадикального виразу виявиться додатним, а обидва значення зовнішнього підрадикального виразу – теж додатними), або одне значення ω (якщо значення внутрішнього підрадикального виразу виявиться додатним, одне значення зовнішнього підрадикального виразу – додатним, а друге – від’ємним), або жодного (якщо значення внутрішнього підрадикального виразу виявиться від’ємним). Ці випадки відповідають горизонтальним прямим 1–1, 2–2 і 3–3 на рис. 3.4.

Максимуму (або мінімуму) АЧХ відповідає обернення у нуль внутрішнього підрадикального виразу. Наприклад, у разі незмінності амплітуди віброприскорення екстремальні амплітуди a^* визначають розв’язуючи нелінійне алгебричне рівняння (3.12):

$$\left(\frac{A}{a^* \lambda_e^2(a^*)} \right)^2 = 4\zeta_e^2(a^*)[1 - \zeta_e^2(a^*)]$$

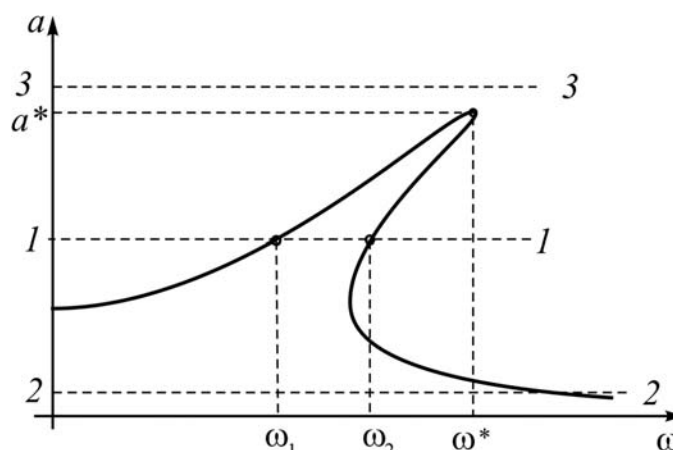


Рис. 3.4 Амплітудно-частотна характеристика нелінійної системи

Графік залежності частоти власних коливань $\lambda_e(a)$ від їх амплітуди a називають скелетною кривою, оскільки ця крива являє собою ніби скелет кривої АЧХ нелінійної системи, навколо якого групуються точки АЧХ.

Розглянемо більш детально випадок, коли нелінійною є тільки пружина, що з'єднує масу з основою. При цьому нехай нелінійна залежність пружної сили від її деформації x буде такою:

$$F(x) = c(x + \gamma x^3).$$

Обмежимося випадком незмінної амплітуди віброприскорення, тоді рівняння (1.86) можна подати у вигляді

$$x'' + 2\zeta x' + (1 + sa^2)x = a_0 \cos(\nu\tau + \varphi). \quad (3.13)$$

Тут використано припущення, що тертя між масою та основою є в'язким, амплітуду віброприскорення подано у вигляді $A = a_0 \omega_0^2$, а також введено такі позначення: частоту малих власних коливань $\omega_0 = \sqrt{c/m} = \lambda_e(0)$; безрозмірний час $\tau = \omega_0 t$; відносний коефіцієнт загасання $\zeta = k / (2\sqrt{mc})$; відносну частоту вібрації основи $\nu = \omega / \omega_0$; x' та x'' – перша і друга похідні від x за безрозмірним часом; k – коефіцієнт в'язкого тертя.

Значення постійного коефіцієнта s при квадраті амплітуди у виразі лінеаризованої пружної сили пов'язане з коефіцієнтом Γ залежністю

$$s = \alpha\gamma,$$

де α – постійний коефіцієнт, значення якого залежить від застосованого методу лінеаризації. Відповідно до даних табл. 3.1, $\alpha = 1$ для лінеаризації по кінцях, $\alpha = 0,6$ – для прямої лінеаризації та $\alpha = 0,75$ – у випадку гармонічної лінеаризації.

Зроблені припущення і позначення дозволяють вираз (3.12) подати у вигляді

$$\nu = \sqrt{1 + sa^2 - 2\zeta^2 \pm \sqrt{\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 - 4\zeta^2(1 + sa^2 - \zeta^2)}}. \quad (3.14)$$

Родину з трьох АЧХ, які відповідають значенням амплітуди збурення $a_0 = 0,2; 1; 1,8$, подано на рис. 3.5. При цьому відносний коефіцієнт загасання $\zeta = 0,12$, а коефіцієнт нелінійності $s = 0,75$. Аналогічні АЧХ, але для від'ємного значення $s = -0,01$ коефіцієнта нелінійності, показано на рис. 3.6.

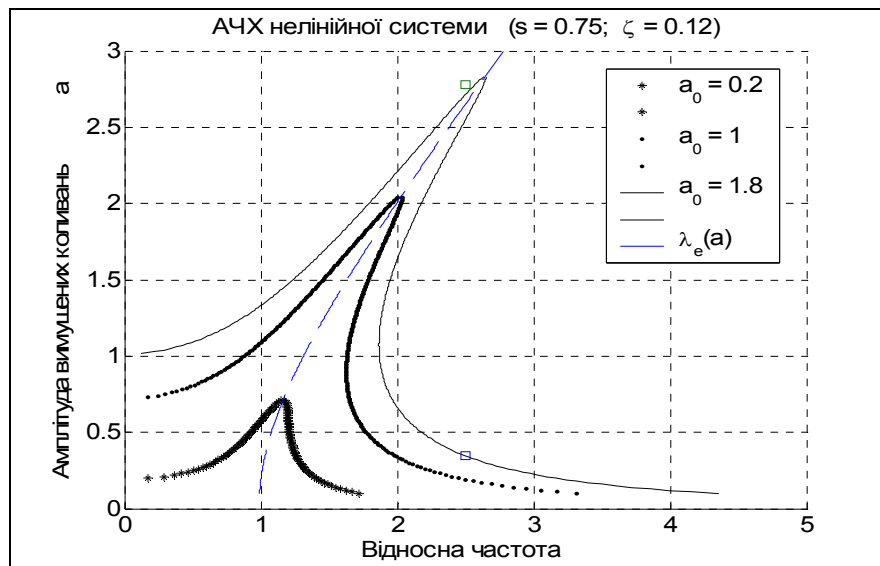


Рис. 3.5. Амплітудно-частотна характеристика нелінійної системи з жорсткою характеристикою

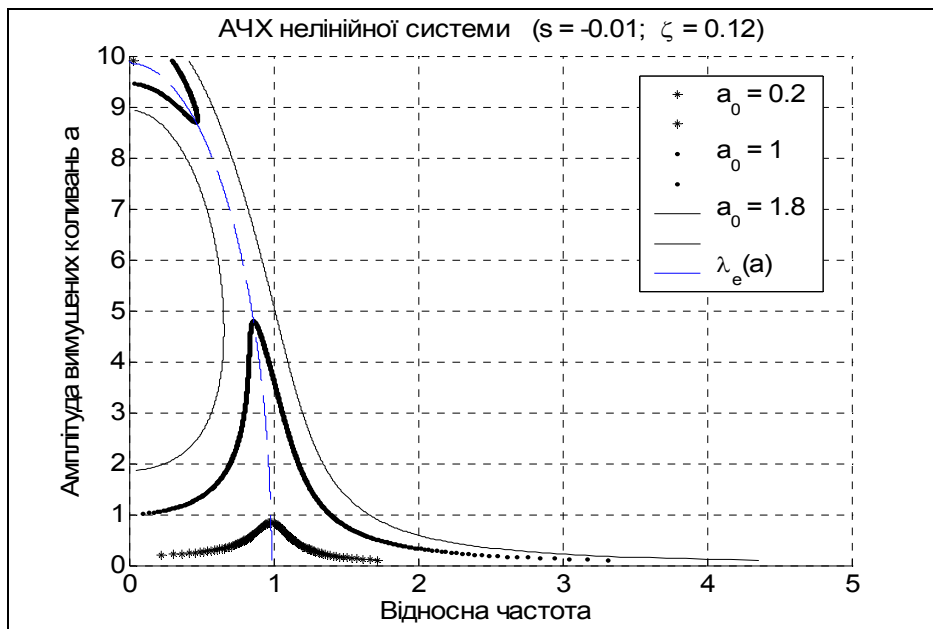


Рис. 3.6. Амплітудно-частотна характеристика нелінійної системи з м'якою характеристикою

Як видно з цих рисунків, АЧХ нелінійних систем мають значні відмінності від АЧХ лінійних систем.

По-перше, на відміну від АЧХ лінійних систем, АЧХ нелінійної системи може «нахилитися» вправо (у бік великих частот) чи вліво (у бік малих частот), прямуючи вздовж скелетної кривої. Якщо зі збільшенням відхилення від положення рівноваги коефіцієнт жорсткості пружної нелінійної сили теж збільшується (тоді скелетна крива на АЧХ відхиляється вправо), то нелінійна система має «жорстку» пружну характеристику (рис 3.5). Якщо зі збільшенням відхилення жорсткість системи зменшується, то говорять про нелінійну систему з «м'якою» пружною характеристикою (рис. 3.6. Нагадаймо, що в лінійній стаціонарній системі скелетна крива має вигляд вертикальної прямої (жорсткість системи залишається незмінною за будь-яких амплітуд коливань).

По-друге, завдяки саме першій особливості нелінійні системи набувають властивості, яка не є притаманною лінійним стаціонарним системам, – за деяких частот збурення можливе встановлення кількох усталених вимушених коливань з різними амплітудами. Наприклад, відповідно до рис. 1.10, за частоти вібрації основи $\nu = 2,5$ та амплітуди збурення $a_0 = 1,8$ можливе усталення коливань: 1) з амплітудою $a = 0,3$; 2) з амплітудою $a = 2,6$; 3) з амплітудою $a = 2,75$. З цих трьох усталених режимів стійкими є, як можна довести, лише перший і третій. Другий режим (з амплітудою $a = 2,6$) нестійкий і на практиці його спостерігати неможливо.

Щоб підтвердити можливість існування кількох усталених режимів на тій самій частоті збурення, складемо програму чисельного інтегрування рівняння

$$x'' + 2\zeta x' + x + \gamma x^3 = a_0 \cos(\nu\tau + \phi). \quad (3.15)$$

Текст програми такий:

```
% NelSys_upr
clc, clear all
global a0 nu dz gamma
a0=1.8; Sa0=sprintf('(a_0 = %g;',a0);
nu=2.5; Snu=sprintf(' \nu = %g;',nu);
dz=0.12; Sdz=sprintf(' \zeta = %g;',dz);
gamma=1; Sga=sprintf(' \gamma = %g',gamma);
y0(1)=2.5; y0(2)=6.25; Sx=sprintf('(x(0) = %g;',y0(1));
Sxt=sprintf(' x»(0) = %g',y0(2)); TSPAN=[0 50];
[t,y]=ode45('NelSys',TSPAN,y0);
plot(t,y(:,1),'-'), grid
set(gca,'fontname','MS Sans Serif','fontsize',16)
title('Інтегрування рівняння x» + 2\zetax» + x + \gammax^3 = a_0cos(\nut)')
xlabel([Sx,Sxt,' t'])
ylabel([Sa0,Snu,Sdz,Sga,' x(t)']),'fontname','arial')
=====
function z=NelSys(t,y)
global nu a0 dz gamma
z(1)=y(2);
z(2)=a0*cos(nu*t)-2*dz*y(2)-y(1)-gamma*y(1)^3;
z=z';
```

Чисельне інтегрування у цій програмі здійснюється вбудованою процедурою `ode45` системи Matlab, яка, у свою чергу, спирається на виклик процедури `NelSys`. Остання обчислює значення правих частин диференціального рівняння (3.15), зведеного до форми Коші.

Результати чисельного інтегрування показано на рис. 3.7 та 3.8. Параметри системи взято такими: $\zeta = 0,12$; $\gamma = 1$; параметри збурення: $a_0 = 1,8$; $\nu = 2,5$.

Як бачимо, за нульових початкових умов у системі встановлюються коливання з амплітудою приблизно 0,35, але за інших початкових умов (рис. 3.8) амплітуда усталених коливань дорівнює 2,78. Результати, отримані інтегруванням нелінійного рівняння, подано й на рис. 3.5 у вигляді двох квадратних мар-

керів. Як неважко впевнитися, ці маркери майже точно лежать на відповідній гілці АЧХ.

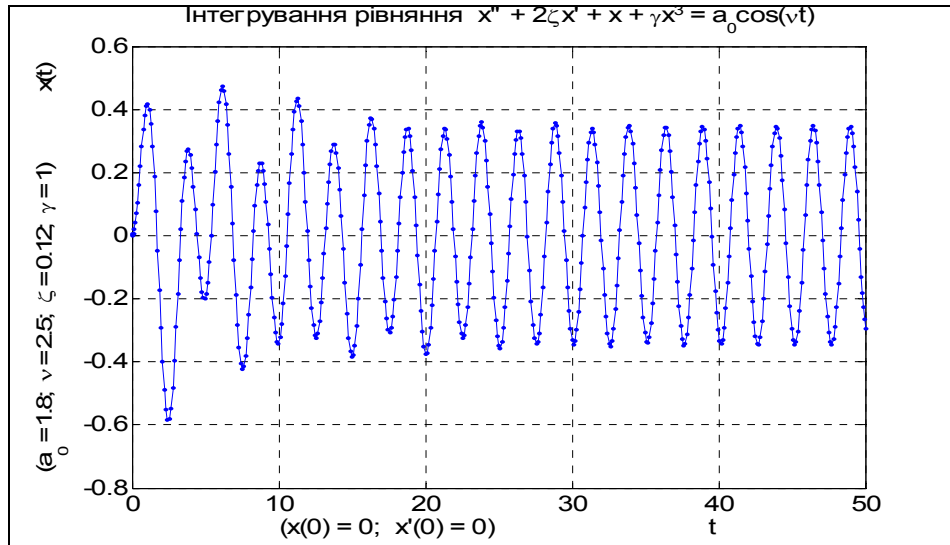


Рис. 3.7. Процес усталення вимушених коливань нелінійної системи (початкові умови $x(0) = 0$; $x'(0) = 0$)

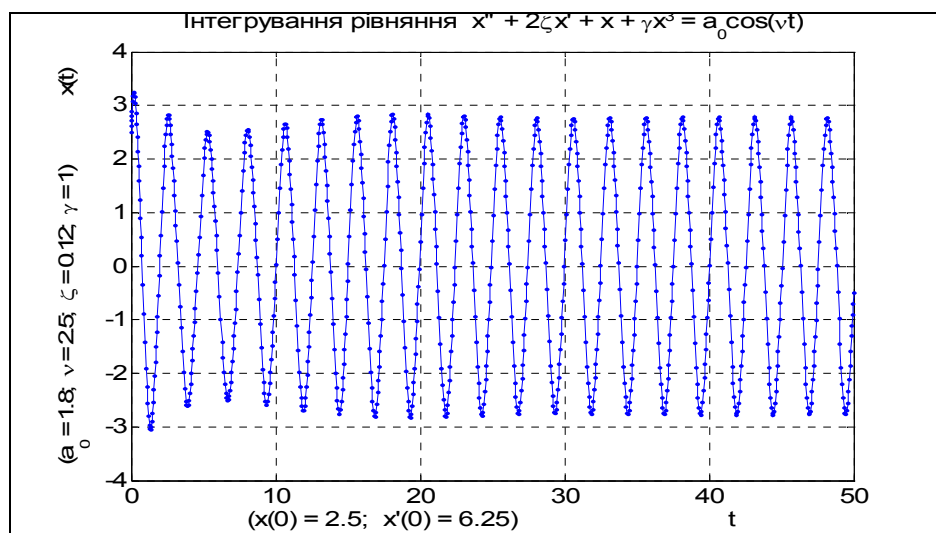


Рис. 3.8. Процес усталення вимушених коливань нелінійної системи (початкові умови $x(0) = 2,5$; $x'(0) = 6,25$)

Ще один висновок, який можна зробити з порівняння результатів аналізу за допомогою лінеаризованого рівняння (3.10) із результатами чисельного інтегрування «точного» нелінійного рівняння (3.15): у розглядуваному випадку найліпша узгодженість досягається гармонічною лінеаризацією

$$\left(s = \alpha\gamma = \frac{3}{4}\gamma \right)$$

Значенню $\gamma = 1$ відповідає значення $s = 0,75$, які й використані у наведених експериментах.

Контрольні запитання

1. У чому полягає головна ідея методів лінеаризації?
2. В чому розрізняються методи лінеаризації?
3. У чому полягають переваги і недоліки методів лінеаризації? Які нелінійні властивості вони спроможні виявити, а які ні? Чому?
4. Які існують обмеження у застосуванні методів лінеаризації?
5. Що розуміють під амплітудно-частотною характеристикою нелінійної системи? Чим вона відрізняється від АЧХ лінійної стаціонарної системи?

Лекція 4. Теорія збурень

Сутність методу збурень полягає у тому, що розв'язок нелінійної (точніше – квазілінійної) системи рівнянь (тобто системи диференціальних рівнянь з малим параметром μ як множником у всіх нелінійних членах рівнянь) відшукується у вигляді розкладу в ряд за степенями цього малого параметра.

4.1. Метод Пуассона

Викладемо цей метод на прикладі задачі про власні нелінійні коливання маятника. Нехай потрібно знайти розв'язок квазілінійного рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (4.1)$$

де ω_0 — частота власних коливань маятника за $\mu = 0$; $f(x, \dot{x})$ — нелінійна функція узагальненої координати x та узагальненої швидкості \dot{x} .

Розв'язок, що задовольняє рівняння з точністю до значень мализни μ^{n+1} , шукають у вигляді n -ї часткової суми ряду

$$x(t) = x_{(0)}(t) + \mu x_{(1)}(t) + \mu^2 x_{(2)}(t) + \dots + \mu^n x_{(n)}(t) + \dots, \quad (4.2)$$

де $x_{(i)}(t)$, ($i = 0, 1, 2, \dots$) — шукані функції часу, що є розв'язками рівняння i -го наближення.

Підставляючи вираз (4.2) у праву і ліву частини рівняння (4.1), розкладають результат підставлення за степенями μ , причому вилучають члени, що містять μ у степені, вищому за n . Після цього прирівнюють коефіцієнти за однакових степенів параметра μ у правій і лівій частинах рівняння. У результаті отримують рівняння відповідного (до степеня малого параметра) наближення. Далі послідовно розв'язують ці рівняння, починаючи з нульового наближення, потім першого, другого і так далі. Унаслідок послідовного використання розв'язків рівнянь попередніх наближень у рівняннях наступних наближень дістають послідовність рівнянь, кожне з яких є лінійним рівнянням з постійними коефіцієнтами і з відомими як функції часу зовнішніми силами. Ці рівняння розв'язують послідовно методами інтегрування лінійних стаціонарних систем.

Розкладемо нелінійну функцію $f(x, \dot{x})$ у ряд за степенями μ в околі нульових наближень $x_{(0)}$, $\dot{x}_{(0)}$:

$$f(x, \dot{x}) = f(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) + \mu \left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} + \frac{\mu^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right|_{\mu=0} + \dots + \frac{\mu^n}{n!} \left. \frac{\partial^n f}{\partial \mu^n} \right|_{\mu=0} + \dots \quad (4.3)$$

Неважко впевнитися у тому, що

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} \right) \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial \mu^2} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial \mu^2}, \end{aligned}$$

причому

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = x_{(1)} + 2\mu x_{(2)} + \dots + n\mu^{n-1} x_{(n)}; \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} = \dot{x}_{(1)} + 2\mu \dot{x}_{(2)} + \dots + n\mu^{n-1} \dot{x}_{(n)};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} = 2x_{(2)} + 6\mu x_{(3)} \dots + n(n-1)\mu^{n-2} x_{(n)};$$

$$\frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial \mu^2} = 2\dot{x}_{(2)} + 6\mu \dot{x}_{(3)} \dots + n(n-1)\mu^{n-2} \dot{x}_{(n)}.$$

(4.4)

Якщо $\mu = 0$, отримуємо:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, \dot{x}_0} x_{(1)} + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{x_0, \dot{x}_0} \dot{x}_{(1)} = f'_x(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(1)} + f'_{\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) \dot{x}_{(1)};$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right|_{\mu=0} &= f''_{x,x}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(1)}^2 + 2f''_{x,\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(1)} \dot{x}_{(1)} + f''_{\dot{x},\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) \dot{x}_{(1)}^2 + \\ &+ 2f'_x(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(2)} + 2f'_{\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) \dot{x}_{(2)}. \end{aligned}$$

Використовуючи ці вирази у (4.3), а потім у рівнянні (4.1) і групуємо члени з однаковими степенями малого параметра, дістаємо систему рівнянь:

$$\ddot{x}_{(0)} + \omega_0^2 x_{(0)} = 0;$$

$$\ddot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} = f(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)});$$

$$\ddot{x}_{(2)} + \omega_0^2 x_{(2)} = f'_x(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(1)} + f'_{\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) \dot{x}_{(1)};$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{(3)} + \omega_0^2 x_{(3)} &= f''_{x,x}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(1)}^2 + 2f''_{x,\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(1)} \dot{x}_{(1)} + \\ &+ f''_{\dot{x},\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) \dot{x}_{(1)}^2 + 2f'_x(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(2)} + 2f'_{\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) \dot{x}_{(2)}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи послідовно рівняння (4.5), можна знайти розв'язок (4.2) першої нелінійної системи (4.1) з довільною (потрібною) точністю.

Покажемо, що застосування цього методу до автономної консервативної коливальної системи (без демпфірування) може привести до появи у розв'язку «секулярних» (або «вікових») членів, тобто членів вигляду $t^m \sin kt$; $t^m \cos kt$, до яких час t входить як множник при гармонічних членах.

Справді, нехай

$$f(x, \dot{x}) = -\gamma x^3,$$

тобто рівняння (4.1) набуває вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = 0. \quad (4.6)$$

Знайдемо наближений розв'язок з точністю до величин другого порядку мализни, вважаючи малим параметром величину γ , тобто покладемо

$$x(t) = x_{(0)}(t) + \mu x_{(1)}(t) = x_{(0)}(t) + \gamma x_{(1)}(t).$$

Тоді рівняння нульового і першого наближень набудуть вигляду:

$$\ddot{x}_{(0)} + \omega_0^2 x_{(0)} = 0, \quad \ddot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} = -x_{(0)}^3.$$

З першого рівняння знаходимо розв'язок породжувального рівняння

$$x_{(0)} = a \cos(\omega_0 t + \vartheta), \quad (4.7)$$

де величини амплітуди a і фази ϑ визначаються початковими умовами. Підставимо цей розв'язок у праву частину рівняння першого наближення:

$$\ddot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} = -\frac{a^3}{4} [3 \cos(\omega_0 t + \vartheta) + \cos 3(\omega_0 t + \vartheta)] - \frac{3a^3}{4} \cos(\omega_0 t + \vartheta) \quad (4.8)$$

Оскільки змушувальна сила змінюється з частотою ω_0 власних коливань і діє вона на недемпфіровану систему, то в останній відповідно до (4.8) спостерігається резонанс, який полягає у необмеженому зростанні амплітуди коливань. Тому розв'язок рівняння (4.8) слід шукати у формі

$$x_{(1)} = At \sin(\omega_0 t + \vartheta) + B \cos 3(\omega_0 t + \vartheta) \quad (4.9)$$

Підставлення виразу (4.9) у рівняння (4.8) дає змогу знайти невідомі величини. У результаті розв'язок рівняння (4.8) набуває такого вигляду:

$$x_{(1)} = -\frac{3a^3}{8\omega_0} t \sin(\omega_0 t + \vartheta) + \frac{a^3}{32\omega_0^2} \cos 3(\omega_0 t + \vartheta).$$

Загальний розв'язок рівняння (4.6) можна тепер подати так:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \vartheta) - \frac{3\gamma a^3}{8\omega_0} t \sin(\omega_0 t + \vartheta) + \frac{\gamma a^3}{32\omega_0^2} \cos 3(\omega_0 t + \vartheta) \quad (4.10)$$

У знайденому наближеному розв'язку є секулярний член, і тому коливання, репрезентовані формулою (4.10), мають зростати з плином часу за амплітудою (маятник – розгойдуватися) необмежено, що явно суперечить реально спостережуваному руху системи, описуваному рівнянням (4.6), який є коливаннями зі сталою скінченною амплітудою.

Дійсно, якщо рівняння (4.6) помножити на dx і проінтегрувати, то можна знайти перший інтеграл:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4} \gamma x^4 = E,$$

який ілюструє закон збереження енергії. Звідси випливає, що амплітуда змінювання величини x не може перевищувати значення початкової амплітуди (за $\dot{x} = 0$) і залишається незмінною протягом усього руху.

Виявлена суперечність свідчить про органічний недолік обраного методу розв'язання рівняння. Він полягає у використанні неявного (і хибного у загальному випадку) припущення, що періодичний розв'язок нелінійного рівняння має той самий період, що й розв'язок породжувальної системи.

Припустимо тепер, що це не так, і частота розв'язку рівняння (4.6) насправді відрізняється на малу величину μ . Тоді, розкладаючи $\sin(\omega_0 + \mu)t$ у ряд, матимемо:

$$\sin(\omega_0 + \mu)t = \sin \omega_0 t + \mu t \cos \omega_0 t - \frac{\mu^2 t^2}{2} \cos \omega_0 t - \dots,$$

який містить секулярні члени. Розглядаючи праву частину цього виразу, важко встановити її періодичність ($T = 2\pi/(\omega_0 + \mu)$) у зв'язку з наявністю секулярних членів. Такий самий характер має згадана трудність появи вікових членів у теорії збурень.

Більш досконалі методи дають можливість побудувати розклад розв'язку у такий спосіб, щоб уникнути появи в останньому секулярних членів.

4.2. Метод О. М. Крилова

Одним з найпростіших методів, що дозволяє виключити з розв'язку секулярні члени, є метод О. М. Крилова. Він полягає у побудові розв'язку на основі сумісного та одночасного розкладу у ряд за степенями малого параметра як розв'язку, так і квадрата частоти шуканого розв'язку. Метод можна застосовувати для коливальних систем з одним ступенем вільності.

Розглянемо цей метод на прикладі вільних коливань нелінійного маятника. Шукатимемо розв'язок у вигляді (4.2). Окрім того, шукатимемо невідому частоту k цього періодичного розв'язку також у вигляді ряду:

$$k^2 = \omega_0^2 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \dots, \quad (4.11)$$

де h_1, h_2, \dots – невідомі коефіцієнти, значення яких потрібно визначити.

Із виразу (4.11) випливає

$$\omega_0^2 = k^2 - \mu h_1 - \mu^2 h_2 + \dots \quad (4.12)$$

Підставимо вираз (4.2) і (4.12) у первинне рівняння (4.6):

$$\ddot{x}_{(0)} + \mu \ddot{x}_{(1)} + (k^2 - \mu h_1)(x_{(0)} + \mu x_{(1)}) + \mu(x_{(0)} + \mu x_{(1)})^3 = 0.$$

Із цього випливають такі рівняння нульового й першого наближення:

$$\ddot{x}_{(0)} + k^2 x_{(0)} = 0; \quad \ddot{x}_{(1)} + k^2 x_{(1)} = h_1 x_{(0)} - x_{(0)}^3.$$

Тепер породжувальне рівняння (нульового наближення) має розв'язок (порівняймо з (4.7))

$$x_{(0)} = a \cos(kt + \vartheta), \quad (4.13)$$

де невідомі сталі інтегрування a та ϑ визначаються початковими умовами для породжувального рівняння.

Використаємо розв'язок (4.13) у рівнянні першого наближення

$$\ddot{x}_{(1)} + k^2 x_{(1)} = \left(h_1 a - \frac{3}{4} a^3 \right) \cos(kt + \vartheta) - \frac{a^3}{4} \cos 3(kt + \vartheta).$$

Наявність додаткової невідомої сталої h_1 дає змогу підібрати таке її значення, щоб коефіцієнт при $\cos(kt + \vartheta)$ у правій частині цього рівняння дорівнював нулю:

$$h_1 = \frac{3}{4} a^2, \quad (4.14)$$

і у такий спосіб уникнути появи секулярного члена у розв'язку рівняння першого наближення. За умови виконання (4.14) цей розв'язок матиме вигляд

$$x_{(1)} = A \cos(kt + \vartheta) + B \sin(kt + \vartheta) + \frac{a^3}{32k^2} \cos 3(kt + \vartheta),$$

де A та B – сталі інтегрування, що визначаються початковими умовами для рівняння першого наближення.

Визначаючи сталі інтегрування, зазвичай користуються таким правилом. Початкові умови для первинної системи рівнянь використовують для знаходження сталих інтегрування тільки у розв'язку породжувального рівняння. Сталі інтегрування у рівняннях наступних наближень визначають з умови нульових початкових умов:

$$\begin{cases} x_{(0)}(0) = x_0; & \begin{cases} x_{(i)}(0) = 0; \\ \dot{x}_{(i)}(0) = 0, \end{cases} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Виходячи з цього, сталі інтегрування A та B рівняння першого наближення дорівнюватимуть:

$$A = -\frac{a^3}{32k^2}; \quad B = 0.$$

Отже, остаточно розв'язок рівняння (4.8) з точністю до членів другого порядку виглядає так:

$$x(t) = a \left(1 - \frac{\gamma a^3}{32k^2} \right) \cos(kt + \vartheta) + \frac{\gamma a^3}{32k^2} \cos 3(kt + \vartheta), \quad (4.15)$$

причому частота усталених коливань визначається з (4.11) з урахуванням (4.13):

$$k = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3}{4} \gamma a^2}. \quad (4.16)$$

Аналогічно знаходять розв'язки рівнянь другого й подальших наближень.

Отже, коливання нелінійної системи з нелінійною пружною силою здійснюється з частотою, відмінною від частоти ω_0 власних коливань породжувальної системи, причому період коливань залежить від їх амплітуди. Такий висновок було зроблено раніше завдяки застосуванню методів лінеаризації. Знайдена за допомогою методу О. М. Крилова залежність власної частоти від амплітуди власних коливань повністю збігається з отриманою методом гармонічної лінеаризації.

ризації (див. табл. 1.1). Інакше кажучи, подання частоти власних коливань у вигляді розкладу за степенями малого параметра дає змогу не тільки усунути з розв'язків секулярні члени, які не відповідають природі явища, а й виявити одну з найважливіших реальних властивостей нелінійних систем – неізохронність власних (вільних) коливань.

Методи малого параметра, на відміну від методів лінеаризації, дають змогу досліджувати реальну часову форму власних коливань нелінійних систем, які складаються зазвичай з низки гармонік. У розглянутому випадку у спектрі власних коливань маятника, окрім основної (першої гармоніки) спостерігається наявність третьої гармоніки (див. розв'язок (4.15)), завдяки чому хвиля коливання набуває сплющеної форми хвилі в околі екстремумів.

Отже, є можливість досліджувати методами малого параметра періодичні коливання, які відбуваються не тільки з періодом збурення (вимушених коливань), а й з частотами, кратними частоті збурення (параметричні коливання, нелінійні субгармонічні й ультрагармонічні – резонанси тощо).

4.3. Метод Остроградського–Ляпунова

Сутність цього методу полягає у перетворенні рівнянь автономної системи до «власного часу», у якому одиницею є шуканий період власних коливань системи. Останній у разі такого подання виявляється нібито заздалегідь відомим, що дає змогу оперувати з автономними системами так само, як з неавтономними. Перехід до власного часу τ здійснюють за формулою

$$\tau = \frac{2\pi}{T_0(1+\alpha)}t, \quad (4.17)$$

де T_0 – період розв'язку породжувального рівняння; α – залежний від малого параметра μ поправковий коефіцієнт,

$$\alpha = \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \dots \quad (4.18)$$

Використаємо цей метод для визначення розв'язку рівняння (4.6).

Очевидно, що

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{1+\alpha} \cdot \frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega_0}{1+\alpha} x'; \quad \ddot{x} = \frac{\omega_0^2}{(1+\alpha)^2} x'',$$

тому рівняння (4.6) набуває вигляду

$$x'' + (1+\alpha)^2 x \left(1 + \frac{\gamma}{\omega_0^2} x^2 \right) = 0.$$

Якщо використати тут розклади розв'язку (4.2) і (4.18), дістанемо рівняння

$$\ddot{x}_{(0)} + x_{(0)} = 0; \quad \ddot{x}_{(1)} + x_{(1)} = -2h_1 x_{(0)} - \frac{1}{\omega_0^2} x_{(0)}^3.$$

Розв'язок першого (породжувального) рівняння має вигляд

$$x_{(0)} = a \cos(\tau + \vartheta).$$

Використаємо його у правій частині другого рівняння (першого наближення). Для того, щоб секулярний член у розв'язку цього рівняння дорівнював нулю, потрібно виконати умову

$$h_1 = -\frac{3a^2}{8\omega_0^2},$$

тому розв'язок другого рівняння можна подати так:

$$x_{(1)} = A \cos(\tau + \vartheta) + B \sin(\tau + \vartheta) + \frac{a^3}{32\omega_0^2} \cos 3(\tau + \vartheta).$$

Остаточно розв'язок рівняння (1.48) можна подати у формі

$$x(\tau) = a \left(1 - \frac{\gamma a^3}{32\omega_0^2} \right) \cos(\tau + \vartheta) + \frac{\gamma a^3}{32\omega_0^2} \cos 3(\tau + \vartheta),$$

що повністю збігається з раніше отриманим розв'язком (4.15).

Щодо частоти k цих коливань, то її можна визначити із (4.18):

$$k = \frac{\omega_0}{1 + \alpha} \approx \frac{\omega_0}{1 + \gamma h_1} = \frac{\omega_0}{1 - \frac{3\gamma a^2}{8\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{3\gamma a^2}{8\omega_0^2} \right) \approx \omega_0 \sqrt{1 + \frac{3\gamma a^2}{4\omega_0^2}}$$

Як бачимо, результат збігається з виразом (4.16).

Контрольні запитання

1. У чому полягає головна ідея методів малого параметра?
2. У чому полягають переваги і недоліки методів малого параметру? Які нелінійні властивості вони спроможні виявити, а які ні? Чому?
3. Які існують обмеження у застосуванні методів малого параметра?
4. Що таке секулярні члени розв'язку рівнянь нелінійної системи? Коли вони виникають?
5. Чим зумовлено виникнення секулярних членів? Чи відповідає воно фізичному змісту? Чому?
6. Які є засоби уникнення виникнення секулярних членів у розв'язку?

Лекція 5. Дослідження випрямного ефекту. Дрейф Магнуса

Ще однією позитивною особливістю метода збурень є можливість за його допомогою досліджувати випрямні ефекти. Під *випрямним ефектом* зазвичай розуміють *явище виникнення сталих складових коливань вихідних величин системи у разі зовнішніх дій, що є центрованими функціями часу*. Таке явище неможливе у лінійних стаціонарних системах. Його можна спостерігати лише у нелінійних або нестаціонарних системах. Методи лінеаризації не дозволяють досліджувати випрямні ефекти через саму їх сутність: вони замінюють дослідження нелінійної системи на дослідження деякої лінійної стаціонарної системи, у якій випрямний ефект неможливий, бо дія центрального збурення викликає у лінійній стаціонарній системі саме центрований відгук.

Проілюструємо застосування методу збурень для вивчення випрямного ефекту на прикладі виявлення систематичного дрейфу гіроскопа у кардановому підвісі (ГКП) навколо його зовнішньої осі підвісу за вільних (нутаційних) його коливань. Цей дрейф у гіроскопічній літературі називають «дрейфом Магнуса».

Рух вільного ГКП описується наступними рівняннями:

$$\begin{cases} (J_1 + J_2 \cos^2 \beta) \ddot{\alpha} - 2J_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + H_0 \dot{\beta} \cos \beta = 0; \\ J_3 \ddot{\beta} + J_2 \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H_0 \dot{\alpha} \cos \beta = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Відповідно до методу збурень шукатимемо розв'язок рівнянь (5.1) у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_{(0)}(t) + \mu \alpha_{(1)}(t) + \mu^2 \alpha_{(2)}(t) + \dots; \\ \beta(t) &= \beta_{(0)}(t) + \mu \beta_{(1)}(t) + \mu^2 \beta_{(2)}(t) + \dots \end{aligned}$$

З фізичних міркувань випливає, що коли на гіроскоп не діють моменти сил, головна його вісь зберігає свій напрямок в інерціальному просторі. Тобто у грубому (нульовому) наближенні можна припустити, що гіроскоп (його головна вісь) є нерухомим, а його кути повороту α та β незмінні у часі:

$$\alpha_{(0)}(t) \equiv \alpha^* = \text{const}; \quad \beta_{(0)}(t) \equiv \beta^* = \text{const}.$$

Тому швидкості $\dot{\alpha}$ та $\dot{\beta}$ можна подати у вигляді

$$\dot{\alpha}(t) = \mu \dot{\alpha}_{(1)}(t) + \mu^2 \dot{\alpha}_{(2)}(t) + \dots; \quad \dot{\beta}(t) = \mu \dot{\beta}_{(1)}(t) + \mu^2 \dot{\beta}_{(2)}(t) + \dots$$

Підставляючи ці ряди у рівняння (5.1) та обмежуючись утриманням членів не вище за другий порядок мализни відносно малого параметра μ , матимемо:

$$J_1 + J_2 \cos^2 \beta \approx J_1 + J_2 \cos^2 \beta^* - \mu(2J_2 \sin \beta^* \cos \beta^*) \beta_{(1)} + \mu^2 \dots;$$

$$\sin \beta \cos \beta = \sin \beta^* \cos \beta^* + \mu \dots; \quad \cos \beta = \cos \beta^* - \mu \sin \beta^* \beta_{(1)} + \mu^2 \dots$$

Підставимо ці ряди у рівняння (5.1) і згрупуємо члени з множником μ у першому степені. Отримаємо рівняння першого наближення – лінеаризовані рівняння руху ГКП:

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha}_{(1)} + H_0 \cos\beta^* \dot{\beta}_{(1)} = 0; \\ J_3\ddot{\beta}_{(1)} - H_0 \cos\beta^* \dot{\alpha}_{(1)} = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

де

$$A = J_1 + J_2 \cos^2 \beta^*. \quad (5.3)$$

Зібравши члени з μ^2 , маємо рівняння другого наближення:

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha}_{(2)} + H_0 \cos\beta^* \dot{\beta}_{(2)} = 2J_2 \sin\beta^* \cos\beta^* (\ddot{\alpha}_{(1)}\beta_{(1)} + \dot{\alpha}_{(1)}\dot{\beta}_{(1)}) + H_0 \sin\beta^* (\dot{\beta}_{(1)}\beta_{(1)}); \\ J_3\ddot{\beta}_{(2)} - H_0 \cos\beta^* \dot{\alpha}_{(2)} = -J_2 \sin\beta^* \cos\beta^* \dot{\alpha}_{(1)}^2 - H_0 \sin\beta^* (\dot{\alpha}_{(1)}\beta_{(1)}). \end{cases}$$

Їх ще можна подати у вигляді

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha}_{(2)} + H_0 \cos\beta^* \dot{\beta}_{(2)} = 2J_2 \sin\beta^* \cos\beta^* \frac{d}{dt}(\dot{\alpha}_{(1)}\beta_{(1)}) + \frac{1}{2}H_0 \sin\beta^* \frac{d}{dt}(\beta_{(1)}^2); \\ J_3\ddot{\beta}_{(2)} - H_0 \cos\beta^* \dot{\alpha}_{(2)} = -J_2 \sin\beta^* \cos\beta^* \dot{\alpha}_{(1)}^2 - H_0 \sin\beta^* (\dot{\alpha}_{(1)}\beta_{(1)}). \end{cases} \quad (5.4)$$

Розв'язок лінеаризованих рівнянь (5.2) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_{(1)} = a \sin(\lambda t + \varepsilon); \\ \dot{\beta}_{(1)} = -\sqrt{\frac{A}{J_3}} a \cos(\lambda t + \varepsilon), \end{cases} \quad \left(\lambda = \frac{H_0 \cos\beta^*}{\sqrt{AJ_3}} \right). \quad (5.5)$$

Із першого з рівнянь (5.2) випливає

$$\dot{\beta}_{(1)} = -\frac{A}{H_0 \cos\beta^*} \ddot{\alpha}_{(1)}. \quad (5.6)$$

Можна точно довести, що рух з кута β буде періодичним, тому надалі вважатимемо, що β^* є середнім значенням цього кута за період. Тоді з (5.6), інтегруючи за часом, можна встановити:

$$\beta_{(1)} = -\frac{A}{H_0 \cos\beta^*} \dot{\alpha}_{(1)}.$$

Враховуючи цей вираз, (4.22) можна перетворити до такої форми:

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha}_{(2)} + H_0 \cos\beta^* \dot{\beta}_{(2)} = 2J_2 \sin\beta^* \cos\beta^* \frac{d}{dt}(\dot{\alpha}_{(1)}\beta_{(1)}) + \frac{1}{2}H_0 \sin\beta^* \frac{d}{dt}(\beta_{(1)}^2); \\ J_3\ddot{\beta}_{(2)} - H_0 \cos\beta^* \dot{\alpha}_{(2)} = \frac{J_1 \sin\beta^*}{\cos\beta^*} \dot{\alpha}_{(1)}^2. \end{cases} \quad (5.7)$$

Така форма рівнянь другого наближення дає змогу, не розв'язуючи їх, одразу визначити сталі складові кутових швидкостей гіроскопа. Для цього застосуємо до правих і лівих частин рівнянь (5.7) операцію усереднення за часом

протягом періоду $T = \frac{2\pi}{\lambda}$ нутаційних коливань:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

При цьому вважатимемо, що

$$\langle \ddot{\alpha}_{(2)} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{\alpha}_{(2)}(t) dt = 0; \quad \langle \ddot{\beta}_{(2)} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{\beta}_{(2)}(t) dt = 0$$

і врахуємо, що за умов (5.5) виконуватимуться співвідношення

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\dot{\alpha}_{(1)} \beta_{(1)}) \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} (\beta_{(1)}^2) \right\rangle = 0; \quad \langle \dot{\alpha}_{(1)}^2 \rangle = \frac{a^2}{2}$$

Тому з рівнянь (4.25) остаточно матимемо:

$$\langle \dot{\beta} \rangle = \langle \dot{\beta}_{(2)} \rangle = 0; \quad \langle \dot{\alpha} \rangle = \langle \dot{\alpha}_{(2)} \rangle = -\frac{J_1 \sin \beta^*}{2H_0 \cos^2 \beta^*} a^2. \quad (5.8)$$

Формула Магнуса (5.8) фіксує той факт, що вільні коливання головної осі гіроскопа у кардановому підвісі супроводжуються її обертанням з постійною кутовою швидкістю навколо зовнішньої осі підвісу центра, і визначає залежність цієї кутової швидкості від параметрів гіроскопа та нутаційних коливань.

Контрольні запитання

1. Що таке випрямний ефект? Яким системам він притаманний?
2. Які наближені методи спроможні виявити випрямні ефекти?
3. За яких умов виникає випрямний ефект?
4. Які головні особливості випрямного ефекту?
5. Що називають дрейфом Магнуса? За яких умов він виникає?
6. Чи не суперечить виникнення дрейфу Магнуса головним законам механіки?

Контрольні запитання до теми 1.1

1. Опишіть головну ідею методів лінеаризації. Чим відрізняються вони один від одного?
2. Що таке лінеаризація нелінійності? Які види лінеаризації вам відомі?
3. Що називають лінеаризованими рівняннями? Для чого їх використовують? Яке відношення вони мають до вихідних нелінійних рівнянь?
4. Охарактеризуйте головну сутність методів малого параметра. Яку роль відіграє в них «малий параметр»?
5. Що таке квазілінійна система? Породжувальна система?
6. Охарактеризуйте головну ідею методу збурень.
7. Що розуміють під секулярними членами? Якому реальному явищу відповідають секулярні члени? Чи можна позбутися появи секулярних членів і як?
8. Що таке випрямний ефект? В яких системах він виникає? Якими наближеними методами його можна дослідити?
9. Якими наближеними методами можна дослідити:
 - неізохронність власних коливань нелінійної системи?
 - амплітудно-частотні характеристики нелінійних систем?

Абетковий покажчик

	А	Остроградського-Ляпунова	46
		Пуассона	41
амплітуда		методи	
комплексна	5	лінеаризації	25
амплітудно-частотна характеристика	35	малого параметра	25, 26
	Г		П
гармоніка		передатна функція	
основна	7	частотна	16
	Д	період	
динамічна система		гармонічних коливань	5
лінійна	8, 9	коливань	4
лінійна стаціонарна	9	процес	
нелінійна	9	коливальний	3
нестационарна	9		Р
параметрично збуджувана	9	рівняння	
	К	характеристичне	13
коливання	3	рух	
гармонічні	5	вільний	13
загасальні	4	сталий	3
нестационарні	4		С
періодичні	3	секулярні члени	42
полігармонічні	7	сила	8
середнє значення	8	зовнішня	8
середнє квадратичне значення	8	сили	
стандартне відхилення	8	гіроскопічні	10
стаціонарні	3	демпфувальні	10
координати		дисипативні	10
узагальнені	8	зовнішні	10
	Л	інерційні	9
лінеаризація		консервативні	10
"класична"	26	неконсервативні	10
"по кінцях"	28	потенціальні	10
гармонічна	31	радіальної корекції	10
нелінійностей	26	система	
пряма	29	динамічна	3
	М	квазілінійна	26
малий параметр	25, 41	квазілінійна	41
матриця		коливальна	3
характеристична	13	породжувальна	26
метод		спектр	
збурень	41	амплітудний	7
комплексних амплітуд	14	фазовий	7
		частотний	7
		спектральний	
		аналіз	7
		ступінь	
		вільності	8