

Рух несиметричного гіроскопа

Вступ

Потреба у вивченні руху несиметричного гіроскопа виникає у деяких практичних ситуаціях, наприклад, при розв'язуванні задачі стабілізації у географічній системі координат антенного пристрою, якому надається швидке обертання навколо вертикальної осі, а для розв'язки з можливими кутовими коливаннями основи антенний пристрій обладнаний внутрішнім кардановим підвісом. Такий пристрій по головних своїх властивостях нагадує звичайний триступеневий гіроскоп. Але, внаслідок суттєвої несиметричності розподілу мас по відношенню до площини власного обертання антени, його поведінка істотно відрізняється від відомих властивостей симетричного врівноваженого гіроскопу.

Під несиметричним гіроскопом у відомій літературі розуміють гіроскоп із різними моментами інерції відносно його головних осей інерції. При цьому зазвичай розглядається рух, коли гіроскопу надано швидке обертання навколо однієї з цих головних осей. У статті розглядається більш загальний випадок, який зустрічається на практиці, - власне обертання гіроскопа здійснюється відносно осі, яка не є головною віссю інерції. Ціль статті - надати проектувальникам зручний загальний математичний апарат для теоретичного дослідження і математичного моделювання таких гіроскопів, а також на його основі зробити основні практичні висновки щодо головних особливостей їхнього поведіння.

Постановка задачі. Рівняння руху гіроскопа

Специфікою обертових технічних пристроїв, зокрема - гіроскопів у кардановому підвісі, є наявність матеріальних осей, навколо яких тільки й мають змогу повертатися окремі його частини. Однією з них є вісь власного обертання гіроскопа, навколо якої гіроскопу надається швидке обертання за допомогою приводного двигуна. В реальних конструкціях ця вісь може не збігатися з однією з головних осей гіроскопа. Це утворює динамічний дебаланс гіроскопа. Окрім того, моменти інерції гіроскопа відносно двох інших ортогональних осей, жорстко пов'язаних з гіроскопом і ортогональних осі власного обертання, можуть також не дорівнювати один одному. У цьому випадку говорять про так звану несиметричність гіроскопа. Розглянемо узагальнені рівняння руху такого несиметричного і незбалансованого гіроскопа.

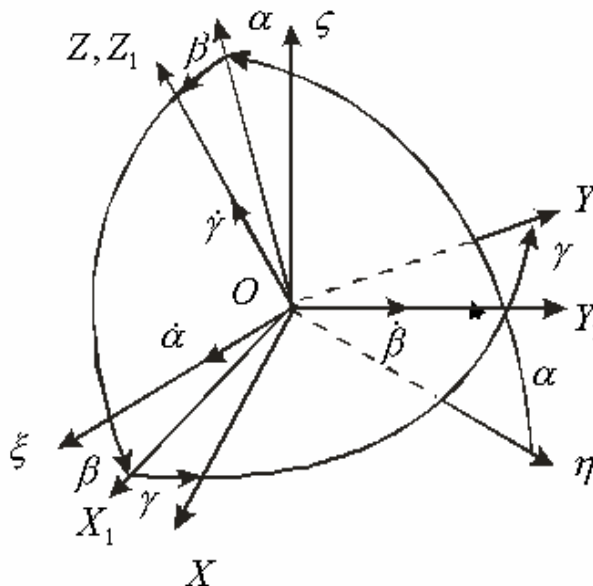


Рис. 1. Кінематика поворотів гіроскопа

Кінематику поворотів гіроскопа подано на рис. 1. Осі $\xi\eta\zeta$ припускаються інерціальними. Відхилення осей системи відліку XYZ , що жорстко пов'язані з гіроскопом (вісь Z припускається віссю власного обертання, інші дві лежать у площині власного обертання), визначимо кутовими координатами α , β і γ , з яких перші дві визначають положення осі власного обертання, а третя є кутом власного обертання гіроскопу. Введемо в

розгляд також систему осей Резаля $X_1Y_1Z_1$, ось Z_1 якої збігається з віссю Z власного обертання, а дві інших не приймають участі у власному обертанні гіроскопа.

Нехай

$$K = \begin{bmatrix} K_\xi \\ K_\eta \\ K_\zeta \end{bmatrix}; \quad K_1 = \begin{bmatrix} K_{X1} \\ K_{Y1} \\ K_{Z1} \end{bmatrix}; \quad \omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{X1} \\ \omega_{Y1} \\ \omega_{Z1} \end{bmatrix} -$$

матриці-стовпці з проєкцій вектора \mathbf{K} кінетичного моменту гіроскопа відповідно на осі систем XYZ і $X_1Y_1Z_1$ та вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютної кутової швидкості гіроскопа на осі Резаля,

B	X_1	Y_1	Z_1
ξ	$\cos \beta$	0	$\sin \beta$
η	$\sin \alpha \sin \beta$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha \cos \beta$
ζ	$-\cos \alpha \sin \beta$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha \cos \beta$

C	X	Y	Z
X_1	$\cos \gamma$	$-\sin \gamma$	0
Y_1	$\sin \gamma$	$\cos \gamma$	0
Z_1	0	0	1

матриці напрямних косинусів між осями $\xi\eta\zeta$ і $X_1Y_1Z_1$ та $X_1Y_1Z_1$ і XYZ відповідно;

$$J = \begin{bmatrix} J_X & J_{XY} & J_{XZ} \\ J_{XY} & J_Y & J_{YZ} \\ J_{XZ} & J_{YZ} & J_Z \end{bmatrix}; \quad J_1 = \begin{bmatrix} J_{X1} & J_{XY1} & J_{XZ1} \\ J_{XY1} & J_{Y1} & J_{YZ1} \\ J_{XZ1} & J_{YZ1} & J_{Z1} \end{bmatrix} -$$

матриці моментів інерції гіроскопа по відношенню до декартових систем координат XYZ і $X_1Y_1Z_1$ відповідно. Тоді між ними існують співвідношення:

$$K_1 = J_1 \cdot \omega_1; \quad J_1 = C \cdot J \cdot C^T; \quad K_1 = B^T \cdot K.$$

З них висновуємо:

$$\omega_1 = J_1^{-1} \cdot K_1 = (C \cdot J \cdot C^T)^{-1} \cdot B^T \cdot K.$$

Звідси випливає

$$\omega_1 = C \cdot I \cdot C^T \cdot B^T \cdot K, \quad (1)$$

де індекс „Т” угорі позначає транспонування матриці, а також позначено $I = J^{-1}$.

Матриця J моментів інерції, а також зворотна матриця I при будь-якому русі гіроскопа є сталими.

Для аналізу руху використаємо закон моментів:

$$\frac{dK}{dt} = M, \quad (2)$$

де $M = [M_\xi, M_\eta, M_\zeta]^T$ - матриця-стовпець з проєкцій вектора моменту зовнішніх сил, що діють на гіроскоп, на осі інерціальної системи координат.

Для конкретизації будемо вважати, що зовнішня вісь карданова підвісу гіроскопа орієнтована вдовж інерціальної осі ξ (рис. 1), а внутрішня – вдовж осі Y_1 . Введемо позначення: N - момент сил, що діє на зовнішню рамку підвісу з боку основи навколо зовнішньої осі підвісу, L - момент сил, що діє на внутрішню рамку з боку зовнішньої навколо внутрішньої осі підвісу, R - момент сил, що діє на гіроскоп з боку внутрішньої рамки навколо головної осі гіроскопа, M_{cm} - момент сторонніх (зокрема, аеродинамічних) сил, що діє на гіроскоп навколо головної осі гіроскопа. Тоді проєкції моментів сил на осі системи осей Резаля можуть бути подані у вигляді:

$$M_{X1} = \frac{N - R \cdot \sin \beta}{\cos \beta}; \quad M_{Y1} = L; \quad M_{Z1} = R + M_{cm}.$$

Якщо ввести матрицю

$$M_1 = \begin{bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N - R \sin \beta \\ \cos \beta \\ L \\ R + M_{cm} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

то закон моментів (2) в інерціальних осях можна подати у наступній матричній формі:

$$\frac{dK}{dt} = B \cdot M_1. \quad (4)$$

Сукупність матричних рівнянь (1) і (4) повністю описують поведінку гіроскопу, якщо складові вектора моменту зовнішніх сил описані як явні функції часу, кутів повороту та кутових швидкостей гіроскопа.

Результати чисельного інтегрування

Якщо гіроскоп є вільним, то кутове положення осі його кінетичного моменту \mathbf{K} залишається незмінним у інерціальному просторі. Тому його проєкції на осі системи $\xi\eta\zeta$ є сталими величинами ($K = const$). У цьому випадку співвідношення (1) відіграє роль диференційного матричного рівняння гіроскопа у загальному вигляді.

Застосуємо його для розглядуваного випадку. Не зменшуючи узагальненості, припустимо, що вектор кінетичного моменту гіроскопа спрямований вдвож осі ζ . Тоді кути α і β визначатимуть кутове відхилення осі власного обертання гіроскопа від вектора його кінетичного моменту. Матричне рівняння (1) перетворюється до такого:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta \end{bmatrix} = K_0 \cdot C(\gamma) \cdot I \cdot C^T(\gamma) \cdot \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Це є диференційні рівняння вільного несиметричного гіроскопа. Тут K_0 - величина кінетичного моменту гіроскопа.

Нижче (рис. 2, 3) наведені результати чисельного інтегрування цих рівнянь за умов, що вказані на рисунках.

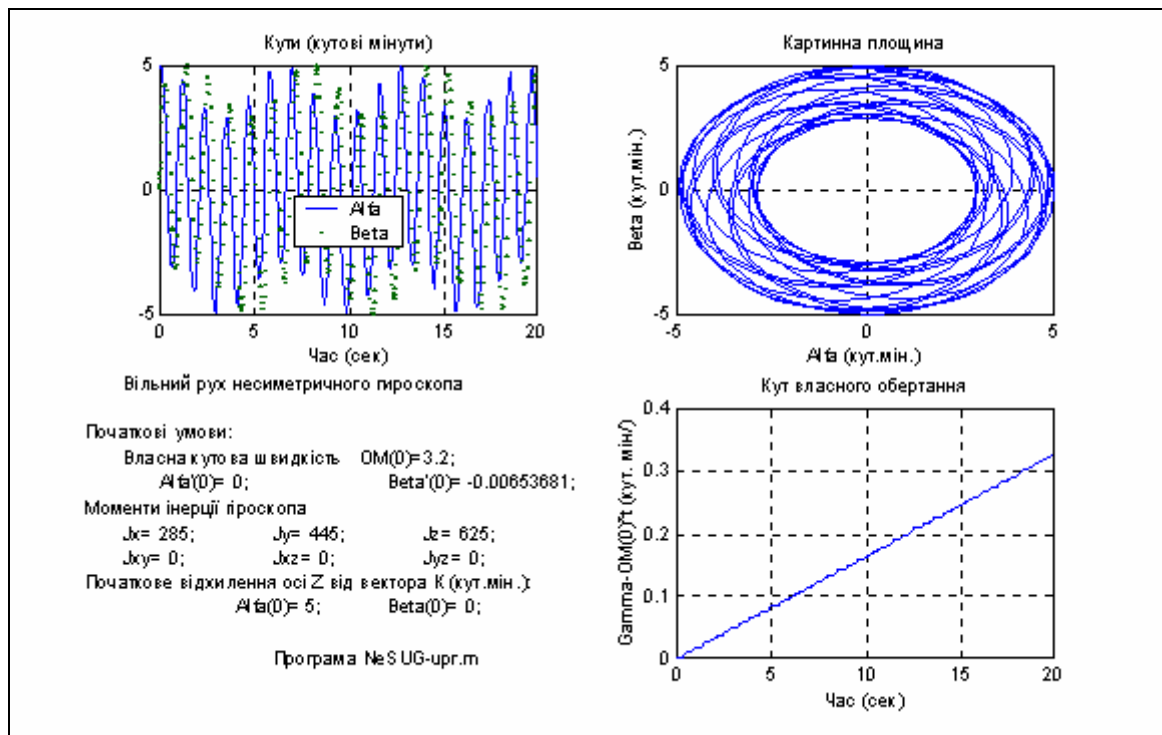


Рис. 2. Результати моделювання несиметричного гіроскопа без динамічного небалансу

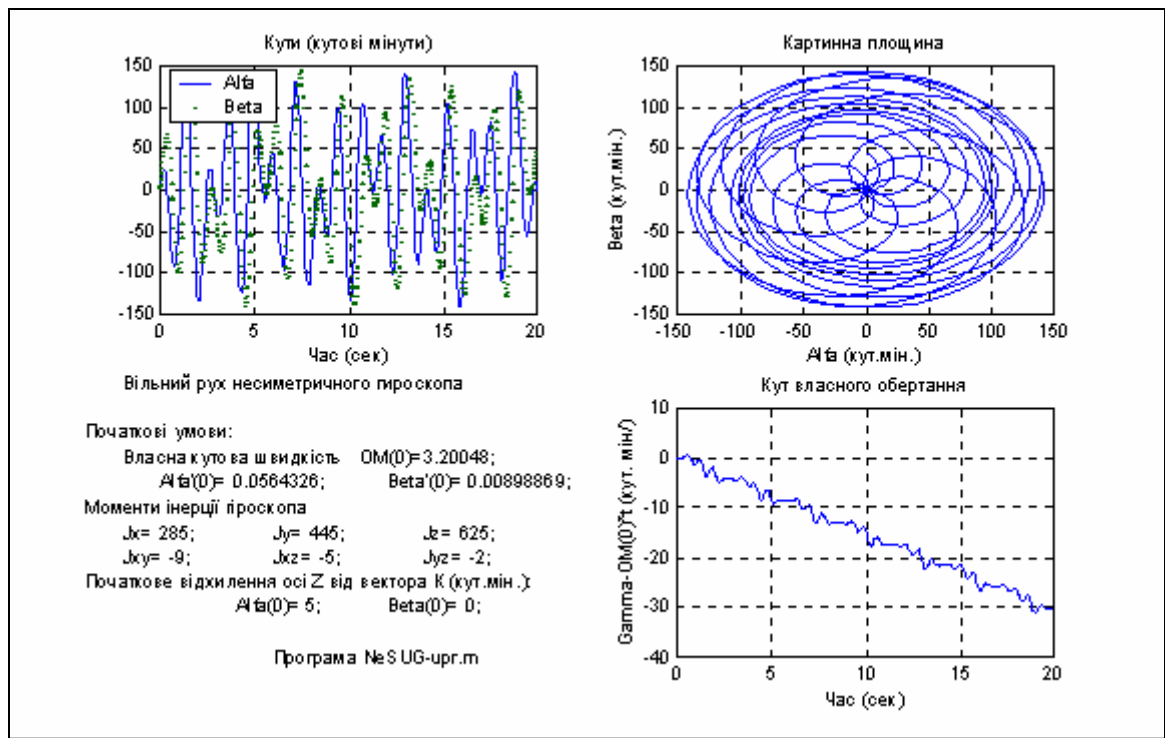


Рис. 3. Результати моделювання динамічно незбалансованого несиметричного гіроскопа

Рис. 2 подає поведінку динамічно збалансованого гіроскопа з матрицею інерції

$$J = \begin{bmatrix} 285 & 0 & 0 \\ 0 & 445 & 0 \\ 0 & 0 & 625 \end{bmatrix}$$

при початковому відхиленні осі власного обертання від осі кінетичного моменту $\alpha_0 = 5'$. Значення K_0 величини кінетичного моменту узяті рівним 2000.

У другому випадку (рис. 3) розглянуто динамічно незбалансований гіроскоп з матрицею інерції

$$J = \begin{bmatrix} 285 & -9 & -5 \\ -9 & 445 & -2 \\ -5 & -2 & 625 \end{bmatrix}$$

Як бачимо, поведінка несиметричного гіроскопа істотно відрізняється від поведінки симетричного гіроскопа тим, що вільні коливання його здійснюються з декількома частотами, причому навіть незначна динамічна незбалансованість гіроскопа приводить до виникнення значних за амплітудою коливань.

Слід очікувати, що при враховуванні демпфірування власні коливання гіроскопа загасатимуть. Залишаться лише вимушені коливання, обумовлені впливом динамічного дебалансу.

Перевіримо це на моделі. Тепер, окрім рівняння (1), необхідно використовувати також рівняння (4) з врахуванням (3). Введемо такі моменти по осях підвісу гіроскопа:

- момент опору обертанню гіроскопа навколо зовнішньої осі підвісу $N = -f_2 \cdot \dot{\alpha}$;
- момент опору обертанню гіроскопа навколо внутрішньої осі підвісу $L = -f_1 \cdot \dot{\beta}$;
- момент аеродинамічного опору власному обертанню гіроскопа (стала величина внаслідок усталеного власного обертання гіроскопа) $M_{cm} = M_3$.

Припускаємо також, що обертання гіроскопа здійснюється зі сталими оборотами, а тому $M_{z1} = R + M_{cm} = 0$.

На рис. 4...9 наведені результати чисельного інтегрування рівнянь (1) і (4). Окрім руху головної осі гіроскопа у картинній площині поданий також рух у ній кінця вектора кінетичного моменту (кути α_K і β_K).

Рис. 4 і 5 подають результати моделювання впливу на рух несиметричного гіроскопу лише демпфіруючих моментів сил. Неважко впевнитися, що, як і передбачалося, демпфірування призводить до повного загасання коливань гіроскопа у випадку динамічно збалансованого несиметричного гіроскопа (рис. 4). При цьому після загасання власних коливань головна вісь гіроскопа зупиняється у положенні, дещо відхиленому від початково-

го положення вектора кінетичного моменту. У гіроскопі з динамічним дебалансом (рис. 5) після загасання власних коливань залишаються вимушені коливання, обумовлені цим дебалансом

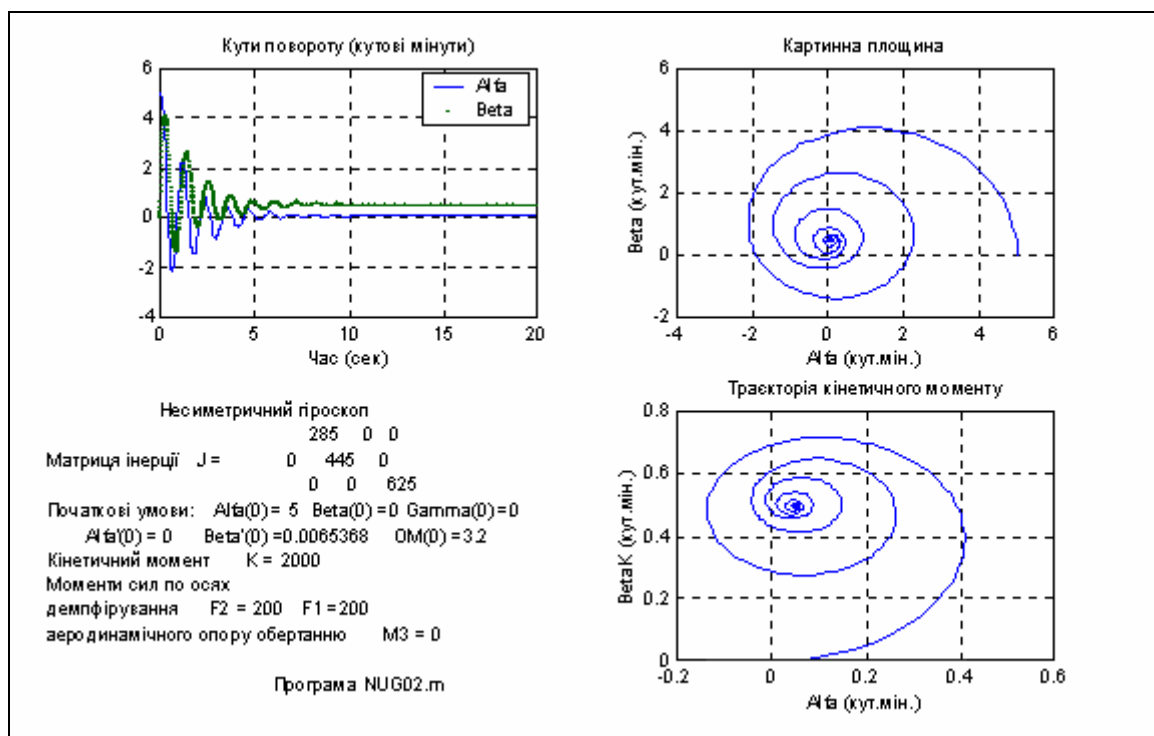


Рис. 4. Несиметричний гіроскоп при наявності демпфірування

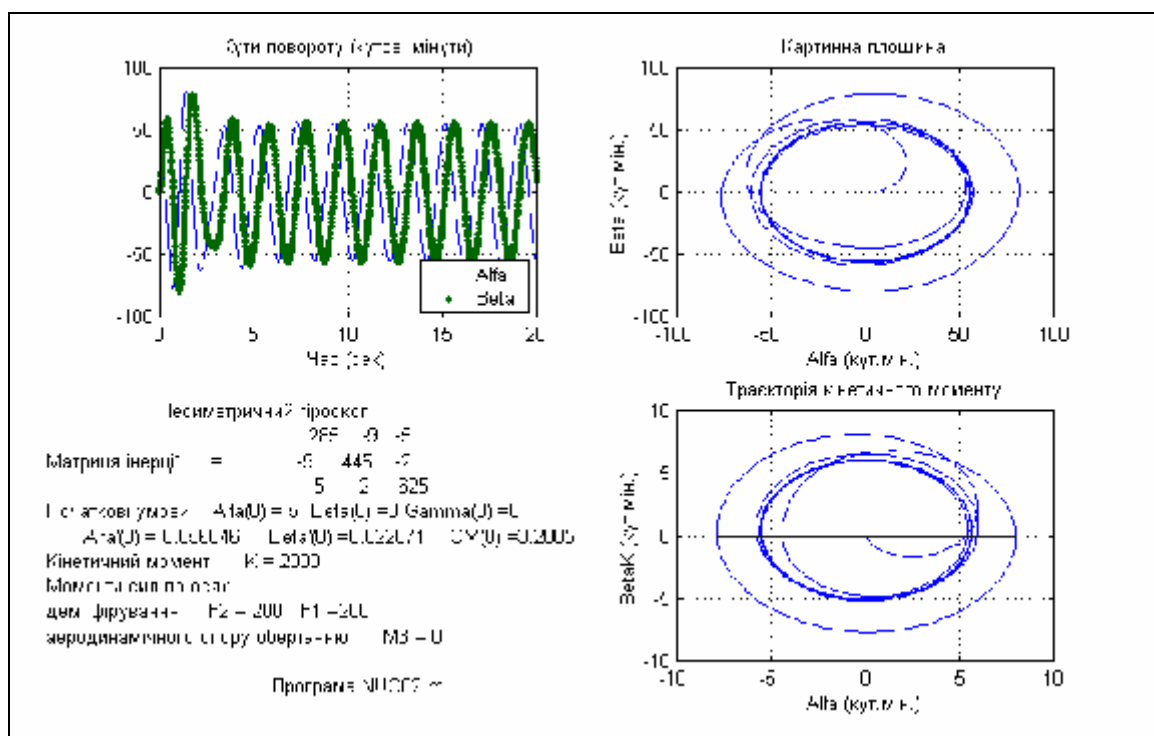


Рис. 5. Несиметричний і незбалансований гіроскоп при наявності демпфірування

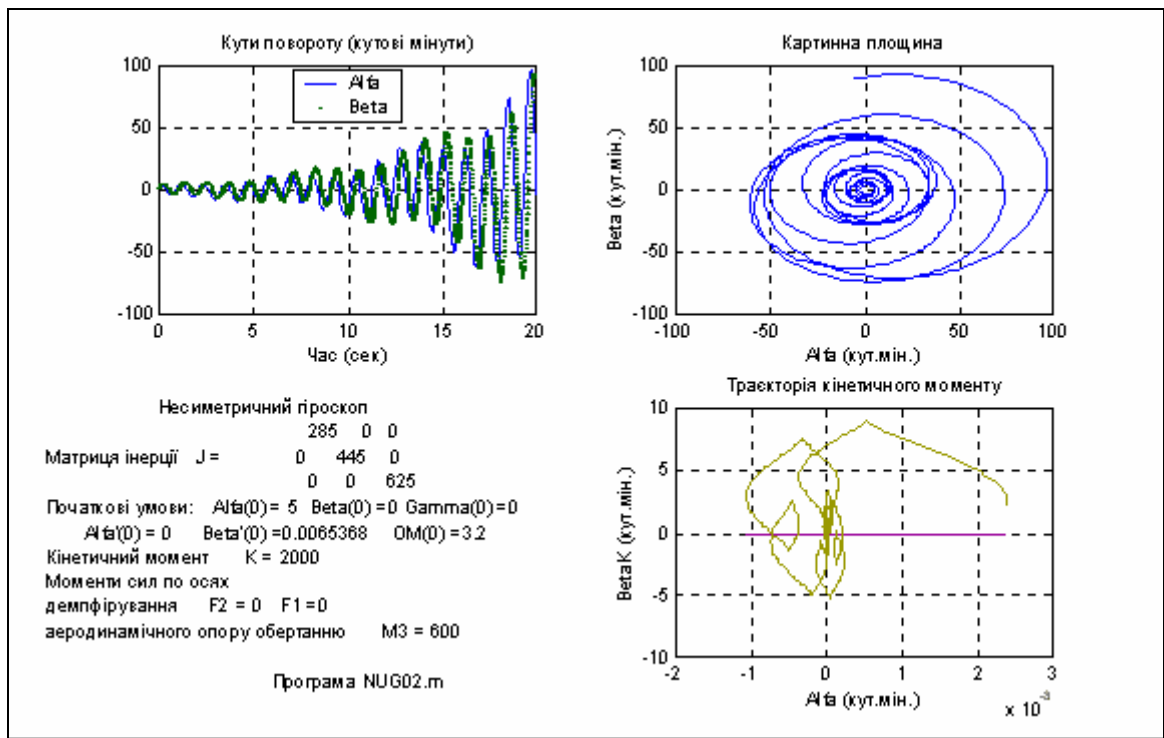


Рис. 6. Несиметричний гіроскоп під дією аеродинамічного моменту

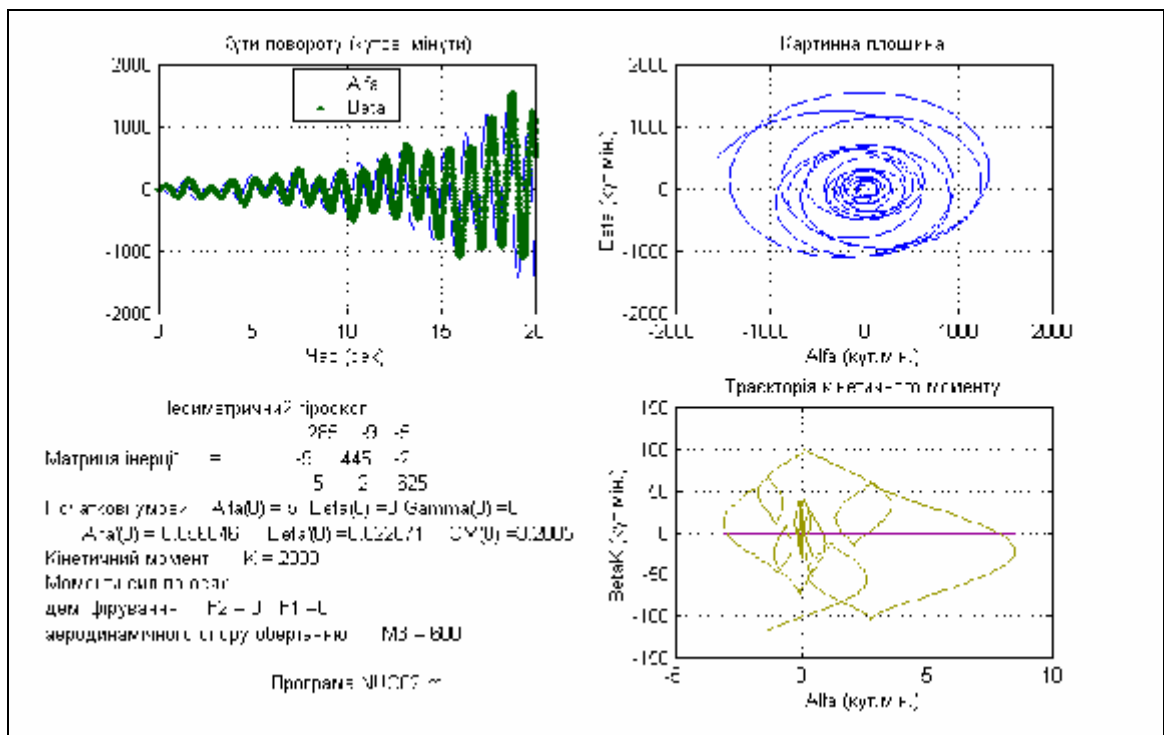


Рис. 7. Несиметричний і незбалансований гіроскоп під дією аеродинамічного моменту

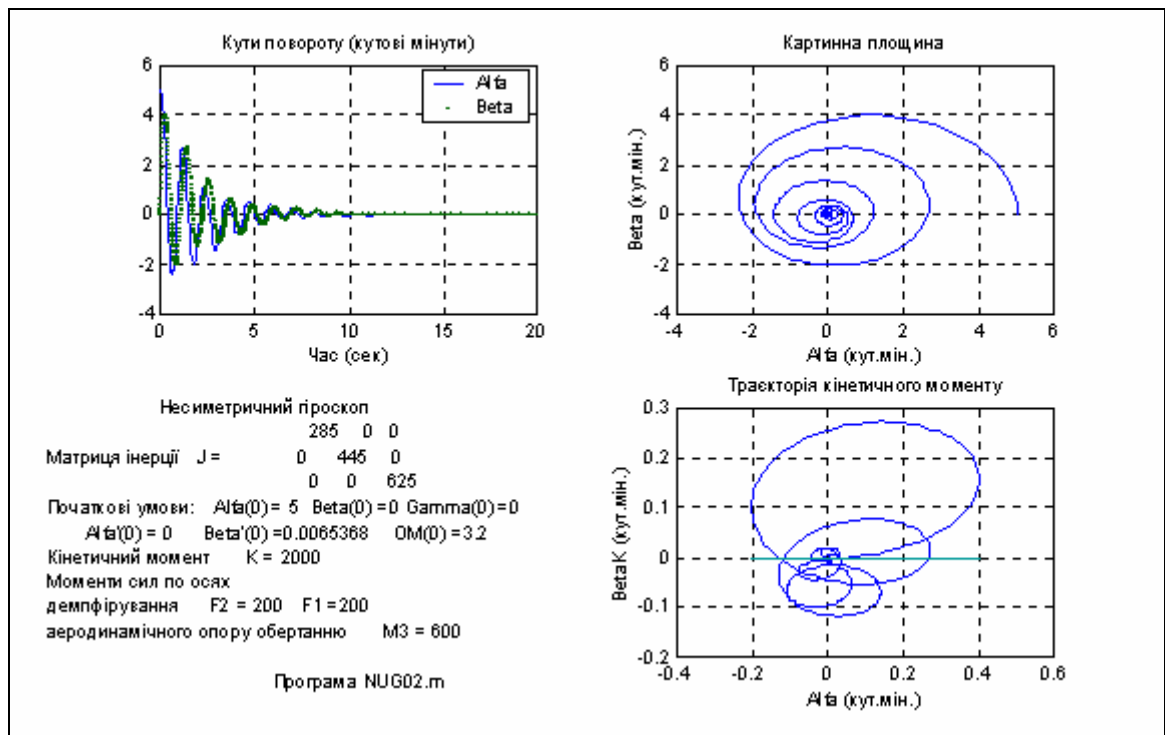


Рис. 8. Несиметричний гіроскоп під дією аеродинамічного моменту і демпфірування

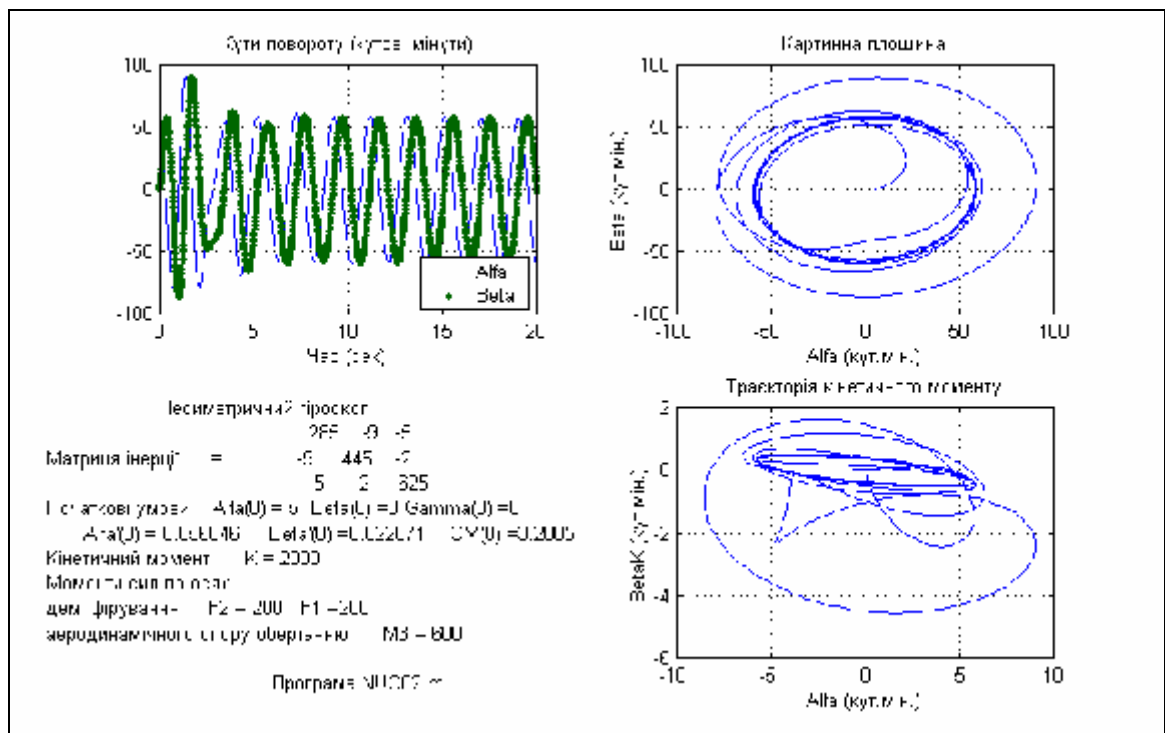


Рис. 9. Незбалансований гіроскоп під дією аеродинамічного моменту і демпфірування

Рис. 6 і 7 подають вплив моменту аеродинамічного опору на рух гіроскопа. З них випливає, що коливання гіроскопу стають розбіжними.

Сумісна дія аеродинамічного моменту і демпфіруючих моментів подана на рис. 8 і 9. Вона приводить до загасання власних коливань. У підсумку залишаються вимушені коливання внаслідок динамічного небалансу. Вплив аеродинамічного моменту приводить до того, що після загасання власних коливань вимушені коливання гіроскопа здійснюються навколо початкового положення вектора кінетичного моменту.

Теоретичне дослідження

Для з'ясування кількісних співвідношень якісних особливостей поведінки несиметричного гіроскопа проведемо наближений аналіз диференціальних рівнянь його руху.

Вільний рух можна дослідити за рівнянням (5). Введемо позначення елементів інверсної матриці I моментів інерції гіроскопа відносно системи координат, жорстко пов'язаної з гіроскопом:

$$I = \begin{bmatrix} i_X & i_{XY} & i_{XZ} \\ i_{XY} & i_Y & i_{YZ} \\ i_{XZ} & i_{YZ} & i_Z \end{bmatrix}.$$

Ця матриця залишається незмінною при будь-якому русі гіроскопа. Інверсна матриця моментів інерції відносно осей Резаля залежить від куту власного обертання гіроскопа і має вигляд:

$$I_1 = \begin{bmatrix} i_{X1} & i_{XY1} & i_{XZ1} \\ i_{XY1} & i_{Y1} & i_{YZ1} \\ i_{XZ1} & i_{YZ1} & i_{Z1} \end{bmatrix} = C(\gamma) \cdot I \cdot C^T(\gamma),$$

причому її елементи виражаються через елементи матриці I наступним чином:

$$\begin{aligned} i_{X1} &= i_X \cos^2 \gamma + i_Y \sin^2 \gamma - i_{XY} \sin 2\gamma; & i_{Y1} &= i_Y \cos^2 \gamma + i_X \sin^2 \gamma + i_{XY} \sin 2\gamma; \\ i_{Z1} &= i_Z; & i_{XY1} &= (i_X - i_Y) \sin \gamma \cos \gamma + i_{XY} \cos 2\gamma; \\ i_{XZ1} &= i_{XZ} \cos \gamma - i_{YZ} \sin \gamma; & i_{YZ1} &= i_{YZ} \cos \gamma + i_{XZ} \sin \gamma. \end{aligned}$$

Тепер рівняння (5) для малих кутів α і β можна подати так:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} - H_0(i_X \cos^2 \gamma + i_Y \sin^2 \gamma - i_{XY} \sin 2\gamma)\beta - \\ - H_0[(i_X - i_Y) \sin \gamma \cos \gamma + i_{XY} \cos 2\gamma]\alpha &= H_0(i_{XZ} \cos \gamma - i_{YZ} \sin \gamma) \\ \dot{\beta} - H_0(i_Y \cos^2 \gamma + i_X \sin^2 \gamma + i_{XY} \sin 2\gamma)\alpha - \\ + H_0[(i_X - i_Y) \sin \gamma \cos \gamma + i_{XY} \cos 2\gamma]\beta &= H_0(i_{YZ} \cos \gamma + i_{XZ} \sin \gamma) \end{aligned}$$

Ці рівняння можна привести до такого одного комплексного безрозмірного рівняння:

$$z' - jz = \frac{i_d}{i_1} \exp[j(\gamma + \varepsilon_d)] + \frac{i}{i_1} \bar{z} \cdot \exp[j(2\gamma + \varepsilon - \frac{\pi}{2})], \quad (6)$$

де позначено:

$$\begin{aligned} z &= \alpha + j\beta; & \bar{z} &= \alpha - j\beta; & z' &= \frac{dz}{d\tau}; & \tau &= \lambda t = H_0 i_1 t = J_z i_1 \Omega t; \\ i_1 &= \frac{i_X + i_Y}{2}; & i_2 &= \frac{i_X - i_Y}{2}; & i &= \sqrt{i_2^2 + i_{XY}^2}; & i_d &= \sqrt{i_{XZ}^2 + i_{YZ}^2}; \\ \varepsilon &= \operatorname{arctg} \frac{i_{XY}}{i_2}; & \varepsilon_d &= \operatorname{arctg} \frac{i_{YZ}}{i_{XZ}}. \end{aligned}$$

Тут прийнято $K_0 \approx J_z \Omega \approx H_0$.

Припустимо, що власне обертання у нульовому наближенні здійснюється з незмінною кутовою швидкістю Ω , а тому, наближено, $\gamma \approx \Omega t$. У цьому випадку рівняння (6) являє собою комплексне лінійне диференціальне рівняння з періодичними коефіцієнтами.

$$z' - jz = \frac{i_d}{i_1} \exp[j(\mu\tau + \varepsilon_d)] + \frac{i}{i_1} \bar{z} \cdot \exp[j(2\mu\tau + \varepsilon - \frac{\pi}{2})], \quad (7)$$

де $\mu = \frac{1}{J_z i_1}$ - безрозмірна частота власного обертання гіроскопа.

Розв'яжемо це рівняння наближено, користуючись методом збурень і вважаючи малими величини i_d/i_1 (яка характеризує динамічну незбалансованість) і i/i_1 (яка характеризує неоднаковість моментів інерції гіроскопа у площині власного обертання), а останній член рівняння - малою другого порядку. Тоді рівняння (7) можна подати як сукупність рівнянь першого

$$z'_{(1)} - jz_{(1)} = \frac{i_d}{i_1} \exp[j(\mu\tau + \varepsilon_d)], \quad (8)$$

і другого наближення

$$z'_{(2)} - jz_{(2)} = \frac{i}{i_1} \bar{z}_{(1)} \cdot \exp[j(2\mu\tau + \varepsilon - \frac{\pi}{2})], \quad (9)$$

а загальний розв'язок рівняння (7) шукати у вигляді суми розв'язків цих двох рівнянь:

$$z(\tau) = \alpha(\tau) + j\beta(\tau) = z_{(1)}(\tau) + z_{(2)}(\tau).$$

Розв'язок рівняння (8) має вигляд:

$$z_{(1)} = A \cdot \exp(j\tau) + \frac{i_d}{i_1(1-\mu)} \exp[j(\mu\tau + \varepsilon_d + \frac{\pi}{2})]. \quad (10)$$

Тут A - стала інтегрування, яка визначається початковими умовами.

Підставляючи цей розв'язок у праву частину рівняння (9), одержимо:

$$z'_{(2)} - jz_{(2)} = \frac{i}{i_1} \cdot \left\{ \bar{A} \cdot \exp\{j[(2\mu-1)\tau + \varepsilon - \frac{\pi}{2}]\} - \frac{i_d}{i_1(1-\mu)} \exp[j(\mu\tau + \varepsilon - \varepsilon_d)] \right\}.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$z_{(2)} = A_2 \cdot \exp(j\tau) + D \cdot \exp\{j[(2\mu-1)\tau + \varepsilon - \frac{\pi}{2}]\} + E \cdot \exp[j(\mu\tau + \varepsilon - \varepsilon_d)],$$

де

$$D = \bar{A} \frac{i}{2i_1(1-\mu)} \exp(j\frac{\pi}{2}); \quad E = -\frac{i_d \cdot i}{2i_1^2(1-\mu)^2} \exp(j\frac{\pi}{2}).$$

Результати розрахунків по цих формулах показують цілковиту збіжність розрахункового руху гіроскопа з результатами проведеного моделювання.

Висновки

1. Власний рух несиметричного гіроскопа, на відміну від симетричного, є двочастотним. Окрім коливань з головною, нутаційною, частотою $\lambda = \frac{2J_Z}{J_X + J_Y} \Omega$ здійснюються наложені коливання з частотою

$2\Omega - \lambda = 2 \frac{J_X + J_Y - J_Z}{J_X + J_Y} \Omega$. Амплітуда цих додаткових коливань, обумовлених неоднаковістю моментів

інерції гіроскопа відносно осей, що лежать у площині власного обертання, складає $\frac{i}{2i_1(1-\mu)} = \frac{J_Z i}{2(J_Z i_1 - 1)}$

частку від амплітуди нутаційних коливань. Наприклад, для параметрів, прийнятих при попередньому моделюванні вона дорівнює 0,24819. При цьому $\Omega = 3,2 \text{ c}^{-1}$, $\lambda = 5,4795 \text{ c}^{-1}$, $2\Omega - \lambda = 0,92 \text{ c}^{-1}$.

2. Особливо небезпечним явищем, яке виникає при динамічному небалансі гіроскопа, є поява навіть у вільному русі „вимушених” коливань гіроскопа з частотою його власного обертання Ω . Амплітуда цих коливань не залежить від початкових умов, визначаючись, головним чином, величинами відцентрових моментів інерції гіроскопа відносно осей, пов'язаних з віссю власного обертання. Її величина (з кутів повороту гіроскопа) може бути оціненою за такою наближено формулою:

$$\alpha_m = \beta_m \approx \frac{i_d [2i_1(1-\mu) - i]}{2i_1^2(1-\mu)^2}.$$

Зокрема, для прийнятих раніше значень параметрів ця формула дає значення 59,3 кутові мінути, що досить близько до одержаних внаслідок моделювання.

Цих коливань неможливо позбутися введенням демпфіруючих моментів сил.

3. Наявність значного моменту сил аеродинамічного опору власному обертанню гіроскопа може бути причиною нестійкості власних коливань гіроскопа. Але введення достатньо значного демпфірування по осях карданова підвісу може відновити стійкість. Позитивним у дії цього аеродинамічного моменту є виникаюче внаслідок нього „самоцентрування” осі власного обертання гіроскопа у положення, ортогональне зовнішньої осі карданова підвісу. Але ця ж властивість призведе до додаткових збурень (через аеродинамічний момент) гіроскопа коливаннями основи навколо внутрішньої осі підвісу.

Перспективи подальших досліджень

Одержані результати можуть прислужитися при проектуванні корабельних тривісних оберткових антенних пристроїв, площина обертання яких стабілізується у горизонтальній площині за допомогою двигунів стабілізації. Поданий математичний апарат дозволяє дослідити вплив на точність стабілізації осі обертання антени ди-

наміки систем стабілізації по осях підвісу при хитавиці основи, змінюванні аеродинамічного моменту внаслідок хитавиці і поривів вітру, інших збуреннях.

Описаний підхід може бути використаний також при аналізі кутового руху керованого космічного літального апарату.

Література.

Магнус К. Гироскоп. Теория и применение.- М.: "Мир", 1974. – 528 с.

Опубликовано: Наукові вісті НТУУ "КПІ", № 4 (30), 2003. с. 114-121