

*Диференціювання вектора,  
заданого в рухомій системі координат*

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}_P \mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{a}$$

У проєкціях на осі рухомої системи координат  $P$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right)_{1P} = \frac{da_{1P}}{dt} + \omega_{2P}^P a_{3P} - \omega_{3P}^P a_{2P} \\ \left( \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right)_{2P} = \frac{da_{2P}}{dt} + \omega_{3P}^P a_{1P} - \omega_{1P}^P a_{3P} \\ \left( \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right)_{3P} = \frac{da_{3P}}{dt} + \omega_{1P}^P a_{2P} - \omega_{2P}^P a_{1P} \end{array} \right.$$

## Закон моментів

$$\frac{\tilde{d}_P \mathbf{K}_O^\omega}{dt} + \omega^P \times \mathbf{K}_O^\omega = \mathbf{M}_O - m \rho_C \times \mathbf{w}_O$$

У проєкціях на осі рухомої системи координат  $P$  ( $OXYZ$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dK_{OX}^\omega}{dt} + \omega_Y^P K_{OZ}^\omega - \omega_Z^P K_{OY}^\omega = M_{OX} - m(y_C w_{OZ} - z_C w_{OY}) \\ \frac{dK_{OY}^\omega}{dt} + \omega_Z^P K_{OX}^\omega - \omega_X^P K_{OZ}^\omega = M_{OY} - m(z_C w_{OX} - x_C w_{OZ}) \\ \frac{dK_{OZ}^\omega}{dt} + \omega_X^P K_{OY}^\omega - \omega_Y^P K_{OX}^\omega = M_{OZ} - m(x_C w_{OY} - y_C w_{OX}) \end{array} \right. ,$$

Матрична форма подання вектора обертальної частини кінетичного моменту

$$\mathbf{K}_{OP}^\omega = \mathbf{I}_{OP} \boldsymbol{\Omega}_P ,$$

$$\mathbf{K}_{OP}^\omega = \begin{bmatrix} K_{OX}^\omega \\ K_{OY}^\omega \\ K_{OZ}^\omega \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_{OP} = \begin{bmatrix} J_{OX} & J_{OXY} & J_{OXZ} \\ J_{OXY} & J_{OY} & J_{OYZ} \\ J_{OXZ} & J_{OYZ} & J_{OZ} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega}_P = \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix}$$

*Рівняння Лагранжа другого роду*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q_q$$

$$T = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{Q} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_O) \quad \Pi = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\rho}_C = -m(\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\rho}_C)$$

$$\mathbf{K}_O = m \boldsymbol{\rho}_C \times \mathbf{v}_O + \mathbf{K}_O^\omega$$

$$\mathbf{Q} = m \mathbf{v}_C$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C$$

*Рівняння Жильбера*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T^*}{\partial q} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial q} = Q_q$$

$$T^* = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_O \quad \Pi^* = m(\mathbf{w}_O - \mathbf{g}) \cdot \boldsymbol{\rho}_C$$

## Закон прецесії

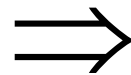
$$\omega^P \times \mathbf{H} = \mathbf{M}$$

Якщо  $P = XYZ$  – осі Резаля, а  $Z$  – вісь власного обертання, тобто

$$H_X = H_Y = 0; \quad H_Z = H = J\omega_Z,$$

то

$$\omega \times \mathbf{H} = \mathbf{M}$$



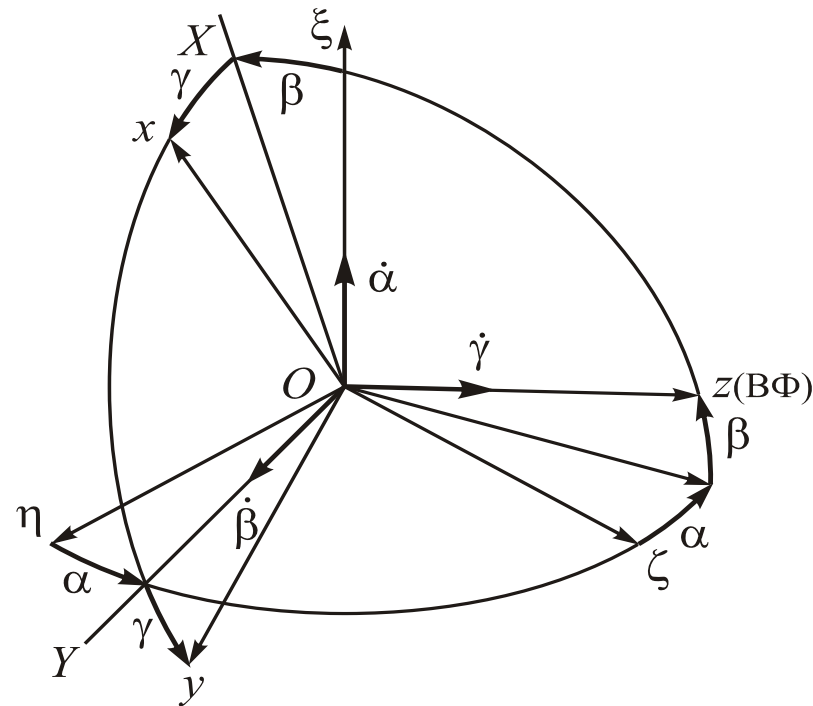
$$\begin{cases} \omega_Y = \frac{M_X}{H} \\ \omega_X = -\frac{M_Y}{H} \end{cases}$$

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}_{gyr} = 0$$

Гіроскопічний момент

$$\mathbf{M}_{gyr} = \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}$$

## Рівняння руху СЗГ



$$\left\{ \begin{array}{l} J_e \ddot{\alpha} \cos \beta - 2J_e \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta + H \dot{\beta} = M_x \\ J_e \ddot{\beta} + J_e \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H \dot{\alpha} \cos \beta = M_y \\ \frac{dH}{dt} = M_z \end{array} \right.$$

# Рівняння руху СЗГ у формі Булгакова

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\beta_K}{dt} = \frac{M_{XK}}{K} \\ \frac{d\alpha_K}{dt} = -\frac{M_{YK}}{K \cos \beta_K} \\ \frac{dK}{dt} = M_{ZK} \end{array} \right.$$

*РПР*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi}{dt} = \lambda - \frac{M_{YK} \cos \psi - M_{XK} \sin \psi}{K \operatorname{tg} \vartheta} \\ \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{M_{XK} \cos \psi + M_{YK} \sin \psi}{K} \end{array} \right.$$

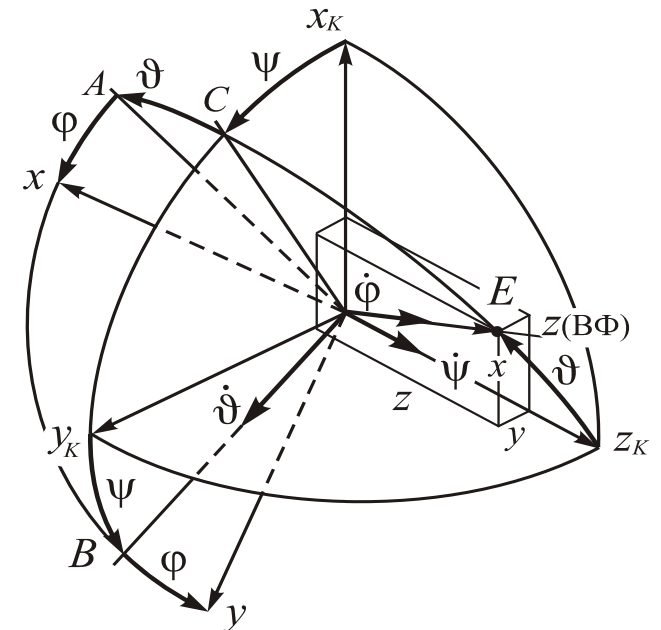
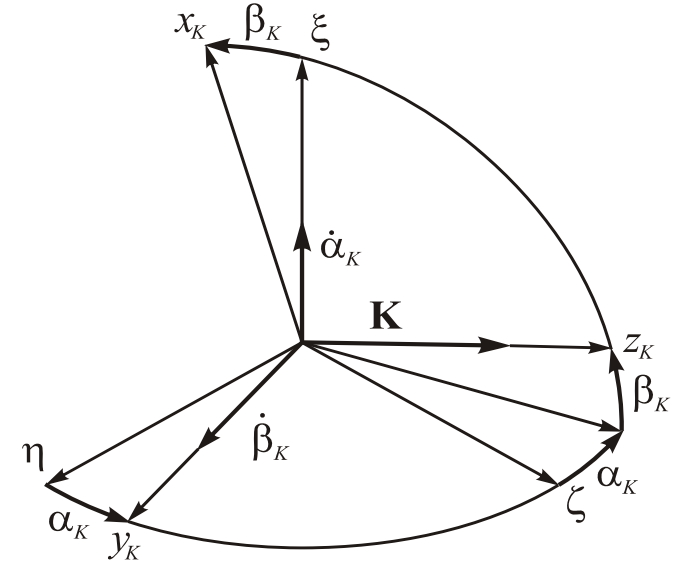
*РНР*

$$\frac{d\phi}{dt} = \left( \frac{1}{J} - \frac{1}{J_e} \right) K \cos \vartheta + \frac{M_{YK} \cos \psi - M_{XK} \sin \psi}{K \sin \vartheta}$$

*РВР*

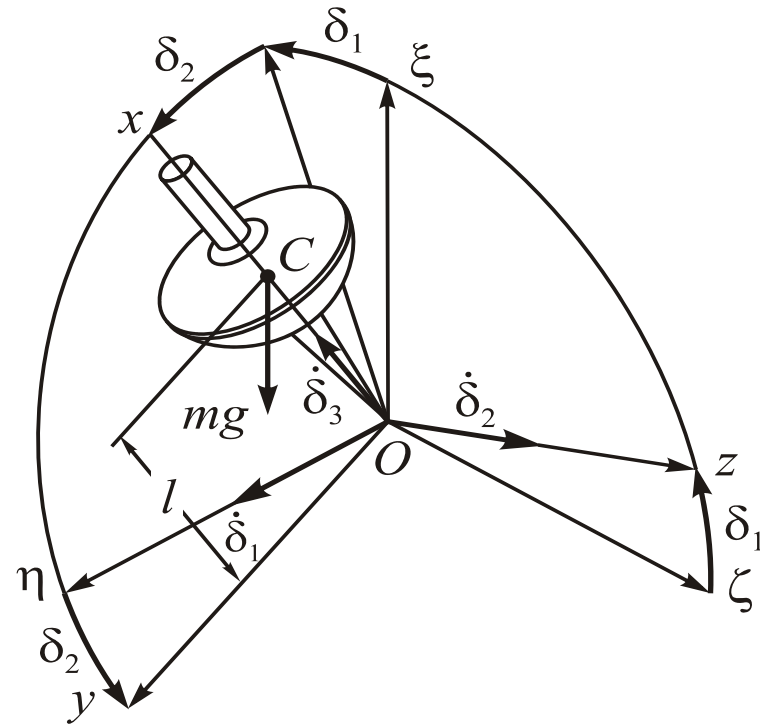
$$\lambda = \frac{K}{J_e} + \frac{M_{YK}}{K} \operatorname{tg} \beta_K$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} + \lambda y = -\frac{M_{XK}}{K} z \\ \frac{dy}{dt} - \lambda x = -\frac{M_{YK}}{K} z \end{array} \right.$$



ОТЧЕСО-6 – Кафедра ПСОИ – НТУУ "КПІ"

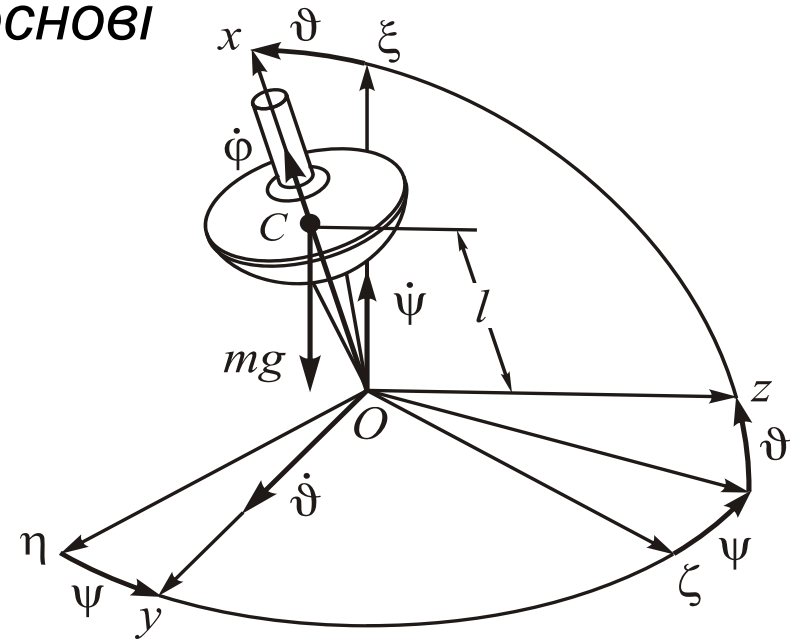
*Рівняння руху ГМ на нерухомій основі  
у кутах осциляції*



$$\left\{ \begin{array}{l} J'_e \ddot{\delta}_1 \cos^2 \delta_2 - 2J'_e \dot{\delta}_1 \dot{\delta}_2 \sin \delta_2 \cos \delta_2 + H \dot{\delta}_2 \cos \delta_2 = mgl \sin \delta_1 \cos \delta_2 + M_\eta - M_X \sin \delta_2 \\ J'_e \ddot{\delta}_2 + J'_e \dot{\delta}_1^2 \sin \delta_2 \cos \delta_2 + H \dot{\delta}_1 \cos \delta_2 = mgl \sin \delta_2 \cos \delta_1 + M_Z \\ \frac{dH}{dt} = M_X \end{array} \right.$$

ОТЧЕСО-7 – Кафедра ПСОН – НТУУ "КПІ"

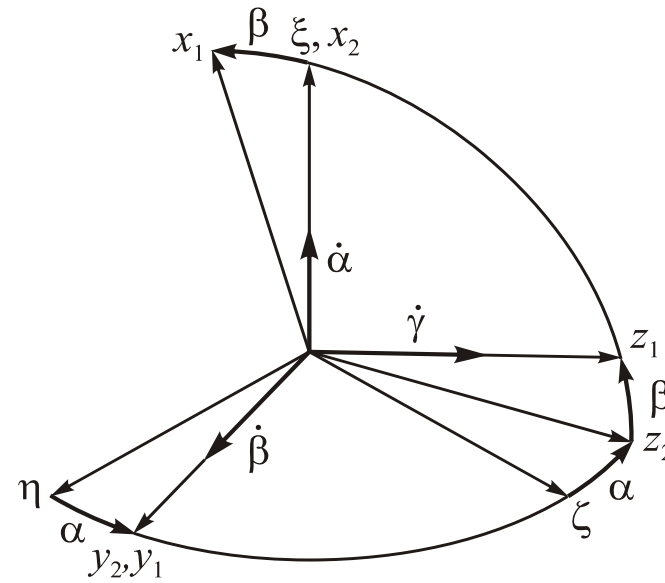
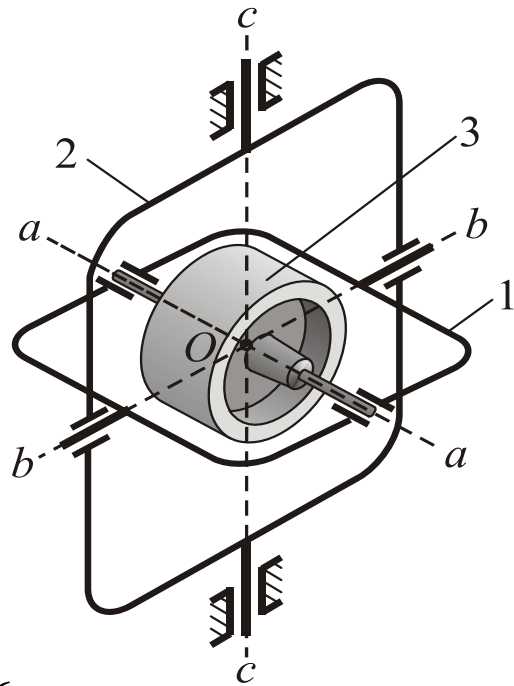
*Рівняння руху ГМ на нерухомій основі  
у кутах Ейлера*



$$\left\{ \begin{array}{l} J'_e \ddot{\psi} \sin^2 \vartheta + 2J'_e \dot{\psi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta - H \dot{\vartheta} \sin \vartheta = M_\xi - M_X \cos \vartheta \\ J'_e \ddot{\vartheta} - J'_e \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + H \dot{\psi} \sin \vartheta = mgl \sin \vartheta + M_Y \\ \frac{dH}{dt} = M_X \end{array} \right.$$

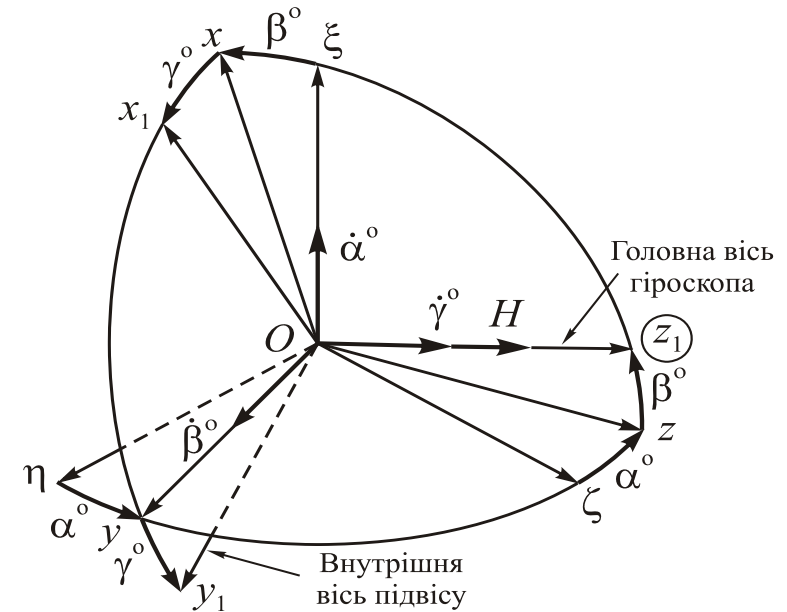


## Рівняння руху ГКП на нерухомій основі



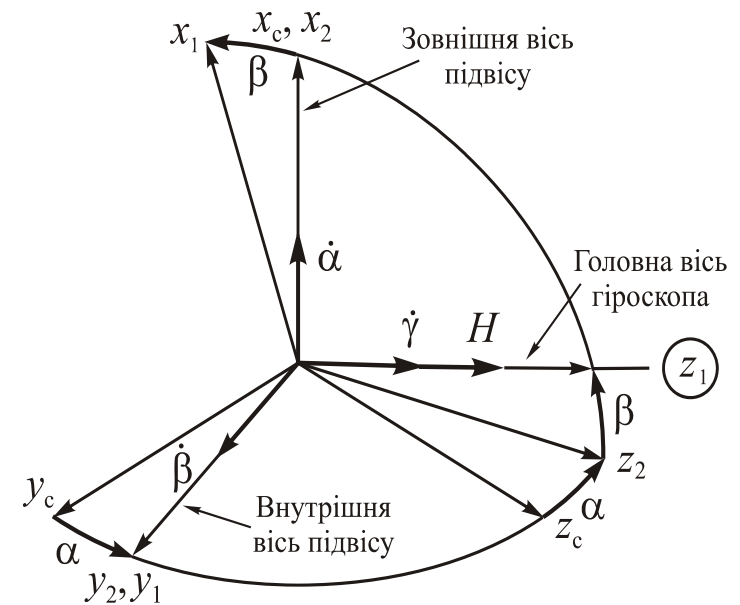
$$\left\{ \begin{aligned} (J_1 + J_2 \cos^2 \beta) \ddot{\alpha} - 2J_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + H \dot{\beta} \cos \beta &= N - R \sin \beta \\ J_3 \ddot{\beta} + J_2 \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H \dot{\alpha} \cos \beta &= L \\ \frac{dH}{dt} &= R + M_{st} \end{aligned} \right.$$

# Прецесійні рівняння руху ГКП на рухомій основі в опорних координатах



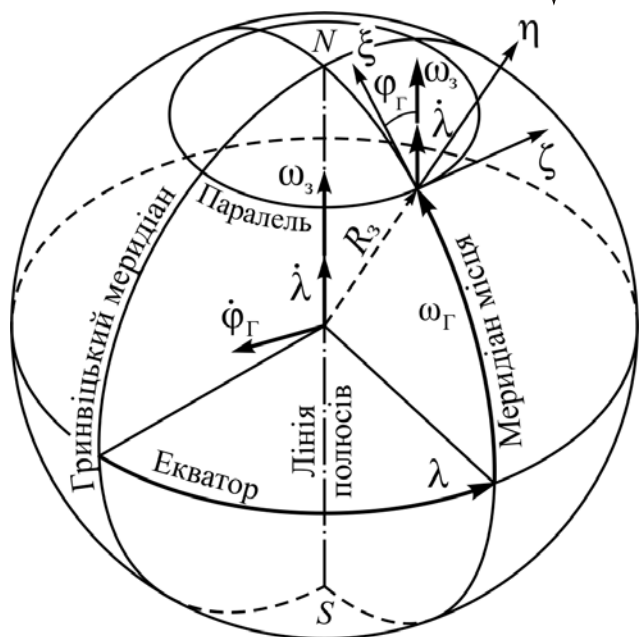
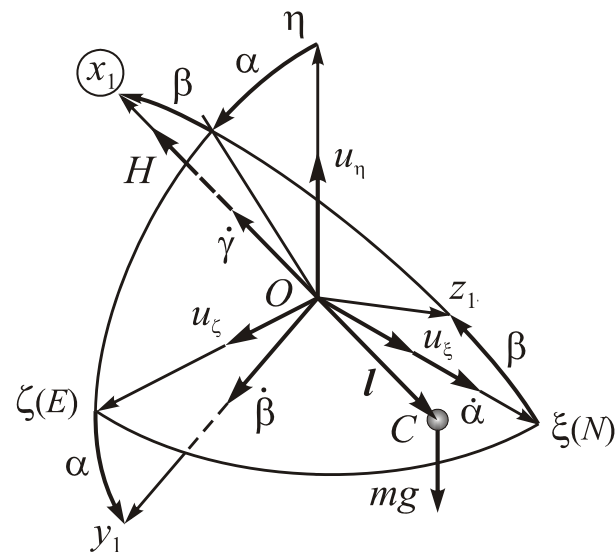
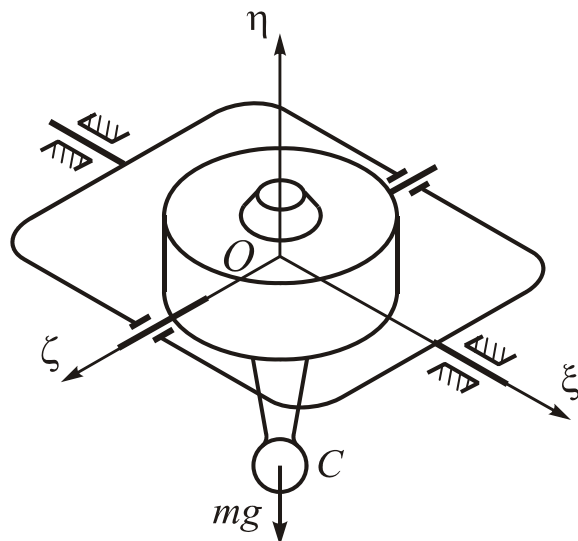
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha^o}{dt} &= -u_\xi + (u_\zeta \cos \alpha^o - u_\eta \sin \alpha^o) \operatorname{tg} \beta^o - \frac{L}{H \cos \beta^o} \cos \gamma^o - \frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta^o \cos \beta} \sin \gamma^o \\ \frac{d\beta^o}{dt} &= -(u_\eta \cos \alpha^o + u_\zeta \sin \alpha^o) - \frac{L}{H} \sin \gamma^o + \frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta} \cos \gamma^o \\ \frac{dH}{dt} &= R + M_{st} \end{aligned} \right.$$

# Прецесійні рівняння руху ГКП на рухомій основі у відносних координатах



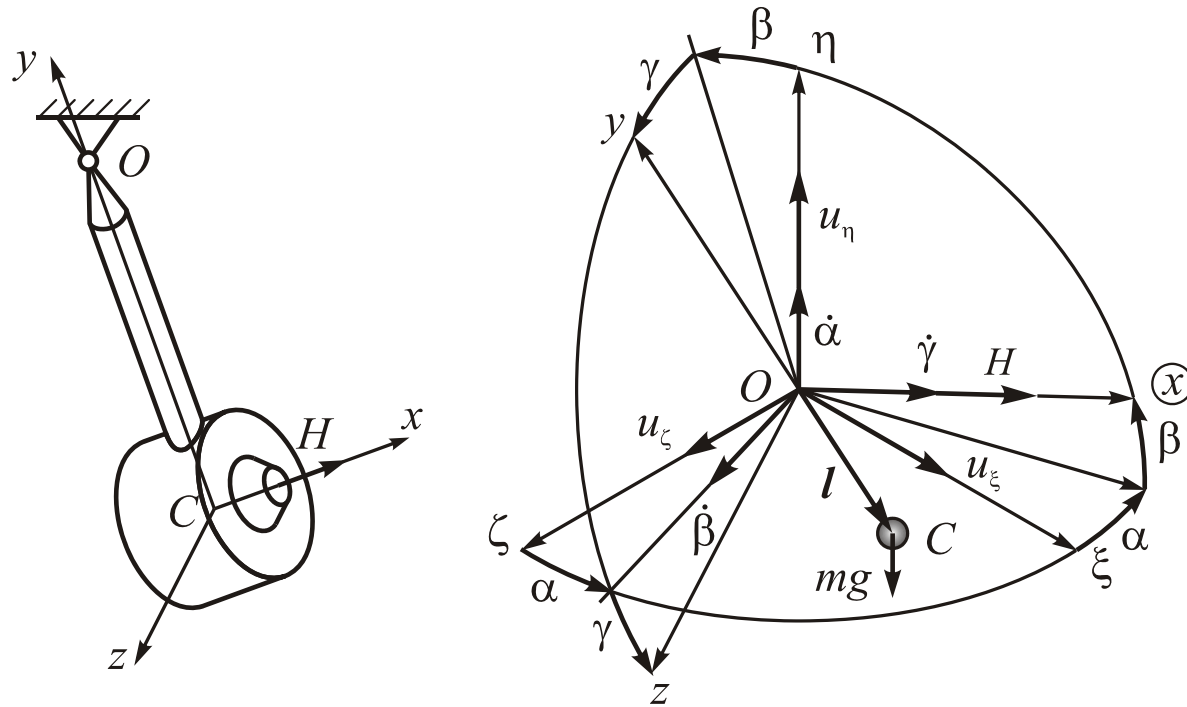
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -u_{x_c}^c + (u_{z_c}^c \cos \alpha - u_{y_c}^c \sin \alpha) \operatorname{tg} \beta - \frac{L}{H \cos \beta} \\ \frac{d\beta}{dt} &= -(u_{y_c}^c \cos \alpha + u_{z_c}^c \sin \alpha) + \frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta} \\ \frac{dH}{dt} &= R + M_{st} \end{aligned} \right.$$

# Прецесійні рівняння руху ГМ на рухомій основі



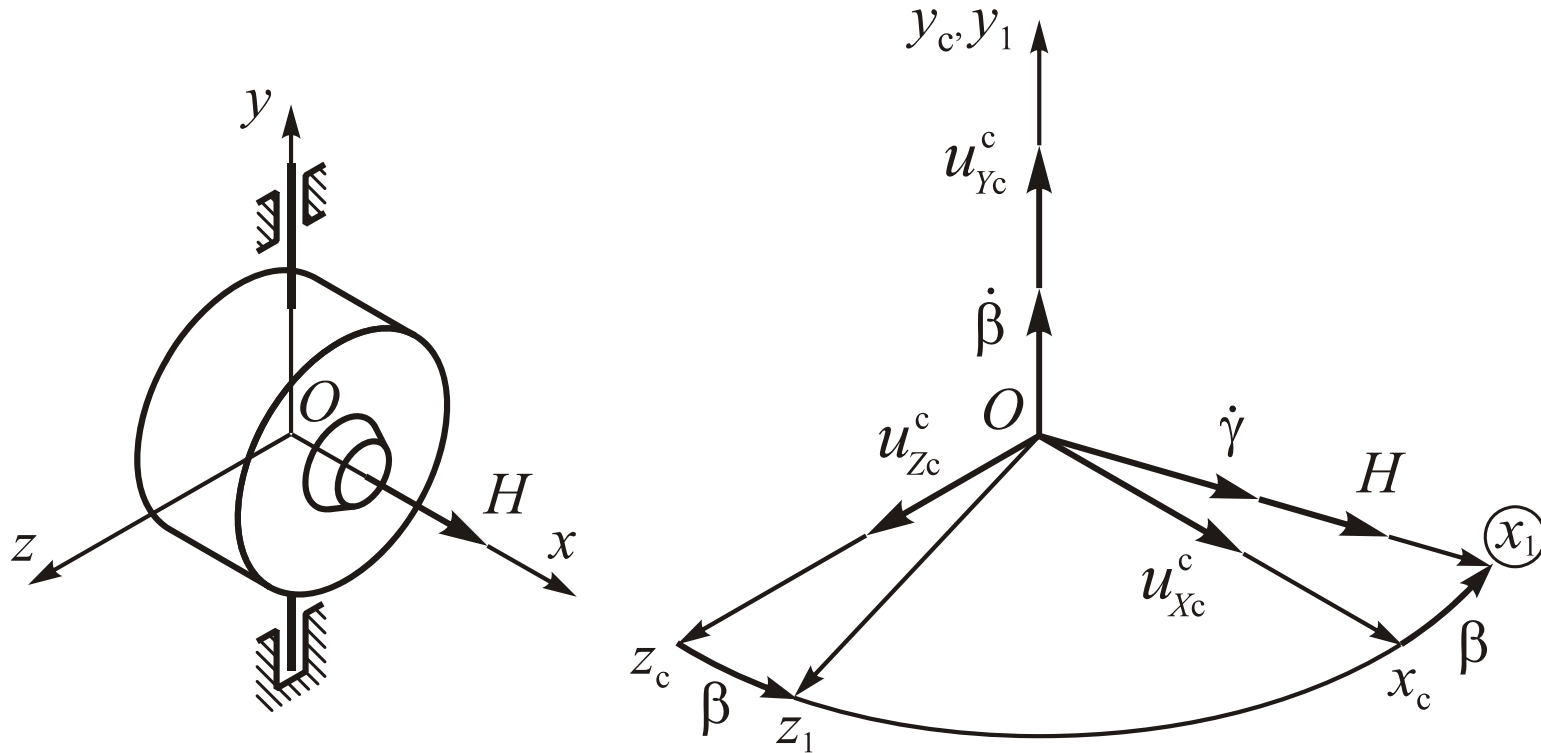
$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} + \omega'_0 \beta = -\frac{V_{aE}}{R_3} - \omega_0 \frac{\dot{V}_{aN}}{g} + \frac{M_{Y1}}{H} \\ \frac{d\beta}{dt} - \omega'_0 \alpha = \frac{V_{aN}}{R_3} - \omega_0 \frac{\dot{V}_{aE}}{g} - \frac{M_{\xi}}{H} \end{cases}$$

# Прецесійні рівняння руху МГК на рухомій основі



$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} - \left( \frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos\varphi_g + \frac{V}{R_3} \sin K \right) \beta &= -\omega_3 \sin\varphi_g + \frac{V}{R_3} \sin K \operatorname{tg}\varphi_g + \frac{ml}{H} (w_\xi - w_\zeta \alpha) - \frac{M_{z1}}{H} \\ \frac{d\beta}{dt} + \left( \omega_3 \cos\varphi_g + \frac{V}{R_3} \sin K \right) \alpha &= \frac{V}{R_3} \cos K + \frac{ml}{H} (w_\zeta \beta + w_\xi \gamma) + \frac{M_\eta}{H} \\ \gamma &= \frac{w_\zeta}{g} \end{aligned} \right.$$

## Рівняння руху ДГ на рухомій основі



$$J_1(\ddot{\beta} + \dot{u}_{y_c}^c) + [H - J_2(u_{x_c}^c \cos \beta - u_{z_c}^c \sin \beta)] \cdot (u_{z_c}^c \cos \beta + u_{x_c}^c \sin \beta) = M_{y_1}$$

## Параметри планет

Гравітаційна стала  $\gamma = 6,6738 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг с}^2)$

### Планети земної групи

Параметр	Меркурій	Венера	Земля	Місяць	Марс
Радіус поверхні, км	2440	6052	6378	1737	3397
Середня густина, кг/м <sup>3</sup>	5 430	5 240	5 515	3 340	3 940
Маса, кг	$3,3 \cdot 10^{23}$	$4,869 \cdot 10^{24}$	$5,9742 \cdot 10^{24}$	$7,35 \cdot 10^{21}$	$6,42 \cdot 10^{23}$
Прискорення сили тяжіння, м/с <sup>2</sup>	3,726	8,826	9,8062	1,667	3,726
Період власного обертання, діб (с)	58,6462 ( $5,067 \cdot 10^6$ )	243,0185 ( $2,1 \cdot 10^7$ )	0,99726963 ( $8,6164 \cdot 10^4$ )	27,321661 ( $2,3606 \cdot 10^6$ )	1.02595675 ( $8,8643 \cdot 10^4$ )
Радіус орбіти, км	$5,791 \cdot 10^7$	$1,08 \cdot 10^8$	$1,4946 \cdot 10^8$	$384,4 \cdot 10^3$	$2,28 \cdot 10^8$
Період обігу орбіти, діб (с)	87,969 ( $7,60 \cdot 10^6$ )	224,7 ( $1,9414 \cdot 10^7$ )	365,26 ( $3,1558 \cdot 10^7$ )	27,396 ( $2,3606 \cdot 10^6$ )	686,94 ( $5,9352 \cdot 10^7$ )

### Газові гіганти

Параметр	Юпітер	Сатурн	Уран	Нептун
Радіус поверхні, км	71 492	60 268	25 559	24 764
Середня густина, кг/м <sup>3</sup>	1 326	687	1 270	1 638
Маса, кг	$1,8988 \cdot 10^{27}$	$5,685 \cdot 10^{26}$	$8,663 \cdot 10^{25}$	$1,028 \cdot 10^{26}$
Прискорення сили тяжіння, м/с <sup>2</sup>	24,81	10,4	8,83	11,18
Період власного обертання, діб (с)	0,41354 ( $3,573 \cdot 10^4$ )	0,44401 ( $3,836 \cdot 10^4$ )	0,71833 ( $6,206 \cdot 10^4$ )	0,67125 ( $5,8 \cdot 10^4$ )
Радіус орбіти, км	$7,786 \cdot 10^8$	$14,34 \cdot 10^8$	$28,7 \cdot 10^8$	$44,9 \cdot 10^8$
Період обігу орбіти, діб (с)	4 334,6 ( $3,7451 \cdot 10^8$ )	10 835,3 ( $9,3617 \cdot 10^8$ )	30 697,8 ( $26,523 \cdot 10^8$ )	60 079,0 ( $51,908 \cdot 10^8$ )