

УДК 531.383

СОУДАРЕНИЕ РАМОК КАРДАНОВОГО ПОДВЕСА ГИРОСКОПА

Лазарев Ю. Ф., Национальный технический университет Украины "КПИ", г. Киев, Украина

Рассмотрен теоретически и промоделирован процесс соударения рамок карданового подвеса гироскопа при вращении основания с постоянной угловой скоростью. Выведены формулы, позволяющие оценивать величину силы, действующей на упоры. Показана их удовлетворительная сходимость с результатами моделирования. Даны рекомендации по уменьшению силы соударения и ее влияния на прочность упоров.

Ключевые слова: гироскоп в кардановом подвесе, соударение рамок, динамика, прочность, моделирование

Введение

При проектировании приборов на основе трехстепенного гироскопа в кардановом подвесе предусматриваются меры для исключения возможности совмещения в процессе эксплуатации плоскостей рамок подвеса, так как при этом гироскоп теряет свою работоспособность. Чаще всего для этого используются упоры, ограничивающие относительный поворот рамок. При этом иногда возможны случаи, когда вне условий эксплуатации может произойти соударение рамок. Например, по окончании работы беспилотного транспортного средства (объекта) при испытаниях, когда движение объекта становится неуправляемым, и объект начинает вращаться вокруг продольной оси, а ротор гироскопа продолжает вращаться по инерции, возможно соударение рамок подвеса через упоры. Как показала практика, возникающие при таком соударении силы могут быть настолько значительными, что приводят к разрушению упоров, а, значит, к непригодности гироприбора для дальнейшего использования. Поэтому актуальной является задача построения теоретической модели процесса соударения рамок и выявления конструктивных мер, обеспечивающих уменьшение величин сил, возникающих в упорах.

Решение такой задачи не имеет аналогов в известной автору литературе. Обычно задачи, связанные с движением гироскопов, посвящены изучению его движения при сравнительно малых значениях внешних сил, не приводящих к значительным поворотам главной оси гироскопа. В поставленной же задаче поворот главной оси гироскопа за малый промежуток времени происходит на весьма значительные углы (порядка 180°), что значительно усложняет теоретическое изучение движения.

В статье сделана попытка решения этой задачи, используя для уточнения модели движения по одной из координат предварительное программное моделирование поведения гироскопа в описанных условиях.

1. Постановка задачи

Пусть гироскоп в кардановом подвесе (ГКП) установлен на основании, вращающемся с постоянной угловой скоростью U вокруг неподвижной в инер-

циальному пространстві осі, котра в початковий момент часу збігається з положенням внутрішньої осі карданового підвеса. Для розглянутої задачі рівняння руху ГВП можна використати в такій наближеній формі:

$$\begin{cases} (J_1 + J_2 \cos^2 \beta) \dot{\omega}_x + H \omega_y \cos \beta = 0 \\ J_3 \dot{\omega}_y - H \omega_x = L \end{cases}, \quad (1)$$

де позначено

$$\omega_x = \dot{\alpha} \cos \beta + U \sin \alpha \sin \beta; \quad \omega_y = \dot{\beta} + U \cos \alpha; \quad \omega_z = \dot{\alpha} \sin \beta - U \sin \alpha \cos \beta; \quad (2)$$

α – кут повороту зовнішньої рамки відносно основи; β – кут повороту внутрішньої рамки відносно зовнішньої; J_1, J_2, J_3 – моменти інерції гіроскопа; H – кінетический момент гіроскопа;

$$L = -c_u (\beta - \beta_u) - f_u \dot{\beta}; \quad (|\beta| \geq |\beta_u|)$$

момент сили, накладується на внутрішню рамку з боку упору, коли кут повороту β перевищує за величиною кут β_u , при якому відбувається зіткнення упорів; c_u – кутова жорсткість упору відносно внутрішньої осі підвеса; f_u – кутовий коефіцієнт демпфування в упорі.

Проблема інтегрування рівнянь (1) і (2) в зазначених умовах стоїть в наступному:

- 1) в процесі зіткнення кут α повороту зовнішньої рамки відносно основи змінюється в великому діапазоні (від 0° до 180°), тому неможливо використати лінійні рівняння;
- 2) пружна зв'язь через упори є нестійкою, що робить неможливим аналітичне рішення рівнянь (1) в випадках, коли в процесі зіткнення відбувається «відрив» упорів один від одного; а такі режими не виключені.

Попередньо уточнимо характер руху гіроскопа при зіткненні. Для цього використаємо програмну модель, що виконує чисельне інтегрування рівнянь (1) і (2).

2. Попереднє моделювання

Чисельне інтегрування виконано в середі Matlab з допомогою програми SoudarenyeSR.m. На рис. 1 представлено результати моделювання для таких значень параметрів гіроскопа і руху основи, близьких до реальних (c – лінійна жорсткість упору, l – плече упору відносно внутрішньої осі підвеса):

$$\begin{aligned} H &= 10 \text{ Н м с}; & J_1 = J_2 = J_3 &= 1 \cdot 10^{-3} \text{ Н м с}^2; & \beta_u &= 75^\circ; \\ U &= -1 \text{ с}^{-1}; & c &= 1 \cdot 10^5 \text{ Н/м}; & l &= 5 \text{ см}; & c_u &= cl^2 = 250 \text{ Н м}. \end{aligned}$$

З результатів моделювання випливає наступне.

1. Процес зіткнення триває незначительний проміжок часу ($\tau = 0,302 \text{ с}$), який набагато більше періоду нутаційних

колебаний ($T_\lambda = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{H} \sqrt{\frac{J_3(J_1 + J_2 \cos^2 \beta_u)}{\cos \beta_u}} = 1,3 \cdot 10^{-3}$ с) и парциального периода колебаний гироскопа с упругим упором ($T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi\sqrt{J_3}}{\sqrt{c_u}} = 0,0126$ с), но меньше периода вращения основания ($T_U = \frac{2\pi}{U} = 6,28$ с).

2. Зависимость деформации упора (а, значит, – и угла $\Delta\beta = \beta - \beta_u$ и силы сопротивления со стороны упора) от времени напоминает половину синусоиды и может быть аппроксимирована формулой $\Delta\beta(t) = -\beta_m \sin(\omega_u t) \text{sign}(U)$, ($\beta_m > 0$), (3)

где

$$\omega_u = \frac{\pi}{\tau}$$

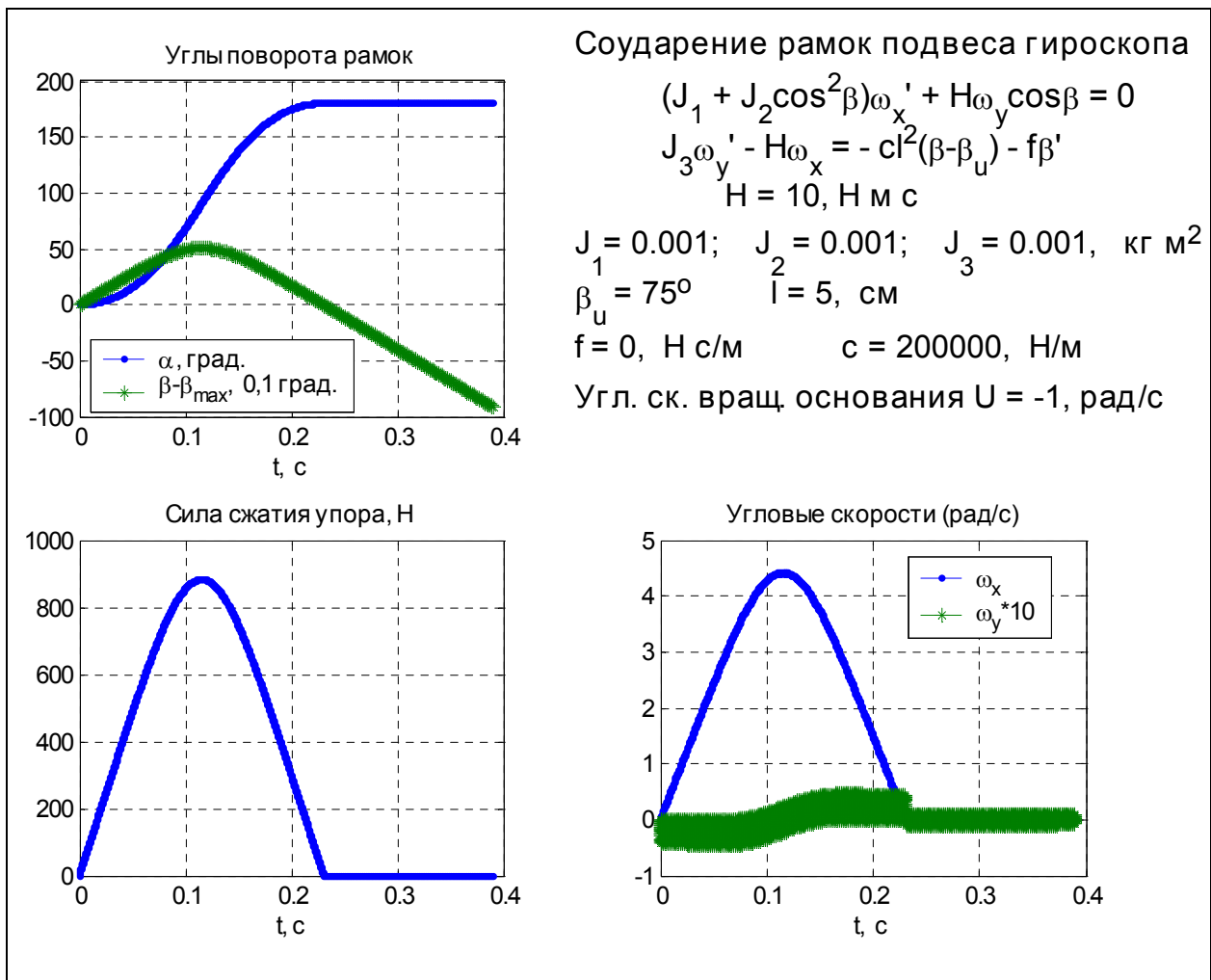


Рис. 1. Результат моделирования процесса соударения рамок

3. За время соударения гироскоп успевает повернуться вокруг наружной оси подвеса на угол, равный 180° . Максимум деформации и силы наблюдается в момент времени, когда поворот гироскопа вокруг этой оси составляет 90° .
4. При соударении угловая скорость $\dot{\beta}$ поворота внутренней рамки карданового подвеса относительно наружной изменяется от $(-U)$ в начальный момент времени (при $t = 0$) до нуля при $t = \frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{2\omega_u}$, когда достигается максимум деформации упора и силы сопротивления, а затем до U в момент $t = \tau = \frac{\pi}{\omega_u}$ окончания соударения.

3. Теоретическое исследование

Сделанные наблюдения достаточны, чтобы установить приближенные зависимости максимальной силы и длительности соударения от параметров гироскопа, упора и вращения основания.

Для этого допустим, что угол поворота гироскопа вокруг внутренней оси подвеса вследствие деформации упора при соударении изменяется во времени по закону (3). В этом случае можно приближенно полагать, что угловая скорость поворота гироскопа вокруг внутренней оси подвеса изменяется во времени по закону:

$$\dot{\beta}(t) = \frac{d\Delta\beta(t)}{dt} = -\beta_m \omega_u \cos(\omega_u t) \text{sign}(U) = -\frac{M_m}{c_u} \omega_u \cos(\omega_u t) \text{sign}(U), \quad (4)$$

где

$$M_m = F_m l$$

– максимальное значение момента силы сопротивления упора; F_m – максимальное значение силы сжатия упора при соударении. Как было установлено ранее, в начальный момент эта скорость равна $(-U)$. Поэтому из (4) следует первое соотношение, связывающее две неизвестные F_m и ω_u :

$$\boxed{\frac{M_m}{c_u} \omega_u = |U|}. \quad (5)$$

Уравнения (1) в пренебрежении демпфированием и предположении малости изменения угла β в процессе соударения приобретают вид

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x + \frac{H \cos \beta_u}{J_1 + J_2 \cos^2 \beta_u} \omega_y = 0 \\ \dot{\omega}_y - \frac{H}{J_3} \omega_x = \frac{c_u}{J_3} \cdot \beta_m \sin(\omega_u t) \text{sign}(U) \end{cases}$$

Исключая переменную ω_y , приведем эту систему к одному уравнению относительно одной переменной ω_x :

$$\ddot{\omega}_x + \lambda^2 \omega_x = -\lambda^2 a_m \sin(\omega_u t) \text{sign}(U).$$

Здесь обозначено:

$$\lambda = H \sqrt{\frac{\cos \beta_u}{J_3(J_1 + J_2 \cos^2 \beta_u)}}; \quad a_m = \frac{M_m}{H}.$$

Решение этого уравнения таково:

$$\omega_x = -\frac{\lambda^2 a_m}{\lambda^2 - \omega_u^2} \left(\sin \omega_u t - \frac{\omega_u}{\lambda} \sin \lambda t \right) \text{sign}(U),$$

из чего следует

$$\omega_y = \frac{\omega_u}{\lambda^2 - \omega_u^2} \frac{M_m}{J_3} (\cos \omega_u t - \cos \lambda t) \text{sign}(U).$$

Первое соотношение в совокупности с (1) приводит к уравнению

$$\dot{\alpha} \cos \beta + U \sin \alpha \sin \beta = -\frac{\lambda^2 a_m}{\lambda^2 - \omega_u^2} \left(\sin \omega_u t - \frac{\omega_u}{\lambda} \sin \lambda t \right) \text{sign}(U).$$

Так как $\omega_u \ll \lambda$, а угол β изменяется незначительно при соударении, то приближенно можно это уравнение на такое приближенное ($\beta_u > 0$)

$$\dot{\alpha} \cos \beta_u - |U| \sin \alpha \sin \beta_u = -a_m \sin \omega_u t \cdot \text{sign}(U). \quad (6)$$

Будем искать приближенное решение уравнения (6) в виде

$$\dot{\alpha} = -A \sin \omega_u t \cdot \text{sign}(U); \quad (A > 0).$$

Из этого следует

$$\alpha = -\frac{A}{\omega_u} (1 - \cos \omega_u t) \text{sign}(U). \quad (7)$$

За время соударения угол поворота гироскопа вокруг внешней оси подвеса изменится, как было установлено раньше, на $180^\circ = \pi$. Из (15) следует в соответствии с этим, что

$$\frac{A}{\omega_u} = \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

Для того, чтобы найти величину A в уравнении (6), зависимость угла α от времени $\alpha = -\frac{\pi}{2} (1 - \cos \omega_u t) \text{sign}(U)$ заменим на приближенную линейную зависимость $\alpha = -\omega_u t \cdot \text{sign}(U)$, которая совпадает с реальной в точках $t = 0, \frac{\tau_u}{2}, \tau_u$. Тогда уравнение (6) дает следующее выражение для определения A :

$$A = \frac{1}{\cos \beta_u} \left(\frac{M_m}{H} + |U| \sin \beta_u \right),$$

или, с учетом (16)

$$\omega_u = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\cos \beta_u} \left(\frac{M_m}{H} + |U| \sin \beta_u \right) \quad (9)$$

Итак, имеем два соотношения (5) и (9) для определения двух неизвестных M_m и ω_u .

Исключая M_m , получим квадратное уравнение

$$\omega_u^2 - \frac{2}{\pi} |U| \operatorname{tg} \beta_u \omega_u - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\cos \beta_u} \frac{c_u}{H} |U| = 0, \quad (10)$$

откуда можно определить длительность ударного импульса. Ему будет соответствовать наибольший корень уравнения (10):

$$\tau_u = \frac{\pi}{\omega_u^*}; \quad \omega_u^* = \frac{1}{\pi} |U| \operatorname{tg} \beta_u + \sqrt{\frac{1}{\pi^2} U^2 \operatorname{tg}^2 \beta_u + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\cos \beta_u} \frac{c_l^2}{H} |U|}.$$

Из (5) теперь найдем выражение для максимальной силы, действующей на упор при соударении

$$F_m = \frac{c_u}{l \omega_u^*} |U| = \frac{c_l}{\omega_u^*} |U| = \frac{\tau_u}{\pi} c_l |U|.$$

Таковы искомые формулы для определения длительности ударного импульса и максимальной силы при соударении.

4. Сопоставление теоретических результатов с результатами моделирования

Определим, как изменяются главные характеристики соударения – максимальная сила F_m в упоре и длительность соударения τ - при изменении: 1) жесткости упора; 2) кинетического момента гироскопа; 3) угловой скорости основания. Задачей является сопоставление результатов, полученных расчетом по найденным теоретическим формулам и полученных путем численного интегрирования дифференциальных уравнений движения гироскопа. Результаты представлены на рис. 2. Из них вытекает удовлетворительное совпадение теоретических результатов с результатами моделирования.

Особенно интересно проследить на модели, как изменяется картина соударения при уменьшении кинетического момента гироскопа (что и происходит на практике, так как гироскоп находится в режиме выбега). На рис. 3 показаны результаты моделирования при $H = 0,1$ Н м с. Эти результаты не могут быть получены теоретически, так как упругая связь через упоры является не удерживающей.

Как видим, в этом случае наблюдается значительно повышающаяся роль высокочастотных колебаний силы упора, период которых совпадает с периодом нутационных колебаний гироскопа (около 100 Гц). В результате гироскоп испытывает действие не плавно меняющейся по величине силы в течение всей длительности соударения, а ряд значительно более частых следующих один за

другим ударом чрезвычайно малой длительности (порядка 5 миллисекунд) и достаточно больших по амплитуде (до 45 Н при $H = 0,2 \text{ Н м с}$). Именно такой режим соударения является наиболее опасным и его следует избегать.

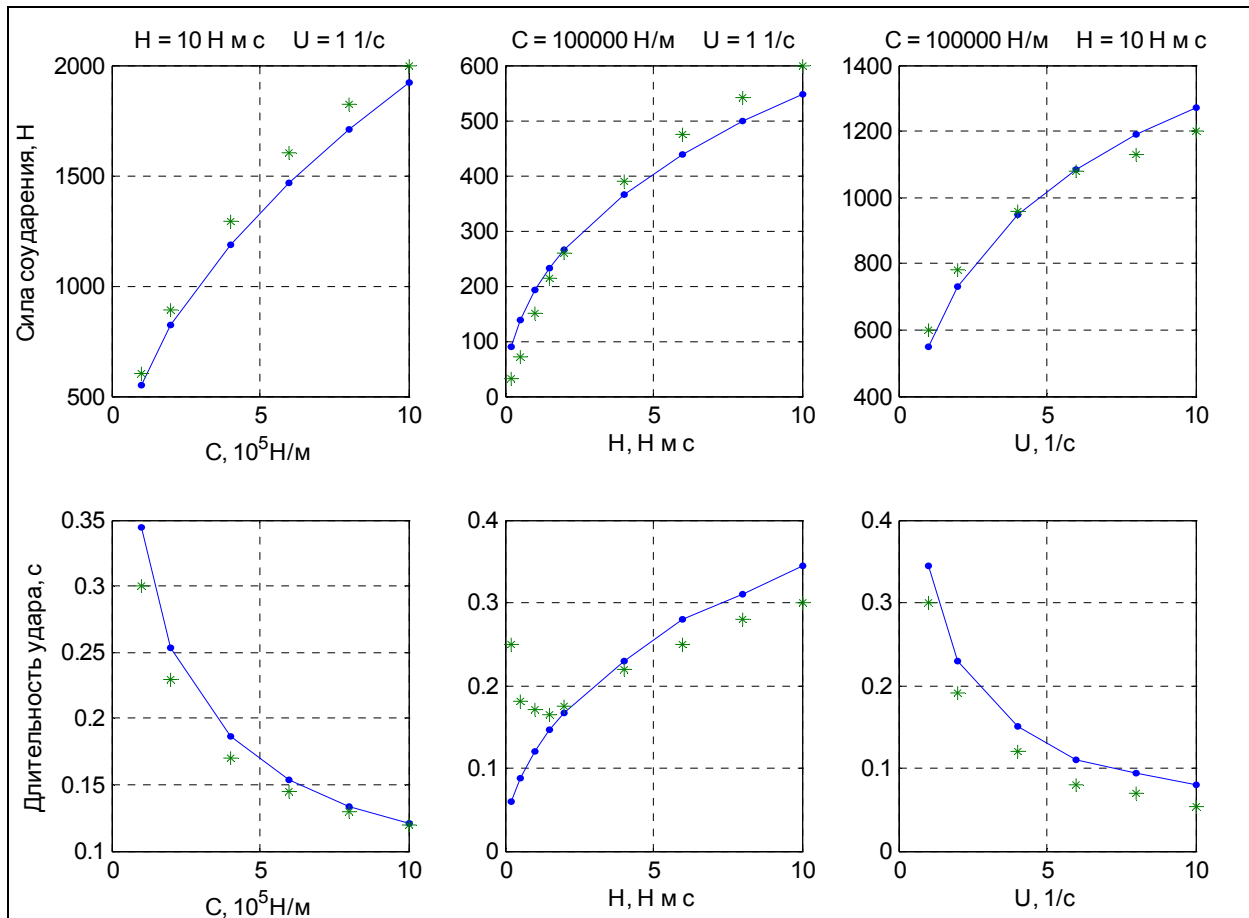


Рис. 2. Сопоставление результатов расчета по формулам и моделирования
 —●— — теория; * — моделирование

На рис. 4 показан результат учета демпфирования в упоре. Из него следует, что введение демпфирования позволяет избежать этого опасного явления и одновременно уменьшить величину максимальной силы соударения.

Выводы

1. Полученные теоретические формулы удовлетворительно качественно и количественно отображают процесс соударения рамок карданового подвеса гироскопа при вращении основания и могут быть использованы при проектировании гироскопических приборов. Однако при малых значениях кинетического момента гироскопа, когда амплитуда возникающих нутационных колебаний становится настолько значительной, что происходит многочисленные отрывы гироскопа от упора в процессе соударения, полученными формулами пользоваться нельзя, так как в этом случае связь рамок карданового подвеса становится неустойчивой.

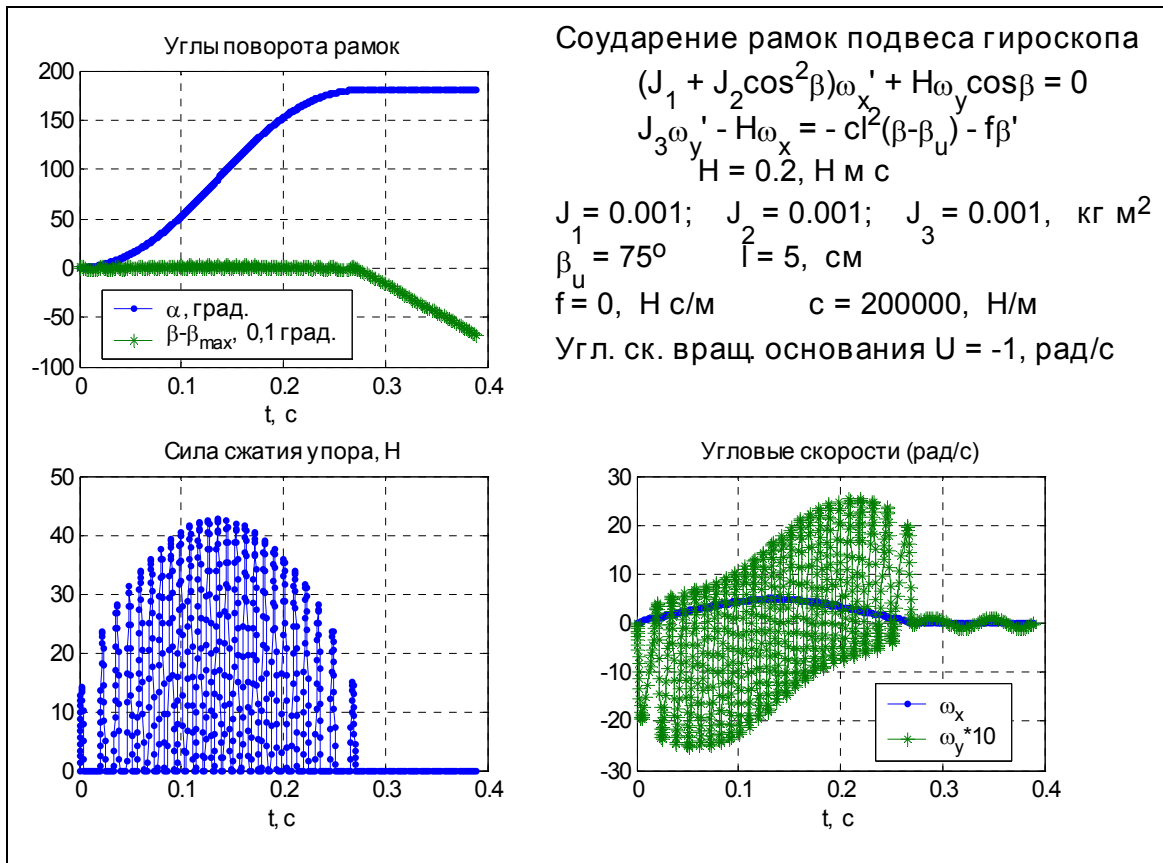


Рис. 3. Малый кинетический момент гироскопа

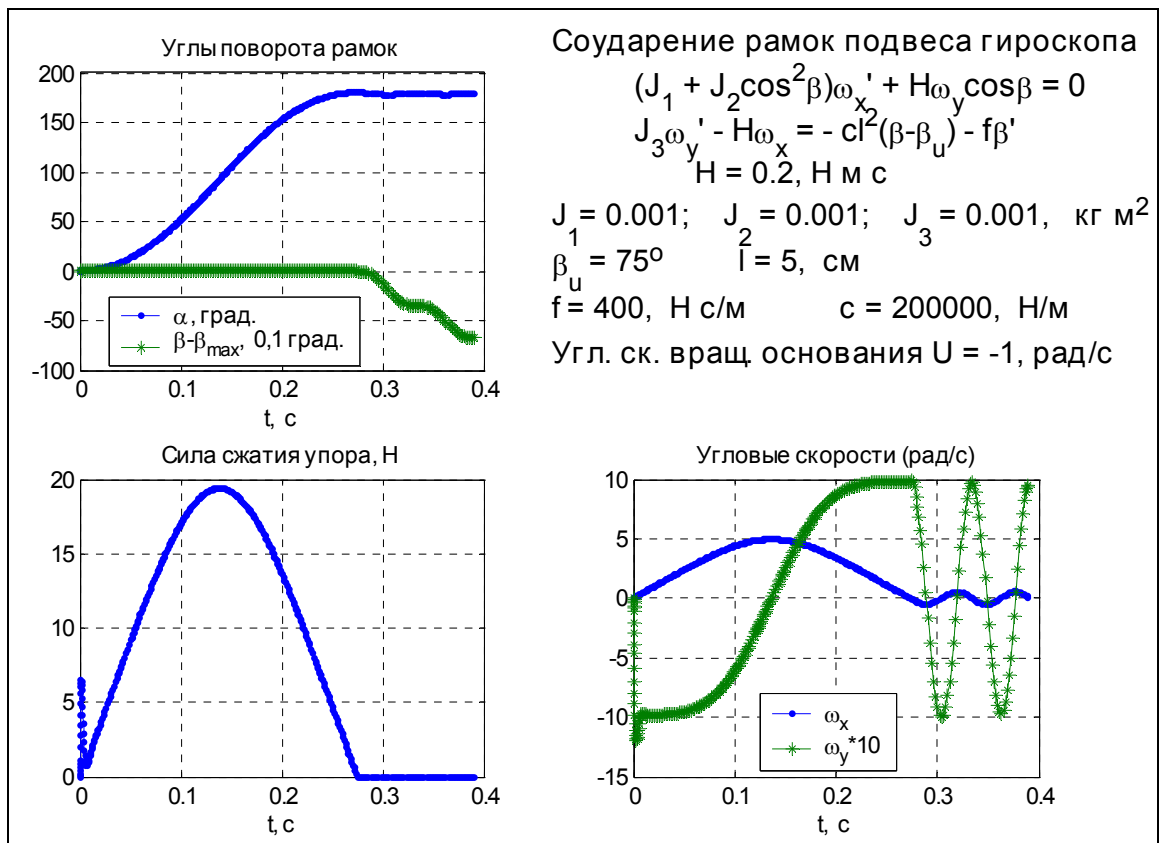


Рис. 4. Влияние демпфирования в упорах

2. Главным фактором уменьшения силы соударения является уменьшение жесткости упоров. Уменьшение жесткости упора в 10 раз приводит к уменьшению силы соударения в 3,5 раза.
3. Наиболее опасным соударение становится при малом значении кинетического момента, что типично для рассматриваемых режимов. В этом случае соударение представляет собой ряд следующих друг за другом силовых ударов чрезвычайно малой длительности и достаточно больших по амплитуде. Эффективным способом борьбы с этим явлением является усиление демпфирующих свойств упора.
4. Полученные результаты могут быть полезными для проектирования гироскопических приборов.
5. Изложенный метод теоретического исследования путем предварительного определения основных характеристик движения программным моделированием полных уравнений может быть с успехом использован в теории гироскопических приборов и устройств, инерциальной ориентации и навигации.

<p>Лазарев Ю. Ф.</p> <p>Зіткнення рамок карданового підвісу гіроскопа</p> <p>Розглянуто теоретично і промодельовано процес зіткнення рамок карданового підвісу гіроскопа за обертання основи з постійною кутовою швидкістю. Виведено формули, які дозволяють оцінювати величину сили, що діє на упори. Показана їх задовільна збіжність з результатами моделювання. Надані рекомендації щодо зменшення сили зіткнення і її впливу на міцність упорів.</p> <p>Ключові слова: гіроскоп в кардановому підвісі, зіткнення рамок, динаміка, міцність, моделювання</p>	<p>Lazarev, Yu F.</p> <p>The collision framework gimbals of the gyroscope</p> <p>The theoretical and simulated collision process framework gimbals of the gyroscope by rotating basis with a constant angular velocity. We derive a formula to measure the force acting on the stop. Shown them satisfactorily converge with the simulation results. Recommendations to reduce the impact force and its influence on the strength of stops.</p> <p>Keywords: gyroscope on gimbals, the collision of frames, dynamics, durability, modeling</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------