

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Кафедра приладів і систем орієнтації і навігації

Ю. Ф. Лазарєв

Кінематика твердого тіла

(оновлене і виправлене видання)

Київ – НТУУ "КПІ" – 2014

УДК 531.1

Відповідальний редактор

БУРАУ Надія Іванівна, д. т. н., професор,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Лазарєв Ю. Ф.

Л17

Кінематика твердого тіла [електронний ресурс]: навчальний посібник. – К.: НТУУ "КПІ", 2014. – 61 с.

Докладно розглянуті математичні моделі поворотів, кутових швидкостей твердого тіла, швидкостей і прискорень точок твердого тіла, які використовуються у практиці проектування приладів і систем орієнтації та навігації наземних і космічних об'єктів.

Для студентів технічних вищих навчальних закладів. Може бути корисним аспірантам і інженерам, спеціалістам у галузі проектування повітряних і космічних рухомих транспортних засобів та їх навігаційного і пілотажного обладнання.

Зміст

ПЕРЕДМОВА	4
ВСТУП	5
1. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ І МАТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ.....	6
1.1. ОСНОВИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ	6
1.2. ФОРМИ ПОДАННЯ ВЕКТОРІВ.....	7
1.2.1. Координатна форма подання вектора	8
1.2.2. Деякі положення алгебри матриць	8
1.2.3. Матричне подання векторів	11
1.2.4. Векторно-координатна форма подання вектора.....	12
1.3. ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ У РІЗНИХ ФОРМАХ ПОДАННЯ.....	13
2. ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ ТІЛА У ПРОСТОРИ. МАТРИЦЯ НАПРЯМНИХ КОСИНУСІВ. КУТИ ЕЙЛЕРА.....	16
2.1. МАТРИЦЯ НАПРЯМНИХ КОСИНУСІВ.....	16
2.2. КУТИ ЕЙЛЕРА-КРИЛОВА	20
2.3. ПОДАННЯ МНК ЧЕРЕЗ КУТИ ЕЙЛЕРА-КРИЛОВА	22
3. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПОДАННЯ ТА СКЛАДАННЯ ПОВОРОТІВ ТІЛА У ПРОСТОРИ.....	25
3.1. МАТРИЦІ НАПРЯМНИХ КОСИНУСІВ	26
3.2. ТЕОРЕМА ЕЙЛЕРА.....	28
3.3. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ПРО КВАТЕРНІОНИ	29
3.4. ПОДАННЯ КВАТЕРНІОННОГО МНОЖЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТРИЧНИХ ОПЕРАЦІЙ	32
3.5. ПОДАННЯ ПОВОРОТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАТЕРНІОНІВ	32
3.6. ВЕКТОР ПОВОРОТУ ГІББСА.....	37
3.7. ВЕКТОР СКІНЧЕННОГО ПОВОРОТУ (РОДРІГА).....	39
3.8. ВЕКТОР ОРІЄНТАЦІЇ (ЕЙЛЕРА).....	41
3.9. ВИСНОВКИ	41
4. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПОДАННЯ КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ ТІЛА	41
4.1. ПРАВИЛО ДИФЕРЕНЦІОВАННЯ ВЕКТОРА У РУХОМІЙ СИСТЕМІ ВІДЛІКУ	42
4.2. КІНЕМАТИЧНІ РІВНЯННЯ ПУАССОНА	44
4.3. КІНЕМАТИЧНІ РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА	45
4.4. КІНЕМАТИЧНІ РІВНЯННЯ У КВАТЕРНІОНАХ.....	45
4.5. МАТРИЧНИЙ АНАЛОГ КВАТЕРНІОННИХ КІНЕМАТИЧНИХ РІВНЯНЬ	48
4.6. КІНЕМАТИЧНІ РІВНЯННЯ ЧЕРЕЗ ВЕКТОР ГІББСА	48
4.7. КІНЕМАТИЧНІ РІВНЯННЯ ЧЕРЕЗ ВЕКТОР РОДРІГА.....	49
4.8. КІНЕМАТИЧНІ РІВНЯННЯ ЧЕРЕЗ ВЕКТОР ЕЙЛЕРА	50
4.9. КІНЕМАТИЧНІ РІВНЯННЯ ОРІЄНТАЦІЇ ШТУЧНОГО СУПУТНИКА ЗЕМЛІ	51
5. КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА	52
5.1. ШВИДКІСТЬ ТОЧКИ РУХОМОГО ТІЛА.....	52
5.2. ШВИДКІСТЬ ПОЛЮСА	53
5.3. ПРИСКОРЕННЯ ТОЧОК ТВЕРДОГО ТІЛА	54
5.4. СКЛАДНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ	55
5.4.1. Абсолютна швидкість точки	56
5.4.2. Абсолютне прискорення точки.....	56
5.5. СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА	57
5.6. ШВИДКОСТІ ТА ПРИСКОРЕННЯ ТОЧОК ТВЕРДОГО ТІЛА У СКЛАДНОМУ ЙОГО РУСІ.....	58
ЛІТЕРАТУРА	60
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	61

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник «Кінематика твердого тіла» призначений для студентів напрямку «Приладобудування» спеціальності «Прилади і системи орієнтації та навігації» і забезпечує окремі розділи навчальних дисциплін «Теоретична механіка», «Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації», «Навігаційні системи», а також курсове і дипломне проектування і теоретичну підготовку спеціалістів і магістрів.

Матеріал посібника містить поглиблене викладення теорії поворотів твердого тіла за допомогою різних математичних подань, що використовуються у практиці проектування інерціальних навігаційних систем (перш за все – безплатформових). Показаний тісний взаємозв'язок між різними формами подання поворотів. Наведені формули, що характеризують переходи від однієї форми до іншої, що є важливим задля побудови програмних засобів для моделювання поведінки приладів і систем орієнтації та автономної навігації. Уточнені деякі формули теорії скінченних поворотів, що наведені у відомій літературі.

Посібник починається з нагадування головних властивостей математичних об'єктів, що лежать в основі математичного опису кінематики механічного руху і більш детального, ніж зазвичай, опису взаємозв'язків між різними формами подання. Цьому присвячений розділ «Елементи векторної і матричної алгебри».

В другому розділі «Визначення положення тіла у просторі» викладаються основи математичного опису положення тіла у просторі за допомогою матриці напрямних косинусів і кутів Ейлера. Описані способи визначення матриці напрямних косинусів через кути Ейлера.

Третій розділ «Математичні моделі подання та складання поворотів тіла у просторі» присвячений викладенню теорії складання поворотів, опису подання складання поворотів через найбільш поширені в інженерній практиці математичні об'єкти, зокрема, вектори орієнтації, Гіббса та Родріга. Особливу увагу приділено поданню поворотів за допомогою кватерніонів, яке визнається наразі одним з найперспективніших для застосування у безплатформових інерціальних навігаційних системах (БІНС).

Математичні моделі подання кутової швидкості тіла описуються в однойменному четвертому розділі. Основне призначення цього розділу, – надання студентам перевірених різних форм подання кінематичних рівнянь, що лежать в основі функціонування БІНС.

Останній розділ «Кінематика твердого тіла» містить відомості про математичний опис швидкостей і прискорень матеріальних точок в її складному русі, який також є важливою складовою функціонування БІНС.

ВСТУП

Проектування систем орієнтації космічних літальних апаратів, безплатформових систем орієнтації і інерціальної навігації потребує створення досконалих алгоритмів визначення поточних кутів орієнтації рухомого об'єкта за вимірними значеннями проекцій кутової швидкості об'єкта. Ці алгоритми можуть побудовані на використанні різних кінематичних параметрів орієнтації – матриці напрямних косинусів, послідовності кутів Ейлера, вектора орієнтації Ейлера, вектора Гіббса, кватерніонів.

Одним з важливих етапів проектування алгоритмів є програмне моделювання системи орієнтації з метою визначення похибок різного типу алгоритмів при заданому русі об'єкта і впливу на них (а також на час і обсяг обчислень) способів подання кінематичних співвідношень. Складання програмної моделі потребує знання співвідношень між різними формами подання поворотів, кінематичних рівнянь, що пов'язують повороти з вимірюваними проекціями кутової швидкості об'єкта на осі, зв'язані з ним.

Кінематичні співвідношення конче потрібні також для складання математичних моделей руху рухомих об'єктів, гіроскопів і гіроскопічних приладів. Тут також стають у нагоді нові ефективні засоби опису поворотів.

Далі наводяться і аналізуються різні форми подання кінематичних параметрів руху матеріальної точки і твердого тіла, необхідні для складання рівнянь руху гіроскопічних приладів і розробки алгоритмів безплатформових систем інерціальної навігації і орієнтації.

1. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ І МАТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ

Основні закони механіки формулюються у векторній формі. Необхідною передумовою переведення їх у скалярну форму є вміння вільно користуватися апаратом векторної й матричної алгебри.

1.1. Основи векторної алгебри

Вектором \mathbf{a} називатимемо деякий об'єкт, який характеризується числом (яке називається довжиною вектора, або його модулем) і напрямком у просторі.

Сумою двох векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} називається третій вектор \mathbf{c} , початок якого збігається з початком першого вектора, а кінець – із кінцем другого вектора за умови, що початок другого вектора суміщено з кінцем першого (правило трикутника або правило паралелограма):

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Скалярний добуток двох векторів є скаляром, величина якого визначається як добуток модулів (довжин) векторів-множників на косинус кута φ між додатними напрямками векторів:

$$d = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi = b \cdot \text{Pr}_b \mathbf{a} = a \cdot \text{Pr}_a \mathbf{b},$$

де $\text{Pr}_a \mathbf{b}$ означає величину прямокутної проекції вектора \mathbf{a} на напрямок вектора \mathbf{b} :

$$\text{Pr}_b \mathbf{a} = a \cdot \cos \varphi.$$

Наслідок 1. Якщо один із векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} є одиничним, їхній скалярний добуток дорівнює величині проекції іншого вектора на напрямок одиничного.

Наслідок 2. Якщо обидва вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} є одиничними, їхній скалярний добуток дорівнює косинусові кута між напрямками цих векторів.

Наслідок 3. Якщо вектори паралельні, їхній скалярний добуток дорівнює добутку довжин цих векторів.

Наслідок 4. Скалярний добуток вектора на себе дорівнює квадратові його довжини:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2.$$

Наслідок 5. Скалярний добуток ортогональних векторів дорівнює нулеві.

Векторний добуток двох векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} визначається як вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, що є перпендикулярним до площини, що містить ці вектори-співмножники, спрямований у бік, із якого найкоротший поворот від першого вектора \mathbf{a} до другого \mathbf{b} ввижається здійснюваним проти годинникової стрілки, і рівний площі паралелограма, побудованого на векторах-співмножниках як на сторонах

$$c = a \cdot b \cdot \sin \varphi.$$

Як випливає з визначення, якщо вектори-співмножники поміняти місцями у векторному добутку, то зміниться лише напрямок вектора \mathbf{c} на протилежний, а величина його залишиться тою самою. Цю властивість векторного добутку називають його *антикомутативністю*.

Наслідок 6. Векторний добуток паралельних векторів дорівнює нулю.

Наслідок 7. Векторний добуток вектора на себе дорівнює нулю.

Наслідок 8. Довжина вектора, що є векторним добутком двох ортогональних векторів, дорівнює добутку довжин векторів-співмножників.

Векторно-скалярний добуток трьох векторів \mathbf{a}, \mathbf{b} та \mathbf{c} є скаляром, який чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах-співмножниках, як на сторонах.

Векторно-скалярний добуток припускає циклічне переставляння:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \quad (1.1)$$

Останні три рівності впливають із комутативності скалярного добутку. Із запису (1.1) випливає, що для векторно-скалярного добутку не має значення, між якими із сусідніх векторів ставити знак векторного добутку, а тому цей знак узагалі не ставлять, і записують векторно-скалярний добуток без усяких знаків у такий спосіб: \mathbf{abc} (або \mathbf{bca} , або \mathbf{cab} , що є еквівалентним записом).

Якщо у зазначених комбінаціях поміняти місцями два сусідніх вектори, одержаний результат змінить свій знак на протилежний:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba}. \quad (1.2)$$

Наслідок 9. Якщо два із трьох векторів паралельні, то їхній векторно-скалярний добуток дорівнює нулю. Зокрема, якщо серед трьох векторів двічі зустрічається той самий, їхній векторно-скалярний добуток дорівнює нулю.

Наслідок 10. Векторно-скалярний добуток трьох взаємноортогональних векторів дорівнює добутку довжин усіх трьох векторів.

Подвійний векторний добуток $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ є вектором, що лежить у площині векторів \mathbf{b} і \mathbf{c} , що перемножуються першими, і тому припускає розкладання по напрямках цих векторів, як складових:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (1.3)$$

Формула (1.3) часто використовується у механіці твердого тіла й теорії гіроскопів. З метою полегшення її запам'ятовування її називають "бац мінус цаб".

Примітки.

1. Подвійний векторний добуток не має навіть властивості асоціативності. Дійсно, розглянемо співвідношення (1.3) за умови, що спочатку перемножуються вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}).$$

Як бачимо, змінилася навіть площина результуючого вектора (раніше це була площина векторів \mathbf{b} і \mathbf{c} , а тепер - площина векторів \mathbf{a} і \mathbf{b}).

2. Якщо першій і другий вектори у(1.3) є однаковими, матимемо:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}^2.$$

1.2. Форми подання векторів

Вектори й результати операцій над ними можуть бути подані у кількох математичних формах. Одна з них, яку щойно було застосовано, називається *векторною* і є найбільш узагальненою, бо не залежить від вибору координатного базису.

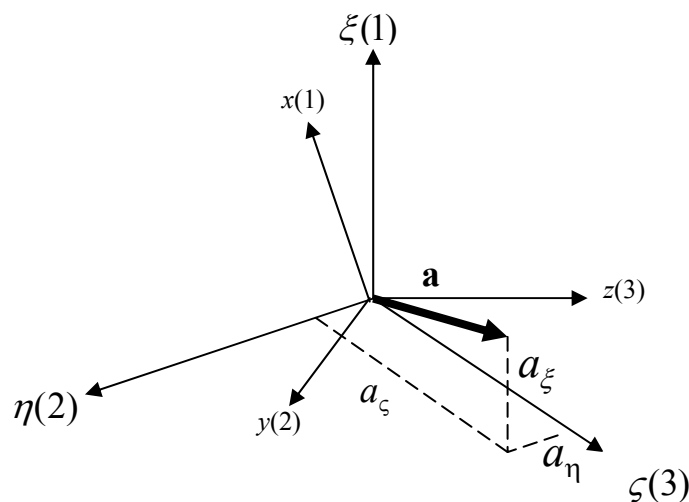


Рис. 1.1. Координатне подання вектора

Існують і інші форми подання векторів. Усі вони потребують попереднього обрання деякого координатного базису (системи відліку). Серед них розрізняватимемо такі форми: а) координатну, б) векторно-координатну і в) матричну.

У подальшому як базисну систему відліку завжди використовуватимемо прямокутну декартову систему (рис. 1.1).

1.2.1. Координатна форма подання вектора

Координатна форма подання вектора – це завдання трійки чисел, що характеризують довжини проекцій цього вектора на осі базисної системи координат:

$$\mathbf{a}\{a_\xi, a_\eta, a_\zeta\}.$$

У подальшому, задля більшої зручності подання формул переходу від однієї системи відліку до іншої, умовимося позначати першу з координатних осей (x або ξ на рис. 1) цифрою 1, другу (y, η) – цифрою 2, а третю (z, ζ) – цифрою 3. Самий координатний базис (систему відліку) позначатимемо однією великою літерою латинського алфавіту. Наприклад, позначимо через P систему осей xuz , а через S – систему $\xi\eta\zeta$. Тоді осі ξ, η і ζ одержать найменування $1_S, 2_S$ та 3_S , а осі x, y і z – $1_P, 2_P$ та 3_P відповідно. З врахуванням цих позначень координатна форма подання вектора \mathbf{a} у системі $\xi\eta\zeta$ набуває вигляду

$$\mathbf{a}\{a_{1S}, a_{2S}, a_{3S}\},$$

а в системі xuz

$$\mathbf{a}\{a_{1P}, a_{2P}, a_{3P}\},$$

Величини a_{1P}, a_{2P} та a_{3P} визначаються як проекції вектора \mathbf{a} відповідно на осі $1_P, 2_P$ та 3_P :

$$a_{iP} = a \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{I}_P). \tag{1.4}$$

Рівність (1.4) є узагальненою формою запису усіх трьох проекцій вектора \mathbf{a} на осі довільно обраної системи відліку, причому індекс i є номером осі системи координат P , а $\mathbf{I}_P = \mathbf{1}_P, \mathbf{2}_P, \mathbf{3}_P$ – позначення одиничних векторів системи P (ортів координатного базису).

Застосовуючи до ортів координатної системи операції скалярного й векторного добутків, запишемо таблицю цих добутків (вектори, що записані у лівій колонці є першими співмножниками, а ті, що записані зверху, – другими співмножниками):

Скалярні добутки ортів

·	$\mathbf{1}_P$	$\mathbf{2}_P$	$\mathbf{3}_P$
$\mathbf{1}_P$	1	0	0
$\mathbf{2}_P$	0	1	0
$\mathbf{3}_P$	0	0	1

$$(1.5)$$

Векторні добутки ортів

×	$\mathbf{1}_P$	$\mathbf{2}_P$	$\mathbf{3}_P$
$\mathbf{1}_P$	0	$\mathbf{3}_P$	$-\mathbf{2}_P$
$\mathbf{2}_P$	$-\mathbf{3}_P$	0	$\mathbf{1}_P$
$\mathbf{3}_P$	$\mathbf{2}_P$	$-\mathbf{1}_P$	0

$$(1.6)$$

1.2.2. Деякі положення алгебри матриць

Матрицею розміром $(m \times n)$ називається прямокутна таблиця, що містить m рядків і n стовпців, елементами якої є дійсні або комплексні числа і яка має вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \|a_{ij}\|. \tag{1.7}$$

Якщо $m=n$, матриця називається *квадратною*.

При $m=1$ матриця перетворюється у рядок:

$$\mathbf{A} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n],$$

а при $n=1$ матриця перетворюється у стовпець:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Сумою матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} однакового розміру ($m \times n$) називають матрицю \mathbf{C} того самого розміру, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць-складових:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \|\|c_{ij}\|\| = \\ &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} = \|\|a_{ij} + b_{ij}\|\|, \end{aligned}$$

тобто елементи матриці-суми визначаються за формулою:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Добутком двох матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} розміром відповідно ($m \times n$) і ($n \times r$), тобто таких, що кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої (n), є матриця \mathbf{C} розміром ($m \times r$), елементи якої визначаються співвідношенням:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}; \quad (i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, r). \quad (1.8)$$

На рис. 1.2 показано схему обчислення елемента c_{ik} матриці \mathbf{C} .

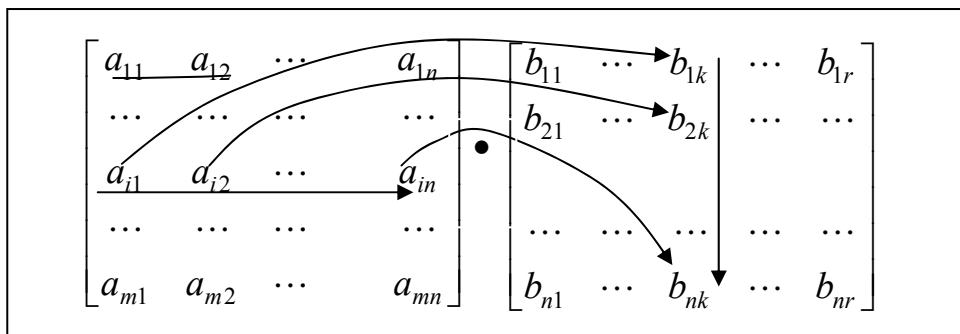


Рис. 1.2. Схема обчислення елемента добутку матриць

Зазначимо, що задля забезпечення можливості виконання операції множення розміри матриць мають бути узгоджені між собою у тому відношенні, що *кількість стовпців першої матриці-множника має дорівнювати кількості рядків другої матриці*.

Приклад 1. Добуток матриці-рядка на матрицю-стовпець дорівнює матриці розміром (1×1) , тобто числу:

$$[a_1, a_2, \dots, a_r] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_r \end{bmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_r \cdot b_r.$$

Приклад 2. Добуток матриці-стовпця на матрицю-рядок дорівнює квадратній матриці розміром $(r \times r)$, де r – довжина матриці-стовпця й матриці-рядка. Такий добуток називають *діадою*:

$$diad(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_r \end{bmatrix} \cdot [b_1; b_2; \dots b_r] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_r \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r b_1 & a_r b_2 & \dots & a_r b_r \end{bmatrix}.$$

Діада того самого вектора має вигляд

$$diad(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_r \end{bmatrix} \cdot [a_1, a_2, \dots a_r] = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_r \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \dots & a_2 a_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r a_1 & a_r a_2 & \dots & a_r^2 \end{bmatrix}.$$

З наведених прикладів видно, що добуток матриць не є комутативним: при переставленні місцями матриць-співмножників у добутку у загальному випадку виходить не лише матриця з іншими елементами, але й з іншими розмірами. Інколи один із добутків існує, а інший – ні, внаслідок неузгодженості розмірів.

Транспонованою по відношенню до заданої матриці \mathbf{A} називається матриця $\mathbf{B}=\mathbf{A}^T$, в якій рядки дорівнюють стовпцям матриці \mathbf{A} , а стовпці – рядкам цієї матриці:

$$b_{ij} = a_{ji}; \quad (i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m).$$

Приклад 3. Транспонованим до стовпця є рядок і навпаки.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_r \end{bmatrix}^T = [a_1; a_2; \dots a_r].$$

Одиничною називають квадратну матрицю \mathbf{E} , вдовж головної діагоналі якої містяться одиниці, а решта елементів дорівнюють нулю.

Добуток одиничної матриці \mathbf{E} зліва на будь-яку матрицю, що має кількість рядків, як у матриці \mathbf{E} , і справа на будь-яку матрицю з кількістю стовпців, як у матриці \mathbf{E} , дорівнює самій цій матриці:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}; \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B}.$$

Оберненою по відношенню до заданої матриці називається така матриця, добуток якої на задану дорівнює одиничній матриці:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Обернена матриця по відношенню до квадратної матриці \mathbf{A} визначається із співвідношення:

$$\mathbf{A}^{-1} = \left\| a_{ij} \right\|^{-1} = \frac{\left\| A_{ji} \right\|}{\det(\mathbf{A})}, \quad (1.9)$$

де A_{ji} – алгебричне доповнення елемента a_{ji} у визначнику $\det(A)$.

Якщо $\det(\mathbf{A})$ дорівнює нулеві, матриця \mathbf{A} називається *виродженою*. У протилежному випадку – не виродженою.

Для виродженої матриці не існує зворотної.

Слід $Tr(\mathbf{A})$ (від *trace*) матриці \mathbf{A} – це сума її діагональних елементів:

$$Tr(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn},$$

де n – кількість діагональних елементів матриці \mathbf{A} .

Квадратна матриця \mathbf{C} називається *симетричною*, якщо її елементи, розташовані симетрично відносно головної діагоналі, дорівнюють один одному:

$$c_{ij} = c_{ji}; \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Квадратна матриця \mathbf{K} називається *кососиметричною*, якщо її елементи, розташовані симетрично відносно головної діагоналі дорівнюють один одному із протилежним знаком:

$$k_{ij} = -k_{ji}; \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Будь-яка квадратна матриця \mathbf{A} може бути розкладеною на суму симетричної \mathbf{C} і кососиметричної \mathbf{K} матриць. При цьому елементи цих матриць визначаються, як неважко довести, з співвідношень:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{C} + \mathbf{K}; & \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{C} &= (\mathbf{A} + \mathbf{A}^t)/2; & \Rightarrow c_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2; & \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{K} &= (\mathbf{A} - \mathbf{A}^t)/2; & \Rightarrow k_{ij} = (a_{ij} - a_{ji})/2. \end{aligned}$$

1.2.3. Матричне подання векторів

У подальшому використовуватимемо дві форми подання вектора \mathbf{a} як матриці:

а) у вигляді матриці-стовпця із проєкцій вектора на осі обраної системи відліку, наприклад:

$$\mathbf{A}_P = \begin{bmatrix} a_{1P} \\ a_{2P} \\ a_{3P} \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

якщо як базис використовується система відліку P , або

$$\mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} a_{1S} \\ a_{2S} \\ a_{3S} \end{bmatrix}, \tag{1.11}$$

якщо базисом обрано систему S;

б) у виді кососиметричної матриці вигляду (базис P):

$$(\mathbf{A}_P \times) = \begin{bmatrix} 0 & -a_{3P} & a_{2P} \\ a_{3P} & 0 & -a_{1P} \\ -a_{2P} & a_{1P} & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.12}$$

Аналогічно записується вектор у вигляді кососиметричної матриці у базисі S.

Подання вектора у вигляді кососиметричної матриці іноді називають *дуальним*.

1.2.4. Векторно-координатна форма подання вектора

Векторно-координатна форма дозволяє поєднати векторну форму подання з координатною. Для цього використовуються вищезазначені позначення ортів координатного базису, наприклад, вектор **a** у базисі S подається у вигляді:

$$\mathbf{a} = a_{1S} \cdot \mathbf{1}_S + a_{2S} \cdot \mathbf{2}_S + a_{3S} \cdot \mathbf{3}_S,$$

а у базисі P

$$\mathbf{a} = a_{1P} \cdot \mathbf{1}_P + a_{2P} \cdot \mathbf{2}_P + a_{3P} \cdot \mathbf{3}_P.$$

Векторно-координатну форму можна дещо спростити у запису, якщо скористуватися умовним матричним поданням вектора. Задля цього введемо у розгляд умовну векторну "матрицю-стовпець" **O**, елементи якої складають вектори ортів обраної системи відліку:

$$\mathbf{O}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_S \\ \mathbf{2}_S \\ \mathbf{3}_S \end{bmatrix}, \quad \text{або} \quad \mathbf{O}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_P \\ \mathbf{2}_P \\ \mathbf{3}_P \end{bmatrix}.$$

З врахуванням правил множення матриць, вектор **a** можна подати у виді:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}_S^T \cdot \mathbf{O}_S = \mathbf{O}_S^T \cdot \mathbf{A}_S = \mathbf{A}_P^T \cdot \mathbf{O}_P = \mathbf{O}_P^T \cdot \mathbf{A}_P, \tag{1.13}$$

де **A_S** і **A_P** – матриці-стовпці (1.10) і (1.11), а індекс *t* позначає операцію транспонування.

Примітки

1. Враховуючи таблиці (1.5) та (1.6), запишемо вирази для діад скалярного й векторного добутків, що утворені з "матриць" **O_P** :

$$\mathbf{O}_P \cdot \mathbf{O}_P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}; \quad \mathbf{O}_P \times \mathbf{O}_P^T = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{3}_P & -\mathbf{2}_P \\ -\mathbf{3}_P & 0 & \mathbf{1}_P \\ \mathbf{2}_P & -\mathbf{1}_P & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.14}$$

2. Добуток транспонованої одиничної матриці-стовпця на її саму (не транспоновану) дорівнює **O_P^T · O_P = 3**.

3. Добуток матриці-стовпця з ортів однієї системи координат (S) на транспоновану матрицю з ортів іншої системи координат (P) дорівнюють матриці напрямних косинусів між осями цих систем координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_S \cdot \mathbf{O}_P^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_S \\ \mathbf{2}_S \\ \mathbf{3}_S \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{1}_P, \mathbf{2}_P, \mathbf{3}_P] = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_S \cdot \mathbf{1}_P & \mathbf{1}_S \cdot \mathbf{2}_P & \mathbf{1}_S \cdot \mathbf{3}_P \\ \mathbf{2}_S \cdot \mathbf{1}_P & \mathbf{2}_S \cdot \mathbf{2}_P & \mathbf{2}_S \cdot \mathbf{3}_P \\ \mathbf{3}_S \cdot \mathbf{1}_P & \mathbf{3}_S \cdot \mathbf{2}_P & \mathbf{3}_S \cdot \mathbf{3}_P \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{1}_S, \mathbf{1}_P) & \cos(\mathbf{1}_S, \mathbf{2}_P) & \cos(\mathbf{1}_S, \mathbf{3}_P) \\ \cos(\mathbf{2}_S, \mathbf{1}_P) & \cos(\mathbf{2}_S, \mathbf{2}_P) & \cos(\mathbf{2}_S, \mathbf{3}_P) \\ \cos(\mathbf{3}_S, \mathbf{1}_P) & \cos(\mathbf{3}_S, \mathbf{2}_P) & \cos(\mathbf{3}_S, \mathbf{3}_P) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.3. Операції над векторами у різних формах подання

Напрямними косинусами вектора \mathbf{a} називають косинуси кутів між напрямком цього вектора і додатними напрямками осей обраної координатної системи:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{I}_P) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{I}_P, \quad (\mathbf{I}_P = \mathbf{1}_P, \mathbf{2}_P, \mathbf{3}_P). \quad (1.15)$$

Тут \mathbf{e} – позначення одиничного вектора напрямку \mathbf{a} .

Усі визначені раніше дії над векторами при записі їх у координатній формі потребують, щоб попередньо усі вектори, над якими здійснюються операції, були визначені (завдані своїми проєкціями) в одному координатному базисі. Прийmemo за такий базис систему відліку P.

Підсумовування векторів. Сума векторів $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ у координатній формі відображується у такий спосіб:

$$c_{iP} = a_{iP} + b_{iP}; \quad (i = 1, 2, 3),$$

тобто

$$c_{1P} = a_{1P} + b_{1P}; \quad c_{2P} = a_{2P} + b_{2P}; \quad c_{3P} = a_{3P} + b_{3P}.$$

Матрична форма допускає два подання

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_P &= \mathbf{A}_P + \mathbf{B}_P; \\ (\mathbf{C}_P \times) &= (\mathbf{A}_P \times) + (\mathbf{B}_P \times), \end{aligned}$$

де використані позначення (1.12).

У векторно-координатній формі сума векторів може бути подана таким чином:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{A}_P^T + \mathbf{B}_P^T) \cdot \mathbf{O}_P = \mathbf{O}_P^T (\mathbf{A}_P + \mathbf{B}_P).$$

Скалярний добуток. Скалярний добуток двох векторів $\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ має вигляд:

– у координатній формі

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_{1P} \cdot b_{1P} + a_{2P} \cdot b_{2P} + a_{3P} \cdot b_{3P};$$

– у матричній формі можливі два варіанти подання – шляхом множення матриці-рядка одного з векторів на матрицю-стовпець другого вектора і шляхом відшукання сліду діади, яка є результатом множення матриці-стовпця одного з векторів на матрицю-рядок іншого вектора

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}_P^T \cdot \mathbf{B}_P = \mathbf{B}_P^T \cdot \mathbf{A}_P = \text{Tr}(\mathbf{A}_P \cdot \mathbf{B}_P^T) = \text{Tr}(\mathbf{B}_P \cdot \mathbf{A}_P^T);$$

– у векторно-координатній формі, враховуючи (34) і (35)

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A}_P^T \cdot \mathbf{O}_P \cdot \mathbf{O}_P^T \cdot \mathbf{B}_P = \mathbf{A}_P^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_P = \mathbf{A}_P^T \cdot \mathbf{B}_P.$$

Векторний добуток. Спочатку визначимо векторний добуток у векторно-координатній формі, враховуючи (1.13) і (1.14):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{A}_P^T \cdot \mathbf{O}_P \times \mathbf{O}_P^T \cdot \mathbf{B}_P = \mathbf{A}_P^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{3}_P & -\mathbf{2}_P \\ -\mathbf{3}_P & 0 & \mathbf{1}_P \\ \mathbf{2}_P & -\mathbf{1}_P & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}_P = \\
 &= \mathbf{1}_P \cdot (a_{2P} \cdot b_{3P} - a_{3P} \cdot b_{2P}) + \mathbf{2}_P \cdot (a_{3P} \cdot b_{1P} - a_{1P} \cdot b_{3P}) + \\
 &+ \mathbf{3}_P \cdot (a_{1P} \cdot b_{2P} - a_{2P} \cdot b_{1P}) = \mathbf{O}'_P \cdot (\mathbf{A}_P \times) \cdot \mathbf{B}_P = \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{1}_P & \mathbf{2}_P & \mathbf{3}_P \\ a_{1P} & a_{2P} & a_{3P} \\ b_{1P} & b_{2P} & b_{3P} \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

З цього випливає, що проекції вектора-добутку двох векторів пов'язані із проекціями множників у такий спосіб:

$$\begin{aligned}
 c_{1P} &= a_{2P} \cdot b_{3P} - a_{3P} \cdot b_{2P}; \\
 c_{2P} &= a_{3P} \cdot b_{1P} - a_{1P} \cdot b_{3P}; \\
 c_{3P} &= a_{1P} \cdot b_{2P} - a_{2P} \cdot b_{1P}.
 \end{aligned}$$

Чергування індексів при проекціях векторів \mathbf{c} , \mathbf{a} і \mathbf{b} визначається правилом циклічного переставляння.

У матричній формі для подання векторного добутку потрібно застосовувати обидві форми подання векторів – перший співмножник потрібно подати у вигляді кососиметричної матриці (1.12), а другий – як матрицю-стовпець (1.10):

$$\mathbf{C}_P = (\mathbf{A}_P \times) \cdot \mathbf{B}_P = \begin{bmatrix} 0 & -a_{3P} & a_{2P} \\ a_{3P} & 0 & -a_{1P} \\ -a_{2P} & a_{1P} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1P} \\ b_{2P} \\ b_{3P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2P} \cdot b_{3P} - a_{3P} \cdot b_{2P} \\ a_{3P} \cdot b_{1P} - a_{1P} \cdot b_{3P} \\ a_{1P} \cdot b_{2P} - a_{2P} \cdot b_{1P} \end{bmatrix}.$$

або

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_P^T &= \mathbf{A}_P^T \cdot (\mathbf{B}_P \times) = [a_{1P}, a_{2P}, a_{3P}] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -b_{3P} & b_{2P} \\ b_{3P} & 0 & -b_{1P} \\ -b_{2P} & b_{1P} & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= [a_{2P} \cdot b_{3P} - a_{3P} \cdot b_{2P}, a_{3P} \cdot b_{1P} - a_{1P} \cdot b_{3P}, a_{1P} \cdot b_{2P} - a_{2P} \cdot b_{1P}].
 \end{aligned}$$

Внаслідок властивості антикомутативності векторного добутку можна записати співвідношення:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}_P \times) \cdot \mathbf{B}_P &= -(\mathbf{B}_P \times) \cdot \mathbf{A}_P = (\mathbf{B}_P^T \times) \cdot \mathbf{A}_P; \\
 \mathbf{A}_P^T \cdot (\mathbf{B}_P \times) &= -\mathbf{B}_P^T \cdot (\mathbf{A}_P \times) = \mathbf{B}_P^T \cdot (\mathbf{A}_P^T \times).
 \end{aligned}$$

Векторно-скалярний добуток. У координатній формі векторно-скалярний добуток трьох векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (див. (1.1) і (1.2)) найпростіше подається як визначник квадратної матриці:

$$d = \mathbf{abc} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_{1P} & a_{2P} & a_{3P} \\ b_{1P} & b_{2P} & b_{3P} \\ c_{1P} & c_{2P} & c_{3P} \end{vmatrix}.$$

Векторно-координатна й матрична форми дають однаковий результат

$$d = \mathbf{abc} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{A}_P^T \cdot (\mathbf{B}_P \times) \cdot \mathbf{C}_P.$$

Співвідношення (1.1) дозволяють встановити такі співвідношення між матрицями:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_P^T \cdot (\mathbf{B}_P \times) \cdot \mathbf{C}_P &= \mathbf{A}_P^T \cdot (\mathbf{C}_P \times)^T \cdot \mathbf{B}_P = \mathbf{B}_P^T \cdot (\mathbf{A}_P \times)^T \cdot \mathbf{C}_P = \\ &= \mathbf{B}_P^T \cdot (\mathbf{C}_P \times) \cdot \mathbf{A}_P = \mathbf{C}_P^T \cdot (\mathbf{B}_P \times)^T \cdot \mathbf{A}_P = \mathbf{C}_P^T \cdot (\mathbf{A}_P \times) \cdot \mathbf{B}_P\end{aligned}$$

Подвійний векторний добуток. Запишемо подвійний векторний добуток у векторно-координатній формі (див. (1.16)):

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{A}_P^T \cdot \mathbf{O}_P \times \mathbf{O}_P^T \cdot (\mathbf{B}_P \times) \cdot \mathbf{C}_P = \mathbf{O}_P^T \cdot (\mathbf{A}_P \times) \cdot (\mathbf{B}_P \times) \cdot \mathbf{C}_P.$$

Звідси випливає і матрична форма:

$$\mathbf{D}_P = (\mathbf{A}_P \times) \cdot (\mathbf{B}_P \times) \cdot \mathbf{C}_P. \quad (1.17)$$

Неважко впевнитися у слушності наступної залежності:

$$(\mathbf{A}_P \times) \cdot (\mathbf{B}_P \times) = \mathbf{B}_P \cdot \mathbf{A}_P^T - \mathbf{B}_P^T \cdot \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{E}. \quad (1.18)$$

З її врахуванням формулу (1.17) можна переробити у таку:

$$\mathbf{D}_P = \mathbf{B}_P \cdot (\mathbf{A}_P^T \cdot \mathbf{C}_P) - (\mathbf{B}_P^T \cdot \mathbf{A}_P) \cdot \mathbf{C}_P,$$

що, як неважко збагнути, є модифікацією співвідношення (1.3) у матричному варіанті.

Потрійний векторний добуток. Користуючись співвідношенням (1.3) потрійний векторний добуток можна подати у виді:

$$\mathbf{d} \times [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = \mathbf{d} \times [\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})] = (\mathbf{d} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{d} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Якщо деякі з векторів є однаковими, матимемо звідси:

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] = -\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})] = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

а також

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})] = -\mathbf{b} \times [\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})].$$

У матричній формі цьому відповідають співвідношення

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \times) \cdot (\mathbf{B} \times) \cdot (\mathbf{A} \times) \cdot \mathbf{B} &= -(\mathbf{A} \times) \cdot (\mathbf{B} \times) \cdot (\mathbf{B} \times) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{B} \times) \cdot (\mathbf{A} \times) \cdot (\mathbf{A} \times) \cdot \mathbf{B} = \\ &= (\mathbf{B} \times) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B} \times) \cdot \mathit{diad}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}\end{aligned}$$

Деякі корисні співвідношення.

Квадрат кососиметричної матриці має вигляд:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}_P \times)^2 &= (\mathbf{A}_P \times) \cdot (\mathbf{A}_P \times) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -a_{3P} & a_{2P} \\ a_{3P} & 0 & -a_{1P} \\ -a_{2P} & a_{1P} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -a_{3P} & a_{2P} \\ a_{3P} & 0 & -a_{1P} \\ -a_{2P} & a_{1P} & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -(a_{2P}^2 + a_{3P}^2) & a_{1P} \cdot a_{2P} & a_{1P} \cdot a_{3P} \\ a_{1P} \cdot a_{2P} & -(a_{1P}^2 + a_{3P}^2) & a_{3P} \cdot a_{2P} \\ a_{1P} \cdot a_{3P} & a_{2P} \cdot a_{3P} & -(a_{1P}^2 + a_{2P}^2) \end{bmatrix}. \quad (1.19)\end{aligned}$$

Застосуємо (1.18) для того самого вектора. Матимемо:

$$(\mathbf{A}_P \times) \cdot (\mathbf{A}_P \times) = \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{A}_P^t - \mathbf{A}_P^t \cdot \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{E},$$

або

$$\mathit{diad}(\mathbf{A}_P) = (\mathbf{A}_P \times)^2 + a^2 \cdot \mathbf{E}, \quad (1.20)$$

де позначено

$$\mathit{diad}(\mathbf{A}_P) = \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{A}_P^t = \begin{bmatrix} a_{1P}^2 & a_{1P} \cdot a_{2P} & a_{1P} \cdot a_{3P} \\ a_{1P} \cdot a_{2P} & a_{2P}^2 & a_{3P} \cdot a_{2P} \\ a_{1P} \cdot a_{3P} & a_{2P} \cdot a_{3P} & a_{3P}^2 \end{bmatrix}$$

діада вектора \mathbf{a} , a – його довжина.

Якщо ж вектор \mathbf{a} є одиничним ($\mathbf{a} = \mathbf{e}$, $e^2 = 1$), то формула (1.20) перетвориться на таку

$$diad(\mathbf{e}_p) = \mathbf{E} + (\mathbf{e}_p \times)^2, \tag{1.21}$$

де позначено

$$diad(\mathbf{e}_p) = \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p^t = \begin{bmatrix} e_{1p}^2 & e_{1p} \cdot e_{2p} & e_{1p} \cdot e_{3p} \\ e_{1p} \cdot e_{2p} & e_{2p}^2 & e_{3p} \cdot e_{2p} \\ e_{1p} \cdot e_{3p} & e_{2p} \cdot e_{3p} & e_{3p}^2 \end{bmatrix}. \tag{1.22}$$

Ще одне корисне співвідношення знайдемо, користуючись тією обставиною, що скалярний добуток є числом, а добуток матриць є асоціативним:

$$\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}_p^t \cdot \mathbf{C}_p = diad(\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p) \cdot \mathbf{C}_p = \mathbf{B}_p^t \cdot \mathbf{C}_p \cdot \mathbf{A}_p.$$

Воно є слухним у випадку, коли матриці \mathbf{A}_p , \mathbf{B}_p і \mathbf{C}_p є стовпцями.

Нарешті, неважко довести, що, коли \mathbf{a} і \mathbf{b} – вектори, то

$$diad(\mathbf{A}_p) \cdot \mathbf{B}_p = \mathbf{A}_p \cdot (\mathbf{A}_p)^t \cdot \mathbf{B}_p = \mathbf{A}_p \cdot a \cdot b \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Зокрема, якщо вектор $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ – одиничний, матимемо

$$diad(\mathbf{e}_p) \cdot \mathbf{X}_p = x \cdot \cos(\mathbf{e}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_p. \tag{1.23}$$

Це є вектор, колінеарний з ортом \mathbf{e} , і рівний за довжиною проекції вектора \mathbf{x} на цей орт.

2. ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ ТІЛА У ПРОСТОРИ. МАТРИЦЯ НАПРЯМНИХ КОСИНУСІВ. КУТИ ЕЙЛЕРА

Поняття про рух, як і про спокій, є відносним. Інакше кажучи, висновувати про рух, або про спокій твердого тіла можливо лише тоді, коли вказано той предмет (тіло), по відношенню до якого із плином часу змінюється, або залишається незмінним положення цього тіла. При аналітичному описі явищ руху як такий предмет приймають зазвичай деяку декартову систему відліку. Вибір її у кінематиці, по суті, є довільним і визначається лише характером руху, який здійснюється відносно неї, метою дослідження та зручністю користування нею. Називатимемо цю систему відліку умовно *нерухомою* (опорною) або абсолютною системою відліку S і позначатимемо буквами $\xi\eta\zeta$.

Примітка. Поняття *нерухомої системи відліку* у кінематиці є умовним, відносним. Але картина радикально змінюється, коли від задач кінематики переходять до задач динаміки. Як відомо, головні закони динаміки сформульовані (і мають найпростіший вигляд) для так званих інерціальних систем відліку. Тому, при розв'язуванні задач динаміки, поняття *нерухомої, "абсолютної" системи відліку* набуває конкретного, чітко визначеного змісту – це інерціальна система відліку.

2.1. Матриця напрямних косинусів

Виберемо у рухомому тілі довільну точку O і прийемо її як початок системи відліку XYZ , яку припускатимемо жорстко пов'язаною з тілом (рис. 2.1). Цю систему відліку (P) називатимемо *рухомою*. Координати x , y і z довільної точки M тіла в рухомій системі відліку вважатимемо відомими. Вони будуть незмінними протягом руху тіла, яке б він не був.

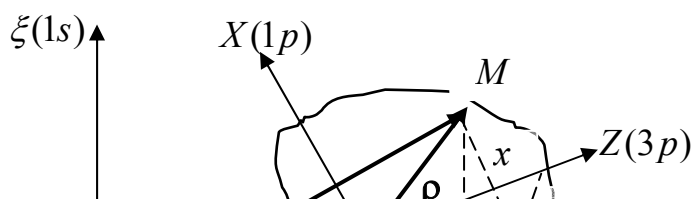


Рис. 2.1. Завдання положення твердого тіла

Рух твердого тіла у просторі вважається відомим, якщо є відомими у довільний момент часу координати ξ , η і ζ довільної його точки в нерухомій системі відліку. Якщо (див. рис. 2.1) $\mathbf{r}_o(\xi_o, \eta_o, \zeta_o)$ і $\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta)$ є відповідно радіусами-векторами полюса O і довільної точки M в абсолютній системі відліку S , а $\mathbf{c}(x, y, z)$ – радіус-вектор цієї точки відносно полюса O , то матимемо

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{p}. \quad (2.1)$$

Позначаючи одиничні вектори осей x , y і z через \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} відповідно, можна записати:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z. \quad (2.2)$$

Проекції одиничних векторів $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ на осі системи відліку S дорівнюють напрямним косинусам (див. (1.15)) осей x , y і z відносно осей ξ , η і ζ :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_\xi &= \cos(x, \xi) = c_{11}; & \mathbf{j}_\xi &= \cos(y, \xi) = c_{12}; & \mathbf{k}_\xi &= \cos(z, \xi) = c_{13}; \\ \mathbf{i}_\eta &= \cos(x, \eta) = c_{21}; & \mathbf{j}_\eta &= \cos(y, \eta) = c_{22}; & \mathbf{k}_\eta &= \cos(z, \eta) = c_{23}; \\ \mathbf{i}_\zeta &= \cos(x, \zeta) = c_{31}; & \mathbf{j}_\zeta &= \cos(y, \zeta) = c_{32}; & \mathbf{k}_\zeta &= \cos(z, \zeta) = c_{33}. \end{aligned}$$

З врахуванням цього, векторну рівність (2.2) можна подати у вигляді трьох скалярних рівностей таким чином:

$$\begin{cases} \xi = \xi_o + c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z \\ \eta = \eta_o + c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z \\ \zeta = \zeta_o + c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z \end{cases}. \quad (2.3)$$

Співвідношення (2.3) – це загальні рівняння руху твердого тіла. Вони безпосередньо виражають як функції часу координати будь-якої точки в опорній системі відліку. В ці рівняння, окрім незмінних за величиною значень координат x , y і z входять дванадцять функцій часу, а саме: три "абсолютні" координати полюса O – ξ_o , η_o , ζ_o та дев'ять напрямних косинусів c_{ij} , які зручно подати наступною таблицею (рис. 2.2):

\mathbf{C}^{SP}	$X(1p)$	$Y(2p)$	$Z(3p)$
$\xi(1s)$	c_{11}	c_{12}	c_{13}
$\eta(2s)$	c_{21}	c_{22}	c_{23}

$\zeta(3s)$	c_{31}	c_{32}	c_{33}
-------------	----------	----------	----------

Рис. 2.2. Таблиця напрямних косинусів

Очевидно, цю таблицю можна розглядати як матрицю C^{SP} напрямних косинусів рухомої системи відліку P (x, y, z) відносно нерухомої системи S:

$$C^{SP} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

Лінійне перетворення (2.3) може бути записане у вигляді матричної рівності

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ \zeta_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Позначаючи стовпцеві матриці

$$R_S = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}; \quad R_{oS} = \begin{bmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ \zeta_o \end{bmatrix}; \quad R_P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

замість (2.2) отримаємо

$$R_S = R_{oS} + C^{SP} \cdot R_P. \quad (2.5)$$

Якщо сумістити початки систем відліку S і P, із (2.5) виходить

$$R_S = C^{SP} \cdot R_P. \quad (2.6)$$

Це співвідношення характеризує перехід від координат вектора r у рухомій системі P до координат того самого вектора у нерухомій системі відліку S, тобто перетворення вектора з однієї системи в іншу, повернуту.

Дев'ять напрямних косинусів наведеної таблиці не є взаємозалежними. Дійсно, зворотний перехід від проєкцій вектора у нерухомій системі до його проєкцій у рухомій системі, за аналогією з (2.6) можна подати у вигляді

$$R_P = C^{PS} \cdot R_S, \quad (2.7)$$

де вже C^{PS} позначає матрицю напрямних косинусів зворотного переходу – від системи P до системи S. Підставляючи (2.6) у праву частину (2.7), отримаємо

$$C^{SP} \cdot C^{PS} = E,$$

де E – одинична матриця.

З іншого боку, записуючи у явному вигляді матрицю C^{PS} зворотного переходу, неважко впевнитися, що вона є транспонованою по відношенню до матриці C^{SP} прямого переходу (через те, що елементами її є косинуси між тими самими осями, тільки напрямні косинуси осей рухомої системи утворюють тепер не стовпці, а рядки:

$$C^{PS} = (C^{SP})^{-1} = (C^{SP})^T.$$

Звідси випливає головне співвідношення, яке пов'язує елементи будь-якої матриці напрямних косинусів:

$$C^{SP} \cdot (C^{SP})^T = E, \quad (2.8)$$

або, у розгорнутому виді

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Співвідношення (2.8) у термінах теорії матриць можна сформулювати у такий спосіб: **матриця напрямних косинусів є ортогональною.**

Умови нормованості при цьому зводяться до таких скалярних тотожностей:

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 &= 1 \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 &= 1 \\ c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

а умови ортогональності – до таких:

$$\begin{aligned} c_{11} \cdot c_{21} + c_{12} \cdot c_{22} + c_{13} \cdot c_{23} &= 0; \\ c_{11} \cdot c_{31} + c_{12} \cdot c_{32} + c_{13} \cdot c_{33} &= 0; \\ c_{21} \cdot c_{31} + c_{22} \cdot c_{32} + c_{23} \cdot c_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

З цього випливають такі правила:

■ **сума квадратів елементів будь якого рядка матриці напрямних косинусів дорівнює одиниці ;**

■ **сума попарних добутків елементів двох рядків матриці напрямних косинусів дорівнює нулю.**

Отже, дев'ять елементів матриці напрямних косинусів пов'язані між собою шістьма співвідношеннями (2.10) і (2.11). З цього випливає, що тільки три напрямні косинуси можуть бути довільними. Решта визначиться ними із зазначених залежностей.

Примітки.

1. Вищезазначені правила виконуються не лише для рядків, але й для стовпців матриці напрямних косинусів.

2. Визначник матриці напрямних косинусів дорівнює одиниці

$$\det(\mathbf{C}^{SP}) = \det(\mathbf{C}^{PS}) = 1.$$

3. Умову (2.8) ортогональності матриці напрямних косинусів можна також записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^3 c_{ij} \cdot c_{ik} = \delta_{jk}, \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

де δ_{jk} – символ Кронекера.

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j = k \\ 0, & \text{якщо } j \neq k \end{cases}$$

З основної властивості (2.8) МНК і визначення (1.9) оберненої матриці випливає, що **будь-який елемент МНК дорівнює власному алгебричному доповненню**

$$c_{ij} = C_{ij},$$

або, докладніше:

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22} \cdot c_{33} - c_{32} \cdot c_{23}; & c_{12} &= c_{23} \cdot c_{31} - c_{21} \cdot c_{33}; & c_{13} &= c_{21} \cdot c_{32} - c_{31} \cdot c_{22}; \\ c_{21} &= c_{32} \cdot c_{13} - c_{12} \cdot c_{33}; & c_{22} &= c_{11} \cdot c_{33} - c_{31} \cdot c_{13}; & c_{23} &= c_{31} \cdot c_{12} - c_{11} \cdot c_{32}; \\ c_{31} &= c_{12} \cdot c_{23} - c_{22} \cdot c_{13}; & c_{32} &= c_{21} \cdot c_{13} - c_{11} \cdot c_{23}; & c_{33} &= c_{11} \cdot c_{22} - c_{21} \cdot c_{12}; \end{aligned}$$

4. Незавжно впевнитися, що вектори-матриці у вигляді (1.12) косиметричної матриці при повороті системи відліку перетворюються згідно матричного співвідношення:

$$(\mathbf{A}_S \times) = \mathbf{C}^{SP} \cdot (\mathbf{A}_P \times) \cdot (\mathbf{C}^{SP})^T.$$

Зворотний перехід описується наступною формулою:

$$(\mathbf{A}_P \times) = (\mathbf{C}^{SP})^T \cdot (\mathbf{A}_S \times) \cdot \mathbf{C}^{SP}. \quad (2.12)$$

Матрицю напрямних косинусів \mathbf{C}^{SP} можна розглядати як лінійний оператор, який, діючи на систему відліку S, перетворює її у систему P. З теорії матриць відомо, що *послідовне застосування лінійних перетворень приводить до результату, якому відповідає також лінійне перетворення, матриця якого є добутком матриць послідовних перетворень.*

Перехід від однієї ортогональної системи відліку до іншої можна здійснити низкою послідовних поворотів осей координат. При цьому кожний поворот осей координат визначається відповідною матрицею перетворення – матрицею напрямних косинусів.

Припустимо, що здійснюється послідовний перехід від системи відліку S до системи T, потім – до системи K і нарешті, – до кінцевої системи P. Кожний з таких переходів перетворює деякий вектор \mathbf{r} у відповідності до співвідношень (див. (2.6)):

$$\mathbf{R}_S = \mathbf{C}^{ST} \cdot \mathbf{R}_T; \quad \mathbf{R}_T = \mathbf{C}^{TK} \cdot \mathbf{R}_K; \quad \mathbf{R}_K = \mathbf{C}^{KP} \cdot \mathbf{R}_P,$$

де \mathbf{R} – матриця-стовпець із проєкцій вектора \mathbf{r} на осі системи відліку, що вказано індексом при матриці; \mathbf{C}^{ST} , \mathbf{C}^{TK} і \mathbf{C}^{KP} – матриці напрямних косинусів відповідно між системами відліку S і T, T і K та K і P.

Виключаючи послідовно вектори \mathbf{R}_T і \mathbf{R}_K , дістанемо

$$\mathbf{R}_S = \mathbf{C}^{ST} \cdot \mathbf{C}^{TK} \cdot \mathbf{C}^{KP} \cdot \mathbf{R}_P.$$

Але, з іншого боку, той самий перехід від системи S до системи P описується ще й співвідношенням (2.6). Порівнюючи ці дві рівності, одержимо залежність, яка пов'язує матрицю результуючого повороту з матрицями складових послідовних поворотів:

$$\mathbf{C}^{SP} = \mathbf{C}^{ST} \cdot \mathbf{C}^{TK} \cdot \mathbf{C}^{KP}. \quad (2.13)$$

Матриця напрямних косинусів результуючого повороту дорівнює добутку зліва праворуч матриць напрямних косинусів складових поворотів у порядку здійснення самих поворотів. Цю властивість матриць напрямних косинусів (МНК) можна використати для визначення значень МНК складних поворотів.

2.2. Кути Ейлера-Крилова

Перейдемо до визначення кутів Ейлера. Для зручності аналітичних доведень та з міркувань геометричної наочності Леонардом Ейлером було запропоновано як характеристики повороту твердого тіла навколо полюса відносно іншого тіла використовувати не три незалежні напрямні косинуси, а три кути послідовних поворотів системи координатних осей, через які виражаються усі дев'ять напрямних косинусів.

Перехід від однієї декартової системи відліку до будь-якої іншої (із тим самим початком) може бути виконаний за допомогою трьох послідовних поворотів, що здійснюються у певному порядку. Перший поворот може здійснюватися навколо будь-якої із трьох координатних осей (3 можливості) початкового координатного базису, другий – навколо нового положення будь-якої із двох інших осей (2 можливості). Третій поворот можна виконати навколо нового положення будь-якої із двох осей, що не використані при другому повороті (ще 2 можливості). Кількість можливих комбінацій послідовних поворотів, як очевидно, дорівнює 12. Серед них розрізняють два основних типи, у залежності від того, чи збігається вісь останнього повороту з новим положенням осі першого повороту, чи ні. Послідовність кутів першого типу вперше була використана Ейлером для досліджування динаміки обертового твердого тіла і широко застосовується у теоретичній механіці. Цей тип послідовності зазвичай називають власне кутами Ейлера. Приклад такої послідовності наведений на рис. 2.3.

Для опису цієї послідовності поворотів застосуємо такий запис:

$$S \rightarrow \frac{\Psi}{1_S} \rightarrow T \rightarrow \frac{\vartheta}{2_T} \rightarrow K \rightarrow \frac{\Phi}{1_K} \rightarrow P. \tag{2.14}$$

Над стрілкою, яка вказує напрямок переходу від однієї системи відліку до іншої, записане позначення кута повороту, а під нею - позначення осі, навколо якої здійснюється поворот на вказаний кут. При дослідженні поведінки дзиги кут Ψ одержав назву *кута прецесії*, ϑ – *кута нутації*, а Φ – *кута ротації*.

У прикладній механіці та теорії гіроскопів більше застосування знайшов другий тип послідовних поворотів - навколо кожної із трьох координатних осей. Така послідовність була запропонована російським ученим-суднобудівником А. Н. Криловим і набула його ім'я.

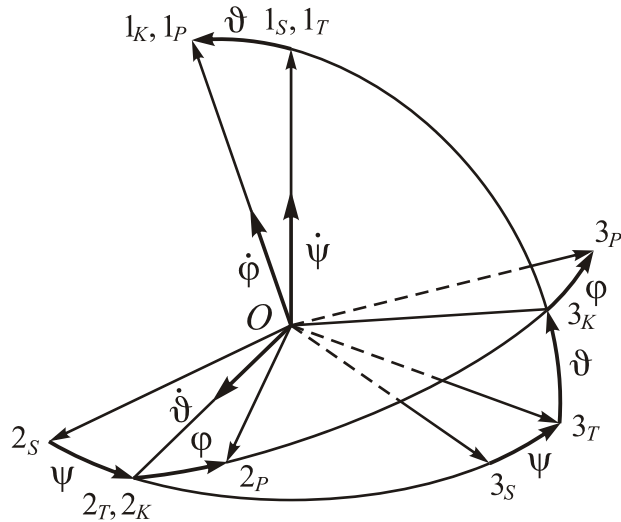


Рис. 2.3. Послідовність кутів Ейлера

Наприклад, для визначення кутового положення корпусів рухомих об'єктів (суден, літаків, ракет, керованих снарядів тощо) широке використання одержав варіант кутів Ейлера-Крилова, зображений на рис. 2.4.

Його можна охарактеризувати записом:

$$S \rightarrow \frac{\Psi}{1_S} \rightarrow T \rightarrow \frac{\vartheta}{2_T} \rightarrow K \rightarrow \frac{\Phi}{3_K} \rightarrow P. \tag{2.15}$$

Якщо під системою відліку S розуміти траєкторну систему відліку, під віссю 3_P – поздовжню вісь рухомого об'єкта, 1_P – нормальну вісь об'єкта, то кут Ψ при цьому характеризує поворот об'єкта у площині горизонту і називається *кутом ристання*, кут ϑ визначає нахил поздовжньої осі об'єкта до площини горизонту і називається *кутом тангажа* (у літаках), або *диферента* (у надводних та підводних суднах), а кут Φ визначає поворот об'єкта навколо поздовжньої осі і його називають *кутом крена*.

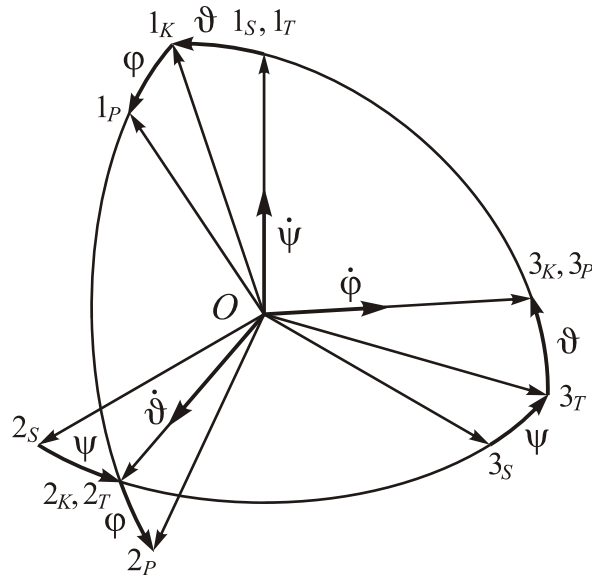


Рис. 2.4. Послідовність кутів Ейлера-Крилова

У загальному випадку вибір тієї чи іншої послідовності поворотів впливає або із самої постановки задачі, або визначається особливостями конструкції об'єкта дослідження. Обрана послідовність кутів Ейлера однозначно визначає кутове положення тіла відносно обраної (опорної) системи відліку. Для використання цих кутів при розв'язуванні задач кінематики необхідно, у першу чергу, навчитися виражати через них усі елементи матриць напрямних косинусів.

2.3. Подання МНК через кути Ейлера-Крилова

Одним із шляхів визначення матриці напрямних косинусів за заданою послідовністю поворотів є відшукання МНК кожного з елементарних поворотів на окремий кут із заданої послідовності трьох кутів (це здійснюється досить просто) і наступному перемноженню цих матриць (див. (2.13)).

Застосуємо цей метод для знаходження МНК послідовності кутів Ейлера, зображеної на рис. 2.3. Використаємо для цього можливості системи MatLAB.

Визначимо C1 матрицю напрямних косинусів, яка переводить систему S у систему T (поворот на кут ψ (ps) навколо осі 1S):

```
syms ps
C1 =sym([1 0 0; 0 cos(ps) -sin(ps);0 sin(ps) cos(ps)])
C1 =
[ 1, 0, 0]
[ 0, cos(ps), -sin(ps)]
[ 0, sin(ps), cos(ps)]
```

Аналогічно визначимо C2 матрицю переходу від системи T до нової системи відліку K, який здійснено шляхом повороту на кут ϑ (te) навколо осі 2T:

```
syms te
C2 =sym([ cos(te) 0 sin(te);0 1 0;-sin(te) 0 cos(te)])
C2 =
[ cos(te), 0, sin(te)]
[ 0, 1, 0]
[-sin(te), 0, cos(te)]
```

Третій поворот (від системи K до кінцевої системи P) на кут ϕ (fI) здійснимо навколо нового положення першої координатної осі, тобто навколо осі 1K:

syms f1

C3 =sym([1 0 0;0 cos(f1) -sin(f1); 0 sin(f1) cos(f1)])

C3 =

```
[ 1, 0, 0]
[ 0, cos(f1), -sin(f1)]
[ 0, sin(f1), cos(f1)]
```

Знайдемо матрицю C загального повороту – від початкової системи відліку S до кінцевої системи P, перемножуючи введені матриці:

C = sym(C1*C2*C3)

C =

```
[ cos(te), sin(te)*sin(f1), sin(te)*cos(f1)
]
[ sin(ps)*sin(te), cos(ps)*cos(f1)-sin(ps)*cos(te)*sin(f1), -cos(ps)*sin(f1) -
sin(ps)*cos(te)*cos(f1)]
[ -cos(ps)*sin(te), sin(ps)*cos(f1)+cos(ps)*cos(te)*sin(f1), -
sin(ps)*sin(f1)+cos(ps)*cos(te)*cos(f1)]
```

Отримане символічне подання МНК відповідає такому запису

$$C^{SP} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \vartheta & \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \vartheta & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \vartheta \\ -\cos \psi \sin \vartheta & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \vartheta & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Аналогічно відшукується МНК для рис. 2.4. Як не важко збагнути, нова послідовність відрізняється від попередньої лише третім поворотом. Тому слід лише перебудувати матрицю останнього повороту

syms ps te f1

C1 =sym([1 0 0; 0 cos(ps) -sin(ps); 0 sin(ps) cos(ps)])

C2 =sym([cos(te) 0 sin(te); 0 1 0; -sin(te) 0 cos(te)])

C3 =sym([cos(f1) -sin(f1) 0; sin(f1) cos(f1) 0; 0 0 1])

C = sym(C1*C2*C3)

C3 =

```
[ cos(f1), -sin(f1), 0]
[ sin(f1), cos(f1), 0]
[ 0, 0, 1]
```

C =

```
[ cos(te)*cos(f1), -cos(te)*sin(f1),
sin(te)]
[ sin(ps)*sin(te)*cos(f1)+cos(ps)*sin(f1), -sin(ps)*sin(te)*sin(f1)+cos(ps)*cos(f1), -
sin(ps)*cos(te)]
[ -cos(ps)*sin(te)*cos(f1)+sin(ps)*sin(f1), cos(ps)*sin(te)*sin(f1)+sin(ps)*cos(f1),
cos(ps)*cos(te)]
```

Вийшов результат, який можна подати у такій більш звичній математичній формі:

$$C^{SP} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -\cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \\ \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \sin \vartheta & \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \sin \vartheta & -\sin \psi \cos \vartheta \\ \sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi \sin \vartheta & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \sin \vartheta & \cos \psi \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Іншим способом визначення елементів МНК через кути послідовних поворотів є застосування теореми косинусів сферичної тригонометрії,

Сферичним трикутником називається фігура, що утворюється (рис. 2.5) на поверхні сфери одиничного радіуса перетинанням з нею трьох площин, що проходять крізь центр сфери (або, що те саме, перетинанням трьох дуг великих кругів сфери).

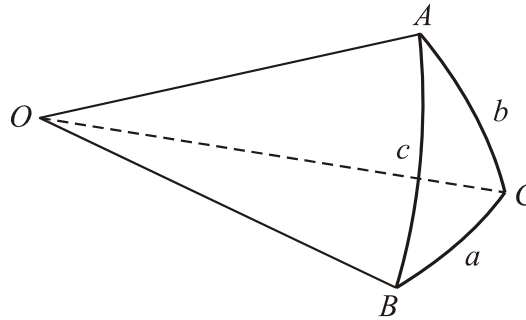


Рис. 2.5. Сферичний трикутник

Дуги АВ, ВС і СА великих кругів називаються сторонами сферичного трикутника. Вони вимірюються відповідними центральними кутами АОВ, ВОС і СОА. Кути сферичного трикутника АВС, ВСА та САВ є двогранними кутами, що утворені площинами: АОВ й ВОС – для вершини В; ВОС й СОА – для вершини С та СОА й АОВ – для вершини А.

Позначимо сторони сферичного трикутника, що розташовані навпроти вершин А, В і С, відповідно малими літерами а, b і с, а двогранні кути при вершинах - великими літерами латиниці, що позначають відповідну вершину. Тоді головну формулу сферичної тригонометрії, яка виражає теорему косинусів для сферичного трикутника, можна записати у вигляді:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \quad (2.18)$$

Її слід читати так: **косинус будь-якої сторони сферичного трикутника дорівнює добутку косинусів двох інших його сторін, підсумованому з добутком синусів цих сторін на косинус двогранного кута, що протилежить шуканій стороні.**

Примітка

Для визначення напрямних косинусів за допомогою формули (2.18) рекомендується такий порядок дій:

- 1) намалювати картину послідовних поворотів на кшталт рис 2.3 і 2.4;
- 2) відшукати на малюнку координатні осі, косинус кута між якими потрібно визначити;
- 3) відшукати на малюнку такий сферичний трикутник, двома вершинами якого були б сліди на сфері двох осей, знайдених у п.2, а сторони розташовувалися на проведених на рисунку площинах; через те, що на рисунку проведені лише площини відомих кутів послідовних поворотів, це гарантує визначеність двох сторін трикутника, що належать відповідним площинам;
- 4) з рисунку визначити (виразити через задані кути поворотів) величини сторін, що примикають до третьої вершини трикутника;
- 5) з рисунку визначити (виразити через один із кутів повороту) двогранний кут трикутника, що протилежний шуканій стороні; при цьому варто мати на увазі, що двогранний кут між площинами кутів послідовних (тобто таких, що прямують один за одним) поворотів завжди дорівнює $\pi/2$; не дорівнюватиме $\pi/2$ лише кут між площинами першого й третього поворотів, який є функцією другого кута повороту;
- 6) підставити знайдені значення сторін і двогранного кута між ними у вираз (2.18) і перетворити одержаний вираз до найпростішого виду;
- 7) аналогічно визначити решту вісім напрямних косинусів і записати результат у вигляді таблиці;

8) перевірити правильність одержаних результатів, використовуючи для цього умови (2.10) і (2.11).

Для прикладу визначимо косинус кута між осями 2_S і 3_P для послідовності, поданої на рис. 2.3.

На цьому рисунку сферичний трикутник $2_S-2_T-3_P$ відповідає усім зазначеним вимогам – він має дві вершини 2_S і 3_P , кут між якими треба визначити, а його дві сторони належать проведеним площинам заданих поворотів – це площина кута ψ й площина кута φ . Сторона 2_S-2_T дорівнює кутові ψ , сторона 2_T-3_P дорівнює $\varphi + \pi/2$. Двогранний кут трикутника $2_S-2_T-3_P$, що протилежить шуканій стороні 2_S-3_P дорівнює $\pi - \vartheta$, як це впливає з рис. 2.3. Підставляючи ці значення у формулу (2.18), отримаємо:

$$\begin{aligned} \cos(2_S, 3_P) &= \cos \psi \cos(\varphi + \pi/2) + \sin \psi \sin(\varphi + \pi/2) \cos(\pi - \vartheta) = \\ &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \vartheta \end{aligned}$$

що повністю збігається із членом матриці (2.16), що міститься на перетинанні другого рядка і третього стовпця.

Як другий приклад розглянемо визначення косинуса кута між тими самими осями при послідовності поворотів, вказаній на рис. 2.4. Тут уже відповідним трикутником може бути тільки трикутник $2_S-3_T-3_P$. Сторона 2_S-3_T цього трикутника дорівнює, як це впливає з рис. 2.4, $\psi + \pi/2$, сторона 3_T-3_P – кутові ϑ . Двогранний кут між площинами цих двох сторін, тобто між площинами двох послідовних поворотів ψ і ϑ дорівнює $\pi/2$. Через це друга складова у формулі (2.15) дорівнюватиме нулеві. В результаті, застосовуючи формулу (2.15), отримаємо

$$\cos(2_S, 3_P) = -\sin \psi \cos \vartheta.$$

Результат збігається з елементом матриці (2.17), що міститься на перетині другого рядка і третього стовпця.

Резюмуючи, можна сказати, що існують два основних способи визначення елементів матриці напрямних косинусів через задані кути послідовних поворотів – матричний і за допомогою сферичної тригонометрії. При цьому слід зауважити наступне:

1) матричний спосіб є більш формалізованим, його можна застосовувати у комп'ютерах для чисельного й символного (див. раніше) визначення матриць напрямних косинусів; він пристосований для випадків поворотів будь-якої складності (коли кутів послідовних поворотів більше за три); недоліком цього методу є необхідність визначати елементи усіх трьох проміжних матриць, тобто 27 елементів, навіть у випадку, коли потрібно визначити не всю матрицю, а тільки один із її елементів (що досить часто буває на практиці);

2) застосування теореми косинусів більш бажане й зручне, коли послідовність складає не більше за три повороти, особливо, коли потрібно визначити не всю матрицю напрямних косинусів, а лише деякі її елементи; у цих випадках кількість операцій різко скорочується у порівнянні з матричним способом; недоліком цього методу є його неформалізованість (необхідність графічного зображення картини поворотів, відшукування на рисунку трикутника, визначення величин його сторін і кутів), отже, і неможливість застосовувати його на ЕОМ, а також неможливість застосування при кількості поворотів більше трьох.

3. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПОДАННЯ ТА СКЛАДАННЯ ПОВОРОТІВ ТІЛА У ПРОСТОРИ

3.1. Матриці напрямних косинусів

Як уже зазначалося у розділі 2, поворот від однієї, умовно нерухомої системи відліку S до іншої, рухомої, P можна описати матрицею C^{SP} напрямних косинусів осей системи P у системі S. При цьому проєкції будь-якого вектора X у "нерухомих" системі S пов'язані із проєкціями цього ж вектора на осі системи P матричним співвідношенням

$$X_S = C^{SP} \cdot X_P, \tag{3.1}$$

де $X_S = [x_{1S}, x_{2S}, x_{3S}]^T$ і $X_P = [x_{1P}, x_{2P}, x_{3P}]^T$ – матриці-стовпці із проєкцій вектора на відповідні осі, або співвідношенням

$$(X_S \times) = (C^{SP})^T \cdot (X_P \times) \cdot C^{SP}, \tag{3.2}$$

якщо вектори подані у вигляді кососиметричних матриць (1.12)

Отже, щоб знайти проєкції вектора X у деякій системі відліку за заданими його проєкціями в іншій системі відліку, необхідно визначити матрицю напрямних косинусів другої системи відносно першої і помножити її на матрицю-стовпець із відомих проєкцій. При цьому виходить очікувана матриця-стовпець із шуканих проєкцій.

Якщо здійснюються два послідовних повороти, – спочатку від системи відліку S до системи K, а потім від системи K до системи P, – то, як було доведено у розділі 2, матриця напрямних косинусів C^{SP} , що відповідає переходу від першої системи відліку S до кінцевої P, дорівнює добутку (зліва праворуч у порядку здійснення самих поворотів) матриць напрямних косинусів C^{SK} і C^{KP} складових поворотів:

$$C^{SP} = C^{SK} \cdot C^{KP} \tag{3.3}$$

Співвідношення (3.1) та (3.3) практично повністю вирішують проблему знаходження проєкцій будь-якого вектора у довільній системі відліку. При цьому вираз (3.3) можна розглядати як **правило складання поворотів**, виражене **через матриці напрямних косинусів**.

Але незручністю такого математичного подання поворотів систем відліку є те, що кожний такий поворот описується матрицею з 9 елементами, із яких тільки три є взаємонезалежними, якщо взяти до уваги співвідношення (2.15 – 2.16). Виникає проблема більш зручного (компактного з математичного боку) подання поворотів.

Одним із шляхів розв'язання цієї проблеми є, на перший погляд, опис поворотів за допомогою завдання кутів Ейлера послідовних поворотів навколо трьох осей координат, як це було зазначено у розділі 2. Але більш уважний погляд виявляє наступні недоліки такого подання:

1) на відміну від матриці напрямних косинусів, яка є завжди єдиною для будь якого певного кутового положення двох систем відліку, опис за допомогою кутів Ейлера є неоднозначним; існують, як відомо, щонайменше 12 різних сполучень послідовних поворотів, що відповідають тому самому взаємному положенню систем відліку, а із врахуванням можливо-го змінювання напрямку додатного повороту на зворотний – набагато більше;

2) найбільшим недоліком опису поворотів кутами Ейлера є так звана "вироджуваність" будь-якої послідовності кутів Ейлера: за деяких певних значень другого кута повороту напрямки осей першого й третього поворотів збігаються у просторі; це призводить до того, що в цьому випадку результуючий поворот зводиться лише до двох, а не трьох поворотів, які необхідні для визначення довільного кутового положення тіла.

Проілюструємо ці висновки.

Нехай, наприклад, прийнята послідовність поворотів, зображена на рис. 2.3 і значення кутів ψ , θ і ϕ дорівнюють кожний по $\pi/6 = 30^\circ$. Розрахуємо для цього положення тіла значення матриці (2.13) його напрямних косинусів:

syms ps te f1

C1 =sym([1 0 0; 0 cos(ps) -sin(ps);0 sin(ps) cos(ps)]);

```

C2=sym([ cos(te) 0 sin(te);0 1 0;-sin(te) 0 cos(te)]);
C3=sym([1 0 0;0 cos(f1) -sin(f1); 0 sin(f1) cos(f1)])
CS = sym(C1*C2*C3)
ps = pi/6;    te=pi/6;          f1=pi/6;
Cr = subs(CS)
Cr =
    0.8660    0.2500    0.4330
    0.2500    0.5335   -0.8080
   -0.4330    0.8080    0.3995

```

Очевидно, це значення матриці МНК однозначно визначає кутове положення тіла, незалежно від того, якою саме послідовністю поворотів задане це положення. Тому таке саме положення тіла може бути заданим і за допомогою іншої послідовності поворотів, наприклад, тою, що подана на рис 2.4. Цій послідовності вже відповідає МНК (2.14).

Як впливає з розгляду цієї матриці, значення кутів ψ , ϑ і φ цієї послідовності поворотів можна визначити за значеннями елементів матриці з таких формул:

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{c_{12}^{SP}}{c_{11}^{SP}}\right); \quad \vartheta = \arcsin(c_{13}^{SP}); \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{c_{23}^{SP}}{c_{33}^{SP}}\right).$$

Здійснюючи обчислення за цими формулами, одержимо для розглядуваного випадку такі значення кутів ψ , ϑ і φ , відповідно, у градусах

```

psn=atan(-Cr(2,3)/Cr(3,3))*180/pi
ten=asin(Cr(1,3))*180/pi
fin=atan(-Cr(1,2)/Cr(1,1))*180/pi
psn =
    63.6901
ten =
    25.6589
fin =
   -16.1021

```

Виходить, те саме положення тіла визначається вже зовсім іншими значеннями кутів поворотів. Очевидно, кожній послідовності поворотів відповідатиме власна трійка значень кутів, які визначають те саме положення тіла.

З іншого боку, якщо другий кут повороту (ϑ) дорівнює у випадку послідовності рис. 2.3 нулеві, матриця (2.16) набуває вигляду:

$$C^{SP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi + \varphi) & -\sin(\psi + \varphi) \\ 0 & \sin(\psi + \varphi) & \cos(\psi + \varphi) \end{bmatrix}.$$

У цьому випадку перші координатні осі початкової й кінцевої систем відліку збігаються, а завдання положення двох інших осей невизначене: тому самому положенню тіла (кінцевої системи відліку) у просторі (початковій системі відліку) відповідає безліч пар значень кутів ψ і φ , сума яких дорівнює певному куту. Саме ця сума, а не окремо кути ψ і φ визначає у цьому випадку положення тіла.

Те саме спостерігається при послідовності поворотів, зображених на рис. 2.4, якщо другий кут ϑ дорівнює $\pi/2$. У цьому випадку вісь 3_p збігається з віссю 1_s , а МНК (2.14) вироджується до такої:

$$C^{SP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\psi + \varphi) & \cos(\psi + \varphi) & 0 \\ -\cos(\psi + \varphi) & \sin(\psi + \varphi) & 0 \end{bmatrix}.$$

Як очевидно, у цих випадках операція визначення положення тіла за допомогою конкретної послідовності поворотів стає нескінченнозначною.

Звідси випливає, що кути Ейлера не задовольняють умові однозначності опису положення тіла.

3.2. Теорема Ейлера

При описі поворотів бажано мати такі три (незалежні один від одного) скалярні параметри, які б були єдиними, універсальними, однозначно б визначали довільну кутову орієнтацію тіла. Така можливість існує, завдяки встановленій Ейлером обставині:

довільне кутове положення однієї системи відліку P відносно іншої S завжди можна подати як єдиний поворот початкової системи S на певний кут (його називають кутом Ейлера) навколо певно орієнтованої осі (яку називають віссю Ейлера), завдяки якому ця система відліку збігатиметься з кінцевою.

Косинус кута δ такого повороту доволі просто визначається з матриці напрямних косинусів C^{SP}

$$\cos \delta = [Tr(C^{SP}) - 1] / 2, \tag{3.4}$$

де $Tr(C^{SP})$ – позначення сліду (trace) матриці напрямних косинусів, тобто суми діагональних її елементів. Напрямні косинуси e_{1S} , e_{2S} і e_{3S} осі цього повороту відносно осей початкової системи 1_S , 2_S і 3_S (або, що те саме, – проєкції одиничного вектора e осі Ейлера на ці осі) визначаються співвідношеннями

$$e_{1S} = \frac{c_{32}^{SP} - c_{23}^{SP}}{2 \sin \delta}; \quad e_{2S} = \frac{c_{13}^{SP} - c_{31}^{SP}}{2 \sin \delta}; \quad e_{3S} = \frac{c_{21}^{SP} - c_{12}^{SP}}{2 \sin \delta}. \tag{3.5}$$

Неважно збагнути, що кути між віссю Ейлера й осями координат не змінюються при повороті навколо неї. Тому напрямні косинуси ейлерової осі у кінцевій системі відліку будуть тими самими:

$$e_{1S} = e_{1P} = e_1; \quad e_{2S} = e_{2P} = e_2; \quad e_{3S} = e_{3P} = e_2.$$

Зворотний зв'язок між матрицею напрямних косинусів і елементами єдиного повороту Ейлера можна подати у вигляді:

$$C^{SP} = \cos \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos \delta) \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & e_2^2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & e_3^2 \end{bmatrix} + \sin \delta \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Неважно впевнитися, що перша матриця є одиничною, друга матриця (див. (1.22)) – є діадою, складеною з проєкцій орту осі Ейлера на осі системи S або P, а третя матриця є поданням того ж орту у вигляді кососиметричної матриці з тих самих проєкцій, тому (3.6) можна записати так

$$C^{SP} = \cos \delta \cdot \mathbf{E} + (1 - \cos \delta) \cdot diad(\mathbf{e}) + \sin \delta \cdot (\mathbf{e} \times),$$

де позначено:

$$diad(\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & e_2^2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & e_3^2 \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{e} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Співвідношення (1.21) дозволяє перетворити (3.7) на такий вираз:

$$C^{SP} = \mathbf{E} + \sin \delta \cdot (\mathbf{e} \times) + (1 - \cos \delta) \cdot (\mathbf{e} \times)^2. \tag{3.7}$$

Запишемо перетворення (3.1) вектора \mathbf{x} з врахуванням виразу (3.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_S &= \mathbf{C}^{SP} \cdot \mathbf{X}_P = \{\cos \delta \cdot \mathbf{E} + (1 - \cos \delta) \cdot \text{diad}(\mathbf{e}) + \sin \delta \cdot (\mathbf{e} \times)\} \cdot \mathbf{X}_P = \\ &= \cos \delta \cdot \mathbf{X}_P + (1 - \cos \delta) \cdot \text{diad}(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{X}_P + \sin \delta \cdot (\mathbf{e} \times) \cdot \mathbf{X}_P. \end{aligned}$$

Враховуючи тепер (1.23) отримаємо таке співвідношення:

$$\mathbf{X}_S = \cos \delta \cdot \mathbf{X}_P + (1 - \cos \delta) \cdot x \cdot \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e} + \sin \delta \cdot (\mathbf{e} \times) \cdot \mathbf{X}_P, \quad (3.8)$$

де через ε позначено кут між вектором \mathbf{X} і ортом \mathbf{e} ейлерової осі, а x – довжина вектора \mathbf{X} .

Вираз (3.8) фактично є поданням вектора \mathbf{X} у системі відліку S через його подання у системі P за допомогою розкладу за напрямками:

- образу вектора \mathbf{X} у системі P;
- одиничного вектора \mathbf{e} осі ейлерова повороту;
- перпендикуляра до попередніх двох напрямків.

Як впливає з одержаного виразу, довжина складової вектора вдовж напрямку його у системі P дорівнює $x \cdot \cos \delta$, вздовж ейлерової осі – $x \cdot (1 - \cos \delta) \cdot \cos \varepsilon$, а вдовж напрямку, ортогонального до попередніх, – $x \cdot \sin \delta \cdot \sin \varepsilon$.

3.3. Початкові відомості про кватерніони

Кватерніоном називають гіперкомплексне число із трьома уявними одиницями. У загальному випадку воно має вигляд

$$\mathbf{Q} = q_0 + \mathbf{i} \cdot q_1 + \mathbf{j} \cdot q_2 + \mathbf{k} \cdot q_3, \quad (3.9)$$

де q_0, q_1, q_2, q_3 – деякі дійсні числа, а $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – уявні одиниці. Поняття кватерніону можна вважати узагальненням поняття комплексного числа на випадок, коли уявний простір є тривимірним і заданий системою відліку з координатним базисом (ортами) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Дії над кватерніонами підпорядковуються наступним головним правилам.

1. Два кватерніони \mathbf{Q}_1 і \mathbf{Q}_2 дорівнюють один одному, якщо є рівними їхні елементи

$$q_{1i} = q_{2i}; \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Сумою кватерніонів \mathbf{Q}_1 і \mathbf{Q}_2 називається кватерніон, елементами якого є сума відповідних елементів кватерніонів доданків

$$\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = (q_{10} + q_{20}) + \mathbf{i} \cdot (q_{11} + q_{21}) + \mathbf{j} \cdot (q_{12} + q_{22}) + \mathbf{k} \cdot (q_{13} + q_{23}).$$

2. Добутком кватерніону на число є кватерніон, усі елементи якого дорівнюють відповідному елементові початкового полінома, помноженому на це число

$$a \cdot \mathbf{Q} = a \cdot q_0 + \mathbf{i} \cdot (a \cdot q_1) + \mathbf{j} \cdot (a \cdot q_2) + \mathbf{k} \cdot (a \cdot q_3).$$

З цих визначень випливає, що підсумовування кватерніонів і добуток їх на скаляр підпорядковуються правилам звичайної алгебри чисел. Одиниці $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ можна вважати за одиничні вектори (орти) чотиривимірного простору, яке складається зі звичайної числової осі і тривимірного уявного простору з ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

3. Щоб визначити добуток кватерніонів, необхідно, перш за все, визначити правила множення одиниць $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Ці правила найзручніше подати у вигляді таблиці:

o	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

(3.10)

За цими правилами добуток кватерніонів (його позначатимемо знаком \circ між позначеннями кватерніонів, що перемножуються) є також кватерніоном:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 &= (q_{10} + \mathbf{i} \cdot q_{11} + \mathbf{j} \cdot q_{12} + \mathbf{k} \cdot q_{13}) \circ (q_{20} + \mathbf{i} \cdot q_{21} + \mathbf{j} \cdot q_{22} + \mathbf{k} \cdot q_{23}) = \\ &= (q_{10}q_{20} - q_{11}q_{21} - q_{12}q_{22} - q_{13}q_{23}) + \\ &\quad + \mathbf{i} \cdot (q_{10}q_{21} + q_{11}q_{20} + q_{12}q_{23} - q_{13}q_{22}) + \\ &\quad + \mathbf{j} \cdot (q_{10}q_{22} + q_{12}q_{20} + q_{13}q_{21} - q_{11}q_{23}) + \\ &\quad + \mathbf{k} \cdot (q_{10}q_{23} + q_{13}q_{20} + q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Завдяки правилам (3. 10) перемножування кватерніонів алгебра кватерніонів містить у собі алгебру дійсних і комплексних чисел, а також тривимірну векторну алгебру.

Кватерніони містять *дійсні числа* $(q_0, 0, 0, 0)$ з єдиною одиницею 1, *комплексні числа* $(q_0, q_1, 0, 0)$ із двома одиницями 1 та \mathbf{i} , а також *вектори* $(0, q_1, q_2, q_3)$ в уявному просторі трьох вимірів. Можна ідентифікувати одиниці $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ з ортами тривимірного векторного простору і розглядати елементи кватерніону при цих одиницях як компоненти вектора. Через те подамо кватерніон у вигляді суми *скалярної* q_0 та *векторної* \mathbf{q} частин

$$\mathbf{Q} = q_0 + \mathbf{q}. \quad (3.12)$$

4. Кватерніонний добуток двох векторів-кватерніонів складається з векторного добутку цих кватерніонів та їхнього скалярного добутку із протилежним знаком. Дійсно, нехай

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{q}_1 = \mathbf{i} \cdot q_{11} + \mathbf{j} \cdot q_{12} + \mathbf{k} \cdot q_{13}; \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{q}_2 = \mathbf{i} \cdot q_{21} + \mathbf{j} \cdot q_{22} + \mathbf{k} \cdot q_{23}.$$

Тоді, перемножуючи ці кватерніони-вектори, одержимо (див. (3.9) та (3.10)):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 &= -(q_{11} \cdot q_{21} + q_{12} \cdot q_{22} + q_{13}q_{23}) + \\ &\quad + \mathbf{i} \cdot (q_{12}q_{23} - q_{13}q_{22}) + \mathbf{j} \cdot (q_{13}q_{21} - q_{11}q_{23}) + \mathbf{k} \cdot (q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}) = \\ &= -\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Як бачимо, кватерніонний добуток двох векторів-кватерніонів приводить у результаті не до вектора, а до кватерніону. У цьому кватерніонний добуток істотно відрізняється від векторного. З іншого боку, він містить у собі і векторний і скалярний добутки векторів.

Наслідок 1. Сума кватерніонних добутків двох векторів-кватерніонів у зворотному порядку дорівнює подвійному скалярному добуткові цих векторів:

$$\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_2 \circ \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1 = -2\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2.$$

Наслідок 2. Різниця між кватерніонними добутками двох векторів-кватерніонів у зворотному порядку дорівнює подвійному векторному добуткові першого вектора на другий

$$\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2 \circ \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1 = 2\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2.$$

З урахуванням (3.13), можна подати добуток (3.11) двох кватерніонів у такому спрощеному вигляді:

$$\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 = q_{10}q_{20} - \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + q_{10} \cdot \mathbf{q}_2 + q_{20} \cdot \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2. \quad (3.14)$$

5. Скалярна частина добутку двох кватерніонів дорівнює добутку їхніх скалярних частин мінус скалярний добуток їхніх векторних частин. Векторна частина дорівнює сумі добутків скалярних частин кожного із кватерніонів на векторну частину іншого співмножника і векторного добутку векторних частин.

Наслідок 3. Різниця між добутками двох кватерніонів у зворотному порядку дорівнює подвійному векторному добуткові векторної частини першого кватерніону на векторну частину другого

$$\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 = 2\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2. \quad (3.14a)$$

6. Множення кватерніонів має властивості асоціативності та дистрибутивності по відношенню до додавання, але не є комутативним (при зміні порядку співмножників у формулі (3.14) змінюється знак останнього члена – векторного добутку).

7. Кватерніоном, спряженим до заданого (3.12), називають кватерніон $\tilde{\mathbf{Q}}$ із тією самою скалярною частиною і з протилежною за знаком векторною частиною:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = q_0 - \mathbf{q}.$$

8. Добуток кватерніону на спряжений до нього дорівнює сумі квадратів усіх його елементів, яка називається нормою кватерніону. Доведемо це:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \circ \tilde{\mathbf{Q}} &= (q_0 + \mathbf{q}) \circ (q_0 - \mathbf{q}) = q_0^2 - \mathbf{q} \circ \mathbf{q} = q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \|\mathbf{Q}\| \end{aligned}$$

9. Якщо норма $\|\mathbf{Q}\|$ кватерніону дорівнює одиниці, кватерніон називають нормованим.

10. Спряжене до добутку двох кватерніонів дорівнює добутку їхніх спряжених значень, узятих у зворотному порядку:

$$(\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2) \tilde{\phantom{\mathbf{Q}}} = \tilde{\mathbf{Q}}_2 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_1.$$

11. Норма добутку двох кватерніонів дорівнює добутку норм співмножників:

$$\|\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2\| = \|\mathbf{Q}_1\| \cdot \|\mathbf{Q}_2\|.$$

12. Кватерніоном, зворотним до заданого кватерніону \mathbf{Q} , називається кватерніон \mathbf{Q}^{-1} , добуток якого на заданий дорівнює одиниці:

$$\mathbf{Q} \circ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} \circ \mathbf{Q} = 1.$$

13. Зворотний кватерніон дорівнює спряженому, поділеному на його норму

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{Q}}}{\|\mathbf{Q}\|}.$$

14. Будь-який ненульовий кватерніон завжди може бути поданий у вигляді

$$\mathbf{Q} = Q \cdot (\cos \vartheta + \mathbf{e} \cdot \sin \vartheta), \quad (3.15)$$

де

$$Q = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

Q – модуль ("довжина") кватерніону,

$$\cos \vartheta = \frac{q_0}{Q}; \quad \sin \vartheta = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{Q}; \quad (0 \leq \vartheta < \pi),$$

а \mathbf{e} – одиничний вектор напрямку векторної частини кватерніону:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{i} \cdot q_1 + \mathbf{j} \cdot q_2 + \mathbf{k} \cdot q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} = \frac{\mathbf{i} \cdot q_1 + \mathbf{j} \cdot q_2 + \mathbf{k} \cdot q_3}{q} = \mathbf{i} \cdot c_{q1} + \mathbf{j} \cdot c_{q2} + \mathbf{k} \cdot c_{q3}.$$

Тут позначено

$$q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

q – модуль векторної частини кватерніону, а c_{q1}, c_{q2}, c_{q3} – напрямні косинуси додатного напрямку кватерніону відносно базису $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

15. Величину ϑ у поданні (3.15) називатимемо *аргументом кватерніону*, а вектор \mathbf{e} (3.16) – *напрямком векторної частини кватерніону*.

16. *Скалярна частина $sqal(\mathbf{Q})$ добутку кватерніонів не змінюється при циклічному переставленні співмножників.*

Для двох множників у цьому можна впевнитися безпосередньо з виразу

$$sqal(\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2) = sqal(\mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1). \quad (3.16)$$

Доведемо це твердження для трьох співмножників, спираючись на властивість (3.16), як на доведену:

$$\begin{aligned} sqal(\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_3) &= sqal[\mathbf{Q}_1 \circ (\mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_3)] = sqal[(\mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_3) \circ \mathbf{Q}_1] = \\ &= sqal[\mathbf{Q}_2 \circ (\mathbf{Q}_3 \circ \mathbf{Q}_1)] = sqal[(\mathbf{Q}_3 \circ \mathbf{Q}_1) \circ \mathbf{Q}_2] = sqal(\mathbf{Q}_3 \circ \mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2). \end{aligned}$$

3.4. Подання кватерніонного множення за допомогою матричних операцій

Кватерніонне множення є досить специфічною операцією, яка складно пов'язана з більш звичними операціями звичайного множення чисел, скалярним і векторним множенням векторів. У той же час усі вказані множення можна подати як часткові випадки множення матриць різного виду. Окрім того, саме матричні операції є основними у сучасних математичних комп'ютерних системах, таких як MATLAB. Тому спробуємо подати добуток двох кватерніонів через матричні дії.

Для цього розділимо кожний кватерніон \mathbf{Q} на дві частини: *скалярну q* , яка подається деяким числом (або матрицею розміром 1×1) і *векторну \mathbf{q}* , яка подається матрицею-стовпцем розміром 3×1 , елементами якої є проєкції цього вектору на осі обраної ситсеми відліку.

Тоді, скориставшись співвідношенням (3.14) і виділяючи окремо скалярну і векторну частини результату кватерніонного множення, одержимо:

$$q = q_1 \cdot q_2 - \mathbf{q}_{1P}^T \cdot \mathbf{q}_{2P}. \quad (3.17)$$

$$\mathbf{q}_P = q_1 \cdot \mathbf{q}_{2P} + q_2 \cdot \mathbf{q}_{1P} + (\mathbf{q}_{1P} \times) \cdot \mathbf{q}_{2P}.$$

Скалярна частина добутку двох кватерніонів дорівнює добуткові їхніх скалярних частин мінус добуток матриці-рядка векторної частини першого з кватерніонів-співмножників на матрицю-стовпець векторної частини другого кватерніону.

Вектор-стовпець добутку кватерніонів дорівнює сумі добутків скалярних частин співмножників на матриці-стовпці вектору іншого співмножника, а також добутку косиметричної матриці, що відповідає вектору першого кватерніону, на матрицю-стовпець вектору другого кватерніону

3.5. Подання поворотів за допомогою кватерніонів

Алгебра кватерніонів дозволяє подати поворот у просторі у простій і зручній формі. Таке подання базується на наступній фундаментальній теоремі:

Якщо \mathbf{Q} і \mathbf{A} є нескалярними кватерніонами, то величина

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} \quad (3.18)$$

є кватерніоном, норма і скалярна частина якого збігається з нормою і скалярною частиною кватерніону \mathbf{A} , а векторна частина виходить повертанням векторної частини кватерніону \mathbf{A} по конусу навколо осі напрямку кватерніону \mathbf{Q} на подвійний кут кватерніону \mathbf{Q} .

Доведення.

Врахуємо визначення зворотного кватерніону (3.13) і подамо складові кватерніони у формі (3.14):

$$\mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \frac{\tilde{\mathbf{Q}}}{\|\mathbf{Q}\|} =$$

$$= Q \cdot (\cos \vartheta + \mathbf{e} \cdot \sin \vartheta) \circ A \cdot (\cos \varphi + \mathbf{a} \cdot \sin \varphi) \circ Q \cdot (\cos \vartheta - \mathbf{e} \cdot \sin \vartheta) / \|\mathbf{Q}\| ,$$

де Q – модуль кватерніону \mathbf{Q} , $\|\mathbf{Q}\| = Q^2$ – його норма, ϑ – кут, \mathbf{e} – одиничний вектор напрямку цього кватерніону; A , \mathbf{a} , φ – модуль, напрямок і кут кватерніону \mathbf{A} .

Отже, матимемо

$$\mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} = A \cdot (\cos \vartheta + \mathbf{e} \cdot \sin \vartheta) \circ (\cos \varphi + \mathbf{a} \cdot \sin \varphi) \circ (\cos \vartheta - \mathbf{e} \cdot \sin \vartheta).$$

Здійснимо перемноження

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} = & A \{ \cos^2 \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \cdot \mathbf{e} + \cos^2 \vartheta \sin \varphi \cdot \mathbf{a} - \\ & - \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \cdot \mathbf{e} + \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cdot \mathbf{e} \circ \mathbf{a} - \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cdot \mathbf{a} \circ \mathbf{e} - \\ & - \sin^2 \vartheta \cos \varphi \cdot \mathbf{e} \circ \mathbf{e} - \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cdot \mathbf{e} \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{e} \} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Усе звелось до кватерніонних добуток векторів, які визначаються співвідношенням (2.15). З нього випливає:

$$\begin{aligned} 1) \mathbf{e} \circ \mathbf{e} &= -\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{e} = -1; \\ 2) \mathbf{e} \circ \mathbf{a} &= -\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{e} \times \mathbf{a}; \\ 3) \mathbf{a} \circ \mathbf{e} &= -\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{e} \times \mathbf{a}; \\ 4) \mathbf{e} \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{e} &= \mathbf{e} \circ (\mathbf{a} \circ \mathbf{e}) = \\ &= \mathbf{e} \circ (-\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{e} \times \mathbf{a}) = -(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) - \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) = \\ &= -\cos \varepsilon \cdot \mathbf{e} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) = -2 \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e} + \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Тут позначено ε – кут між напрямками осей кватерніонів \mathbf{e} і \mathbf{a} . При виведенні останньої формули враховано, що векторно-скалярний добуток з однакових векторів дорівнює нулю. Підставляючи (3.20) у (3.19), матимемо:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} &= A \{ \cos \varphi + \\ &+ \sin \varphi [(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \cdot \mathbf{a} + 2 \sin^2 \vartheta \cdot \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{a})] \} = \\ &= A \{ \cos \varphi + \sin \varphi [\cos 2\vartheta \cdot \mathbf{a} + (1 - \cos 2\vartheta) \cdot \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e} + \sin 2\vartheta (\mathbf{e} \times \mathbf{a})] \}. \end{aligned}$$

Порівнюючи вираз у квадратних дужках із правою частиною (3.8), можна зробити висновок, що він збігається з виразом вектора \mathbf{a} , повернутого на кут 2ϑ відносно осі \mathbf{e} , тобто відносно осі кватерніону \mathbf{Q} . Це й потрібно було довести.

Операція (3.18) змінює лише векторну частину кватерніону, тому її можна розглядати як операцію перетворення вектора \mathbf{x} у вектор \mathbf{x}' згідно формули

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{Q}^{-1}. \quad (3.21)$$

Це перетворення є обертанням навколо деякої осі, причому перетворення у вигляді (3.21) одразу визначає вісь цього обертання. Цією віссю є векторна частина \mathbf{q} кватерніону \mathbf{Q} , оскільки ця вісь не змінюється цим перетворенням:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' &= \mathbf{Q} \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \circ \mathbf{q} \circ (q_0 - \mathbf{q}) / \|\mathbf{Q}\| = \mathbf{Q} \circ (q_0 \mathbf{q} - \mathbf{q} \circ \mathbf{q}) / \|\mathbf{Q}\| = \\ &= \mathbf{Q} \circ (q_0 - \mathbf{q}) \circ \mathbf{q} / \|\mathbf{Q}\| = \mathbf{Q} \circ \mathbf{Q}^{-1} \circ \mathbf{q} = \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Щоб подати поворот системи відліку навколо деякої осі на кут δ , достатньо у перетворенні (3.21) узяти у якості перетворювального кватерніону \mathbf{Q} нормований кватерніон із кутом кватерніону, що дорівнює половині кута δ :

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{e} \cdot \sin \frac{\delta}{2}, \quad (3.23)$$

де \mathbf{e} – є одиничним вектором напрямку, навколо якого здійснюється поворот на кут δ . Наприклад, для опису повороту від початкової системи відліку S можна під \mathbf{e} розуміти вектор-кватерніон вигляду:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_S = e_{1S} \cdot \mathbf{1}_S + e_{2S} \cdot \mathbf{2}_S + e_{3S} \cdot \mathbf{3}_S; \quad (e_{1S}^2 + e_{2S}^2 + e_{3S}^2 = 1),$$

де e_{1S}, e_{2S}, e_{3S} – напрямні косинуси осі повороти у початковій системі відліку.

Чотири компоненти кватерніону повороту (3.23):

$$\lambda = e_{1S} \cdot \sin \frac{\delta}{2}; \quad \mu = e_{2S} \cdot \sin \frac{\delta}{2}; \quad \nu = e_{3S} \cdot \sin \frac{\delta}{2}; \quad \rho = \cos \frac{\delta}{2};$$

одержали назву *параметрів Ейлера* або *параметрів Родріга-Гамільтона*.

Перейдемо до подання поворотів систем відліку. Нехай потрібно описати поворот від системи S до системи P . Тоді, позначаючи кватерніон такого повороту через

$$\mathbf{Q}^{SP} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{e}^{SP} \cdot \sin \frac{\delta}{2}, \quad (3.24)$$

де \mathbf{e}^{SP} – одиничний вектор осі, поворот навколо якої системи відліку S на кут δ переводить її у систему P , можна подати у цілому перетворення будь-якого вектора-кватерніона \mathbf{x}_P , заданого своїми проекціями на осі системи P , у вектор-кватерніон \mathbf{x}_S , що складається із проєкцій цього вектора на осі початкової системи, у такому вигляді (див. (3.21))

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{Q}^{SP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP}. \quad (3.25)$$

Через те що кватерніон \mathbf{Q}^{SP} повороту має однакові складові як у початковій, так й у кінцевій системі відліку, перетворення може бути записане у двох еквівалентних формах

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{Q}_S^{SP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}_S^{SP}. \quad (3.26)$$

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{Q}_P^{SP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}_P^{SP}.$$

Зворотний перехід – від системи P до системи S – може бути описаний кватерніоном \mathbf{Q}^{PS} , який, очевидно, матиме той самий напрямок векторної частини, що й кватерніон \mathbf{Q}^{SP} , той самий аргумент, але протилежного знаку, тобто буде спряженим до останнього:

$$\mathbf{Q}^{PS} = \tilde{\mathbf{Q}}^{SP}. \quad (3.27)$$

Відшукаємо явні вирази компонент кватерніону

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{1}_S \cdot x_{1S} + \mathbf{2}_S \cdot x_{2S} + \mathbf{3}_S \cdot x_{3S} \quad (3.28)$$

у відповідності до виразу (3.25), який слід розуміти так.

1. У початковому стані система відліку P збігається із системою S . В ній задано вектор \mathbf{x} своїми проєкціями на осі системи P (отже, і S):

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{1}_P \cdot x_{1P} + \mathbf{2}_P \cdot x_{2P} + \mathbf{3}_P \cdot x_{3P} = \mathbf{1}_S \cdot x_{1P} + \mathbf{2}_S \cdot x_{2P} + \mathbf{3}_S \cdot x_{3P}.$$

2. Потім здійснюється поворот системи P у нове положення. Цей поворот описаний кватерніоном \mathbf{Q}^{SP} , векторна частина якого задана своїми проєкціями на осі тієї самої системи S :

$$\mathbf{Q}_S^{SP} = q_0 + \mathbf{1}_S \cdot q_{1S} + \mathbf{2}_S \cdot q_{2S} + \mathbf{3}_S \cdot q_{3S} = q_0 + \mathbf{1}_S \cdot q_1 + \mathbf{2}_S \cdot q_2 + \mathbf{3}_S \cdot q_3. \quad (3.29)$$

3. Разом із системою P повертається і вектор \mathbf{x} . Потрібно визначити проєкції цього вектора на осі системи S .

Враховуючи в (3.26) вирази (3.28) та (3.29) і здійснюючи операції кватерніонного множення, матимемо:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_S &= \mathbf{1}_S \cdot x_{1S} + \mathbf{2}_S \cdot x_{2S} + \mathbf{3}_S \cdot x_{3S} = (q_0 + \mathbf{1}_S \cdot q_{1S} + \mathbf{2}_S \cdot q_{2S} + \mathbf{3}_S \cdot q_{3S}) \circ \\ &\circ (\mathbf{1}_S \cdot x_{1P} + \mathbf{2}_S \cdot x_{2P} + \mathbf{3}_S \cdot x_{3P}) \circ (q_0 - \mathbf{1}_S \cdot q_{1S} - \mathbf{2}_S \cdot q_{2S} - \mathbf{3}_S \cdot q_{3S}) = \\ &= \mathbf{1}_S \{ (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \cdot x_{1P} + 2(q_1q_2 - q_0q_3) \cdot x_{2P} + 2(q_0q_2 + q_1q_3) \cdot x_{2P} \} + \\ &+ \mathbf{2}_S \{ 2(q_1q_2 + q_0q_3) \cdot x_{1P} + (q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2) \cdot x_{2P} + 2(q_3q_2 - q_1q_0) \cdot x_{3P} \} + \\ &+ \mathbf{3}_S \{ 2(q_1q_3 - q_0q_2) \cdot x_{1P} + 2(q_0q_1 + q_2q_3) \cdot x_{2P} + (q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2) \cdot x_{3P} \}. \end{aligned}$$

З цього випливає

$$x_{1S} = (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \cdot x_{1P} + 2(q_1q_2 - q_0q_3) \cdot x_{2P} + 2(q_0q_2 + q_1q_3) \cdot x_{2P};$$

$$x_{2S} = 2(q_1q_2 + q_0q_3) \cdot x_{1P} + (q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2) \cdot x_{2P} + 2(q_3q_2 - q_1q_0) \cdot x_{3P};$$

$$x_{3S} = 2(q_1q_3 - q_0q_2) \cdot x_{1P} + 2(q_0q_1 + q_2q_3) \cdot x_{2P} + (q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2) \cdot x_{3P}.$$

Порівнюючи знайдені співвідношення з (3.1), можна впевнитися, що матриця напрямних косинусів \mathbf{C}^{SP} однозначно визначається параметрами кватерніону повороту у такий спосіб:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{SP} &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 & 2(q_3q_2 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{E} + 2 \begin{bmatrix} -q_2^2 - q_3^2 & q_1q_2 - q_0q_3 & q_0q_2 + q_1q_3 \\ q_1q_2 + q_0q_3 & -q_1^2 - q_3^2 & q_3q_2 - q_0q_1 \\ q_1q_3 - q_0q_2 & q_0q_1 + q_2q_3 & -q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{E} + 2q_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -q_2^2 - q_3^2 & q_1q_2 & q_1q_3 \\ q_1q_2 & -q_1^2 - q_3^2 & q_3q_2 \\ q_1q_3 & q_2q_3 & -q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{E} + 2q_0 \cdot (\mathbf{q} \times) + 2 \cdot (\mathbf{q} \times) \cdot (\mathbf{q} \times) = \mathbf{E} + 2[q_0 \cdot \mathbf{E} + (\mathbf{q} \times)] \cdot (\mathbf{q} \times). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Тут використане позначення

$$(\mathbf{q} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix},$$

що є кососиметричною матрицею, яка складається з компонентів векторної частини кватерніону подібно до того, як кососиметрична матриця складається із проєкцій вектора.

Нагадаємо, що у співвідношенні

$$\mathbf{C}^{SP} = \mathbf{E} + 2 \cdot q_0 \cdot (\mathbf{q} \times) + 2 \cdot (\mathbf{q} \times) \cdot (\mathbf{q} \times) \quad (3.31)$$

величини $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$ є матрицями-стовпцями, які складаються з проєкцій векторної частини кватерніону на координатні осі системи S або P (у розглядуваному випадку вони є однаковими), компоненти векторної частини кватерніону повороту пов'язані з проєкціями одиничного вектора \mathbf{e} співвідношеннями

$$q_1 = \sin \frac{\delta}{2} \cdot e_1; \quad q_2 = \sin \frac{\delta}{2} \cdot e_2; \quad q_3 = \sin \frac{\delta}{2} \cdot e_3,$$

а скалярна частина кватерніону переходу від початкової системи S до кінцевої P дорівнює $q_0 = \cos \frac{\delta}{2}$.

З (3.30) легко визначити слід МНК:

$$Tr(\mathbf{C}^{SP}) = 3q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = 4q_0^2 - 1 = 4\cos^2 \frac{\delta}{2} - 1 = 2\cos \delta + 1,$$

що доводить слушність співвідношення (3.4).

Аналогічно доводиться і слушність (3.5). Наприклад

$$c_{32} - c_{23} = 4q_0q_1 = 4\cos \frac{\delta}{2}q_1 = 4\cos \frac{\delta}{2}\sin \frac{\delta}{2} \cdot e_{1S} = 2\sin \delta \cdot e_{1S},$$

звідки випливає перше співвідношення (3.5).

Неважко показати, що (3.31) є кватерніонним аналогом співвідношення (3.7).

Доведення.

Дійсно, (3.6) можна перетворити до такого вигляду:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{SP} &= \cos \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos \delta) \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_1 & e_2^2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & e_3^2 \end{bmatrix} + \sin \delta \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= (2q_0^2 - 1) \cdot \mathbf{E} + \\ &+ 2 \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \cdot \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_1 & e_2^2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & e_3^2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \sin \frac{\delta}{2} \cdot \cos \frac{\delta}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= (2q_0^2 - 1) \cdot \mathbf{E} + 2 \cdot \begin{bmatrix} q_1^2 & q_1q_2 & q_1q_3 \\ q_2q_1 & q_2^2 & q_2q_3 \\ q_3q_1 & q_3q_2 & q_3^2 \end{bmatrix} + 2 \cdot q_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= (2q_0^2 - 1) \cdot \mathbf{E} + 2 \cdot [(1 - q_0^2) \cdot \mathbf{E} + (\mathbf{q} \times) \cdot (\mathbf{q} \times)] + 2 \cdot q_0 \cdot (\mathbf{q} \times) = \\ &= \mathbf{E} + 2 \cdot (\mathbf{q} \times) \cdot (\mathbf{q} \times) + 2 \cdot q_0 \cdot (\mathbf{q} \times). \end{aligned}$$

Це й потрібно було довести.

Установимо тепер правило перетворення кватерніонів поворотів при складанні поворотів. Нехай перший перехід від початкової системи відліку S до проміжної системи T описується кватерніоном \mathbf{Q}^{ST} , а другий перехід – від системи T до системи P – кватерніоном \mathbf{Q}^{TP} . Тоді, користуючись (3.22), можна записати

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{Q}^{ST} \circ \mathbf{x}_T \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{ST}; \quad \mathbf{x}_T = \mathbf{Q}^{TP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{TP}; \quad \mathbf{x}_S = \mathbf{Q}^{SP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP}.$$

Підставивши другий вираз у перший, матимемо

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{Q}^{ST} \circ \mathbf{Q}^{TP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{TP} \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{ST},$$

порівнюючи який із третім виразом, отримаємо

$$\mathbf{Q}^{SP} = \mathbf{Q}^{ST} \circ \mathbf{Q}^{TP} \quad (3.32)$$

Звідси випливає таке правило складання поворотів через кватерніони: *кватерніон результуючого повороту дорівнює кватерніонному добутку кватерніонів складових поворотів у порядку (зліва направо) здійснення самих поворотів.*

3.6. Вектор повороту Гіббса

Поворот Ейлера можна подати у вигляді *вектора повороту Гіббса* \mathbf{g}^{SP} :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_S^{SP} &= g_{1S}^{SP} \cdot \mathbf{1}_S + g_{2S}^{SP} \cdot \mathbf{2}_S + g_{3S}^{SP} \cdot \mathbf{3}_S = \\ &= tg \frac{\delta}{2} (e_{1S} \cdot \mathbf{1}_S + e_{2S} \cdot \mathbf{2}_S + e_{3S} \cdot \mathbf{3}_S) = tg \frac{\delta}{2} \cdot \mathbf{e}_S \end{aligned} \quad (3.33)$$

Тут g_{1S}^{SP} , g_{2S}^{SP} , g_{3S}^{SP} – проєкції вектора Гіббса на напрямки осей початкової системи відліку, $\mathbf{1}_S$, $\mathbf{2}_S$, $\mathbf{3}_S$ – позначення ортів цієї системи, а

$$\mathbf{e}_S = e_{1S} \cdot \mathbf{1}_S + e_{2S} \cdot \mathbf{2}_S + e_{3S} \cdot \mathbf{3}_S$$

– позначення одиничного вектора осі Ейлера.

Як випливає з визначення, довжина вектора Гіббса дорівнює тангенсу половини кута ейлерового повороту, а напрямок збігається з додатним напрямком осі цього повороту. З останнього випливає, що *проєкції вектора Гіббса, який описує поворот, що переводить одну систему відліку у іншу, однакові в обох цих системах відліку*, тобто вектор Гіббса має такі властивості:

$$\mathbf{g}_S^{SP} = \mathbf{g}_P^{SP} = \mathbf{C}^{SP} \cdot \mathbf{g}_P^{SP} = (\mathbf{C}^{SP})^t \cdot \mathbf{g}_S^{SP},$$

або просто (знімаючи непотрібні індекси)

$$\mathbf{g}^{SP} = \mathbf{C}^{SP} \cdot \mathbf{g}^{SP} = (\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \mathbf{g}^{SP}.$$

Замість (3.33) можна використовувати матричне подання вектора Гіббса

$$\mathbf{g}^{SP} = [g_1^{SP}, g_2^{SP}, g_3^{SP}]^T = tg \frac{\delta}{2} [e_1, e_2, e_3]^T = tg \frac{\delta}{2} \cdot \mathbf{e}.$$

Матриця напрямних косинусів пов'язана з вектором Гіббса залежністю:

$$\mathbf{C}^{SP} = \frac{[1 - (\mathbf{g}^{SP})^T \cdot \mathbf{g}^{SP}] \cdot \mathbf{E} + 2 \cdot \mathbf{g}^{SP} \cdot (\mathbf{g}^{SP})^T + 2 \cdot (\mathbf{g}^{SP} \times)}{1 + (\mathbf{g}^{SP})^T \cdot \mathbf{g}^{SP}}. \quad (3.34)$$

Виразимо (3.34) через кут δ і матрицю-стовпець \mathbf{e} одиничного вектора Ейлера повороту, враховуючи (див. (1.19) та (1.20)), що

$$(\mathbf{g}^{SP})^T \cdot \mathbf{g}^{SP} = tg^2 \frac{\delta}{2} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = tg^2 \frac{\delta}{2}; \quad (\mathbf{g}^{SP} \times) = tg \frac{\delta}{2} \cdot (\mathbf{e} \times);$$

$$1 + (\mathbf{g}^{SP})^T \cdot \mathbf{g}^{SP} = 1 + tg^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\delta}{2}}; \quad 1 - (\mathbf{g}^{SP})^T \cdot \mathbf{g}^{SP} = 1 - tg^2 \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \delta}{\cos^2 \frac{\delta}{2}};$$

$$\mathbf{g}^{SP} \cdot (\mathbf{g}^{SP})^T = tg^2 \frac{\delta}{2} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T) = tg^2 \frac{\delta}{2} \cdot \text{diad}(\mathbf{e}) = tg^2 \frac{\delta}{2} \cdot [\mathbf{E} + (\mathbf{e} \times)^2].$$

Отже

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{SP} &= \frac{[1 - tg^2 \frac{\delta}{2}] \cdot \mathbf{E} + 2 \cdot tg^2 \frac{\delta}{2} \cdot [\mathbf{E} + (\mathbf{e} \times)^2] + 2 \cdot tg \frac{\delta}{2} \cdot (\mathbf{e} \times)}{1 + tg^2 \frac{\delta}{2}} = \\ &= \mathbf{E} + \frac{2 \cdot tg \frac{\delta}{2}}{1 + tg^2 \frac{\delta}{2}} \left[(\mathbf{e} \times) + tg \frac{\delta}{2} (\mathbf{e} \times)^2 \right] = \mathbf{E} + \frac{2}{1 + tg^2 \frac{\delta}{2}} \left[(\mathbf{g}^{SP} \times) + (\mathbf{g}^{SP} \times)^2 \right] = \\ &= \mathbf{E} + \sin \delta \cdot (\mathbf{e} \times) + (1 - \cos \delta) \cdot (\mathbf{e} \times)^2. \end{aligned}$$

Перетворення проєкцій будь-якого вектора \mathbf{x} з однієї системи відліку (P) в іншу (S) через вектор Гіббса здійснюється у такий спосіб:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_S &= \mathbf{C}^{SP} \mathbf{X}_P = \frac{[1 - (\mathbf{g}^{SP})^T \cdot \mathbf{g}^{SP}] \mathbf{X}_P + 2(\mathbf{g}^{SP})^T \mathbf{X}_P \cdot \mathbf{g}^{SP} + 2(\mathbf{g}^{SP} \times) \mathbf{X}_P}{1 + (\mathbf{g}^{SP})^T \mathbf{g}^{SP}} = \quad (3.35) \\ &= \mathbf{X}_P + \frac{2}{1 + tg^2 \frac{\delta}{2}} (\mathbf{g}^{SP} \times) [\mathbf{X}_P + (\mathbf{g}^{SP} \times) \cdot \mathbf{X}_P] = \{ \mathbf{E} + (1 - \cos \delta) \cdot (\mathbf{e} \times)^2 + \sin \delta \cdot (\mathbf{e} \times) \} \cdot \mathbf{X}_P. \end{aligned}$$

Це повністю збігається з (3.8).

Щоб можна було користуватися вектором Гіббса для опису складних поворотів, треба ще встановити правило "підсумовування" поворотів, тобто відшукування вектора Гіббса результуючого повороту за заданими векторами Гіббса складових поворотів.

Встановимо правило складання поворотів, користуючись правилом (3.32) через кватерніони. Для цього подамо усі кватерніони, що входять у вираз (3.32) у наступній формі

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{SP} &= \cos \frac{\delta_{SP}}{2} (1 + \mathbf{g}^{SP}); & \mathbf{Q}^{ST} &= \cos \frac{\delta_{ST}}{2} (1 + \mathbf{g}^{ST}); \\ \mathbf{Q}^{TP} &= \cos \frac{\delta_{TP}}{2} (1 + \mathbf{g}^{TP}), \end{aligned}$$

де векторні частини кватерніонів позначені через вектори Гіббса

$$\mathbf{g}^{SP} = tg \frac{\delta_{SP}}{2} \mathbf{e}_{SP}; \quad \mathbf{g}^{ST} = tg \frac{\delta_{ST}}{2} \mathbf{e}_{ST}; \quad \mathbf{g}^{TP} = tg \frac{\delta_{TP}}{2} \mathbf{e}_{TP}.$$

Здійснімо перемножування кватерніонів, скориставшись співвідношенням (3.13)

$$\begin{aligned} \cos \frac{\delta_{SP}}{2} (1 + \mathbf{g}^{SP}) &= \cos \frac{\delta_{ST}}{2} (1 + \mathbf{g}^{ST}) \circ \cos \frac{\delta_{TP}}{2} (1 + \mathbf{g}^{TP}) = \\ &= \cos \frac{\delta_{ST}}{2} \cos \frac{\delta_{TP}}{2} \left[(1 - \mathbf{g}^{ST} \cdot \mathbf{g}^{TP}) + \mathbf{g}^{ST} + \mathbf{g}^{TP} + \mathbf{g}^{ST} \times \mathbf{g}^{TP} \right]. \end{aligned}$$

Прирівняємо одне одному скалярні частини отриманих кватерніонів

$$\cos \frac{\delta_{SP}}{2} = \cos \frac{\delta_{ST}}{2} \cos \frac{\delta_{TP}}{2} (1 - \mathbf{g}^{ST} \cdot \mathbf{g}^{TP})$$

і векторні їх частини

$$\cos \frac{\delta_{SP}}{2} \mathbf{g}^{SP} = \cos \frac{\delta_{ST}}{2} \cos \frac{\delta_{TP}}{2} [\mathbf{g}^{ST} + \mathbf{g}^{TP} + \mathbf{g}^{ST} \times \mathbf{g}^{TP}].$$

Звідси випливає **правило складання поворотів через вектори Гіббса**

$$\boxed{\mathbf{g}^{SP} = \mathbf{g}^{ST} \oplus \mathbf{g}^{TP} = \frac{\mathbf{g}^{ST} + \mathbf{g}^{TP} + \mathbf{g}^{ST} \times \mathbf{g}^{TP}}{1 - \mathbf{g}^{ST} \cdot \mathbf{g}^{TP}}}. \quad (3.36a)$$

Знаком \oplus тут позначено операцію "підсумовування" векторів Гіббса.

В матричній формі це виглядає так

$$\mathbf{g}^{SP} = \frac{\mathbf{g}^{ST} + \mathbf{g}^{TP} + (\mathbf{g}^{ST} \times) \cdot \mathbf{g}^{TP}}{1 - (\mathbf{g}^{ST})^T \cdot \mathbf{g}^{TP}}. \quad (3.36)$$

Цю операцію слід розуміти так. Задана деяка початкова система відліку (наприклад, S). У цій системі задані два різних повороти, які переводять цю систему у деякі дві різні системи відліку (від S до T і від S до деякої системи P). Треба визначити у цій же початковій системі вектор результуючого повороту (від системи S до системи P), який виходить внаслідок послідовного повороту спочатку початкової системи на кут першого повороту, а потім одержаної системи (T) на кут другого повороту.

Ця операція є деяким еквівалентом операції (3.3) множення матриць напрямних косинусів для одержання матриці напрямних косинусів результуючого повороту. На відміну від звичайного поняття підсумовування, "підсумовування" векторів Гіббса не є комутативним ($\mathbf{g}_1 \oplus \mathbf{g}_2 \neq \mathbf{g}_2 \oplus \mathbf{g}_1$), бо остання складова чисельника (3.36) змінює свій знак на протилежний при змінюванні порядку підсумовування.

3.7. Вектор скінченного повороту (Родріга)

Спираючись на параметри Ейлера, використовують ряд векторних подань поворотів. Власне, саме вони складають основу теорії скінчених поворотів.

Найбільш розповсюдженим є подання повороту у вигляді так званого вектора скінченного повороту (вектора Родріга):

$$\mathbf{p} = 2 \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \mathbf{e} = 2\mathbf{g}.$$

З виразу (3.35) матриці-стовпця з проекції вектора на осі вихідної системи координат S через вектор-стовпець того самого вектора в проекціях на осі системи кінцевої системи координат P впливає

$$\mathbf{X}_S = \mathbf{X}_P + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2}} (\mathbf{p}^{SP} \times) \left[\mathbf{X}_P + \frac{1}{2} (\mathbf{p}^{SP} \times) \cdot \mathbf{X}_P \right]. \quad (3.37)$$

Отриманий вираз за формою повністю збігається з формулою повороту Родріга [2, (3.1.11), с. 102]. Відмінністю є лише матрична форма (3.37) (замість векторної у [2]) та зміст: якщо у формулі повороту Родріга визначено вектор, у який переходить заданий вектор в результаті повороту на заданий кут (δ) навколо заданої осі (з одиничним вектором \mathbf{e}), то формула (3.37) визначає проекції вектора на осі початкової системи координат за його проекціями на осі кінцевої системи координат, повернутої відносно початкової на той самий кут навколо тієї самої осі.

Правило складання поворотів через вектори Родріга впливає з правила (3.36) складання векторів Гіббса

$$\mathbf{p}^{SP} = \frac{\mathbf{p}^{ST} + \mathbf{p}^{TP} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^{ST} \times \mathbf{p}^{TP}}{1 - \frac{1}{4} \mathbf{p}^{ST} \cdot \mathbf{p}^{TP}}. \quad (3.38)$$

Примітка.

Цікаво відмітити, що формула (3.38) не збігається з відповідною формулою (3.3.13) [2, с. 109] підсумовування скінчених поворотів. У прийнятих тут позначеннях ця формула має вигляд

$$\mathbf{p}^{SP} = \frac{\mathbf{p}^{ST} + \mathbf{p}^{TP} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^{TP} \times \mathbf{p}^{ST}}{1 - \frac{1}{4}\mathbf{p}^{ST} \cdot \mathbf{p}^{TP}}.$$

Вона відрізняється протилежним знаком перед третьою складовою у чисельнику.

Перевірка

Перевіримо ці формули на конкретному прикладі. Нехай, у відповідності до рис 2.4, перший поворот здійснено на кут $\delta_1 = \psi$ навколо осі 1_S , що означає, що $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0\}$. Другий поворот на кут $\delta_2 = \theta$ здійснимо навколо осі 2_K , тобто $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, 0\}$. Як видно з рис. 2.4, вісь результуючого повороту є лінією перетину площини $1_K - 2_K$ з площиною $1_S - 2_S$ і у разі додатних кутів ψ та θ одиничний вектор \mathbf{e} осі результуючого повороту лежить всередині простору, що обмежений додатними півосями 1_S , 2_S та 3_S , тобто відповідні проєкції цього вектора на вказані осі мають бути усі додатними.

Покладемо $\psi = \theta = \frac{\pi}{4}$. У цьому разі матимемо вектори-стовпці складових поворотів

тін

```
psi= pi/4;   teta=psi;   p1=2*tan(psi/2)*[1;0;0],
p2=2*tan(teta/2)*[0;1;0]
p1 = 0.82843
      0
      0
p2 = 0
      0.82843
      0
```

Знайдемо відповідні кососиметричні матриці цих векторів

```
p1ksm=vect2ksm(p1), p2ksm=vect2ksm(p2)
p1ksm = 0      0      0
        0      0     -0.82843
        0     0.82843    0
p2ksm = 0      0     0.82843
        0      0      0
        -0.82843  0      0
```

Спочатку для відшукування результуючого вектора Родріга застосуємо формулу (3.38)

```
p=(p1+p2+p1ksm*p2/2)/(1- p1'*p2/4)
p = 0.82843
    0.82843
    0.34315
```

Як бачимо, усі проєкції вектора є додатними, що вказує на відповідність формули геометричному сенсу. Модуль отриманого результуючого вектора Родріга дорівнює

```
Mr=sqrt(p'*p)
Mr = 1.2208
```

Тому кут результуючого повороту визначиться із співвідношення

```
Dlt=2*atan(Mr/2)
Dlt = 1.0961
```

Напрявні косинуси одиничного вектора осі результуючого повороту у системі координат $1_S - 2_S - 3_S$ дорівнюють

```
eT=p'/Mr
eT = 0.6786  0.6786  0.28108
```

Тепер застосуємо формулу з [2]

```
p=(p1+p2+p2ksm*p1/2)/(1-p1'*p2/4)
p = 0.82843
    0.82843
```


-0.34315

Модуль отриманого вектора та кут результуючого повороту у цьому разі є такими, як й у попередньому випадку. Відрізняються лише проекції одиничного вектора осі результуючого повороту

$$e_T = p' / M p$$

$$e_T = \begin{pmatrix} 0.6786 & 0.6786 & -0.28108 \end{pmatrix} .$$

Це протирічить наочному уявленню про сумарний поворот. Отже, формула, наведена у [2] є невірною.

3.8. Вектор орієнтації (Ейлера)

Ще одним розповсюдженим поданням повороту є вектор орієнтації (вектор Ейлера), який визначається так

$$\Theta = \delta e . \quad (3.39)$$

Правило підсумовування векторів орієнтації виявляється настільки складним, що користуватися ним нераціонально.

3.9. Висновки

Порівнюючи зазначені математичні моделі опису поворотів твердого тіла, можна дійти таких висновків.

1. Опис поворотів за допомогою трьох кутів послідовних поворотів є одним із найкомпактніших (бо містить лише три параметри – кути Ейлера), але він вироджується за певних значень кута другого повороту, не є єдиним і для нього немає досить простого правила складання поворотів.

2. Матриця напрямних косинусів є єдиним і найбільш загальним засобом опису повороту систем відліку, складання поворотів описується досить простим правилом (3.2), але вона має дев'ять параметрів, які пов'язані між собою шістьма співвідношеннями, через що їх не можна вважати незалежними, і при обчисленнях потрібно на кожному кроці перевіряти, чи виконуються вони.

3. Опис поворотів за допомогою векторів Гіббса має ті самі переваги, що й сукупність кутів послідовного повороту, до чого додаються ще наявність правила (3.9) перетворень векторів Гіббса при складанні поворотів та єдиність подання; недоліком є вироджуваність вектора Гіббса при куті повороту $\delta = \pi$ й складність правила складання (3.9) при розповсюдженні його більш ніж за два повороти.

4. Найбільш вдалим є подання поворотів за допомогою кватерніонів; подання повороту у вигляді кватерніону є єдиним, визначається чотирма параметрами, які не вироджуються за довільних поворотів, правило (3.31) складання поворотів для кватерніонів дуже просте – воно зводиться до простого перемножування кватерніонів складових поворотів; але недоліком є зайва кількість параметрів, які пов'язані між собою співвідношенням

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 .$$

4. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПОДАННЯ КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ ТІЛА

В механіці часто трапляються ситуації, коли вектор заданий своїми проекціями на осі деякої рухомої системи відліку, причому прирости цього вектора й у подальшому зручно описувати саме у цій рухомій системі. Оскільки основні закони механіки сформульовані для "нерухомої" інерціальної системи відліку, необхідно встановити залежність між швидкостями змінювання вектора відносно рухомої й нерухомої системи відліку. Для цього, у першу чергу, потрібно вирішити питання: як визначити абсолютну швидкість змінювання вектора

(тобто відносно "нерухомої" системи відліку), якщо є відомими його відносні (відносно рухомої системи відліку) координати і визначене обертання рухомої системи відліку в абсолютній системі відліку?

4.1. Правило диференціювання вектора у рухомій системі відліку

Нехай рухома P і нерухома S системи відліку мають спільний початок.

Умовно нерухома систему координат S називатимемо "абсолютною", а рух відносно неї – "абсолютним" рухом.

Розглянемо довільний вектор \mathbf{a} , початок якого суміщено з початком обох систем відліку (див. рис. 1.1). Абсолютне положення кінця вектора (точки A) пов'язане з відносними його координатами матричним співвідношенням

$$\mathbf{A}_S = \mathbf{C}^{SP} \cdot \mathbf{A}_P, \quad (4.1)$$

де \mathbf{A}_S і \mathbf{A}_P – матриці-стовпці із проекцій вектора на осі відповідно нерухомої й рухомої систем відліку, а \mathbf{C}^{SP} – матриця напрямних косинусів переходу від нерухомої до рухомої системи відліку.

Знайдемо похідну за часом від обох частин цієї матричної рівності:

$$\frac{d\mathbf{A}_S}{dt} = \mathbf{C}^{SP} \cdot \frac{d\mathbf{A}_P}{dt} + \frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt} \cdot \mathbf{A}_P. \quad (4.2)$$

У лівій частині матричної рівності (4.2) маємо матрицю-стовпець, яка складається з похідних за часом від проекцій вектора \mathbf{a} на осі нерухомої системи S (тобто проекції "абсолютної" швидкості змінювання вектора на осі "абсолютної" системи). Перший доданок у правій частині є матрицею-стовпцем із проекцій швидкості вектора \mathbf{a} відносно рухомої системи, яка є перепроєційованою на осі нерухомої системи S . Другий доданок описує, вочевидь, переносну складову швидкості вектора \mathbf{a} , оскільки залежить від швидкості змінювання елементів матриці напрямних косинусів, яка перетворює абсолютну систему S у рухома P .

Перепроєціюємо рівність (4.2) на осі рухомої системи координат, для чого почленно помножимо (4.2) зліва на матрицю $\mathbf{C}^{PS} = (\mathbf{C}^{SP})^T$ і врахуємо, що $\mathbf{C}^{PS} \cdot \mathbf{C}^{SP} = \mathbf{E}$ та $\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}_P = \mathbf{A}_P$:

$$(\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \frac{d\mathbf{A}_S}{dt} = \frac{d\mathbf{A}_P}{dt} + (\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt} \cdot \mathbf{A}_P. \quad (4.3)$$

Матричний вираз (4.3) можна прочитати у такий спосіб:

проекції абсолютної швидкості змінювання будь-якого вектора на осі рухомої системи відліку складаються із двох складових – проекцій відносної швидкості цього вектора на осі цієї ж рухомої системи та проекцій переносної швидкості вектора, обумовленої обертанням із деякою кутовою швидкістю рухомої системи відносно абсолютної.

Матриця $(\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt}$, як неважко впевнитися, є кососиметричною.

Дійсно, якщо узяти похідну за часом від обох частин векторної рівності $(\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \mathbf{C}^{SP} = \mathbf{E}$ і врахувати при цьому, що похідна від одиничної матриці \mathbf{E} , як від постійної, дорівнює нулю, дійдемо

$$\left(\frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt} \right)^T \cdot \mathbf{C}^{SP} = -(\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt}; \quad \Rightarrow \quad \left((\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt} \right)^T = -(\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt},$$

що й доводить стверджене.

З цього випливає, що матриця $(\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt}$ репрезентує собою у вигляді кососиметричної матриці деякий вектор, який повністю визначається швидкістю змінювання матриці напрямних косинусів. Тому вираз (4.3) можна подати так

$$\boxed{(\mathbf{C}^{SP})^T \frac{d\mathbf{A}_S}{dt} = \frac{d\mathbf{A}_P}{dt} + (\boldsymbol{\omega}_P^{PS} \times) \cdot \mathbf{A}_P.} \quad (4.4)$$

Тут позначено

$$(\boldsymbol{\omega}_P^{PS} \times) = (\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{3P}^{PS} & \omega_{2P}^{PS} \\ \omega_{3P}^{PS} & 0 & -\omega_{1P}^{PS} \\ -\omega_{2P}^{PS} & \omega_{1P}^{PS} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Матриця-стовпець $\boldsymbol{\omega}_P^{PS} = [\omega_{1P}^{PS}, \omega_{2P}^{PS}, \omega_{3P}^{PS}]^T$ визначає вектор $\boldsymbol{\omega}^{PS}$ кутової швидкості обертання системи координат P відносно системи координат S у його проекціях на осі рухомої системи координат.

Матричне співвідношення (4.2) з врахуванням (4.1) можна записати так:

$$\frac{d\mathbf{A}_S}{dt} = \mathbf{C}^{SP} \cdot \frac{d\mathbf{A}_P}{dt} + \frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt} (\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \mathbf{A}_S.$$

Розмірковуючи аналогічно, матимемо

$$\boxed{\frac{d\mathbf{A}_S}{dt} = \mathbf{C}^{SP} \cdot \frac{d\mathbf{A}_P}{dt} + (\boldsymbol{\omega}_S^{PS} \times) \mathbf{A}_S,} \quad (4.6)$$

де

$$(\boldsymbol{\omega}_S^{PS} \times) = \frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt} \cdot (\mathbf{C}^{SP})^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{3S}^{PS} & \omega_{2S}^{PS} \\ \omega_{3S}^{PS} & 0 & -\omega_{1S}^{PS} \\ -\omega_{2S}^{PS} & \omega_{1S}^{PS} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

є кососиметричним поданням того самого вектора кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}^{PS}$ у його проекціях на осі системи S .

У векторній формі матричні залежності (4.4) та (4.7) зазвичай записують в єдиному вигляді

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}_P \mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^{PS} \times \mathbf{a}. \quad (4.8)$$

Тут позначено: $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ – абсолютна похідна вектора \mathbf{a} (точніше, швидкість вектора \mathbf{a}

відносно умовно нерухомої системи координат S); $\frac{\tilde{d}_P \mathbf{a}}{dt}$ – локальна похідна вектора \mathbf{a} (його швидкість відносно рухомої системи координат P); $\boldsymbol{\omega}^P$ – вектор абсолютної кутової швидкості рухомої системи (тобто відносно умовно нерухомої системи координат).

У проекціях на осі рухомої системи координат P векторне рівняння (4.8) еквівалентно трьом скалярним рівнянням

$$\begin{cases} \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{1P} = \frac{da_{1P}}{dt} + \omega_{2P}^{PS} a_{3P} - \omega_{3P}^{PS} a_{2P}; \\ \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{2P} = \frac{da_{2P}}{dt} + \omega_{3P}^{PS} a_{1P} - \omega_{1P}^{PS} a_{3P}; \\ \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{3P} = \frac{da_{3P}}{dt} + \omega_{1P}^{PS} a_{2P} - \omega_{2P}^{PS} a_{1P}, \end{cases}$$

і є рівносильним матричному рівнянню (4.4). Якщо ж спроеціювати (4.8) на осі нерухомої системи S , отримаємо

$$\begin{cases} \frac{da_{1S}}{dt} = c_{11}^{SP} \frac{da_{1P}}{dt} + c_{12}^{SP} \frac{da_{2P}}{dt} + c_{13}^{SP} \frac{da_{3P}}{dt} + \omega_{2S}^{PS} a_{3S} - \omega_{3S}^{PS} a_{2S}; \\ \frac{da_{2S}}{dt} = c_{21}^{SP} \frac{da_{1P}}{dt} + c_{22}^{SP} \frac{da_{2P}}{dt} + c_{23}^{SP} \frac{da_{3P}}{dt} + \omega_{3S}^{PS} a_{1S} - \omega_{1S}^{PS} a_{3S}; \\ \frac{da_{3S}}{dt} = c_{31}^{SP} \frac{da_{1P}}{dt} + c_{32}^{SP} \frac{da_{2P}}{dt} + c_{33}^{SP} \frac{da_{3P}}{dt} + \omega_{1S}^{PS} a_{2S} - \omega_{2S}^{PS} a_{1S}, \end{cases}$$

що є поелементним поданням матричного рівняння (4.6).

На основі (4.8) можна сформулювати **правило диференціювання вектора у рухомій системі відліку**:

абсолютна похідна за часом від вектора дорівнює сумі його локальної похідної (відносно рухомої системи відліку) та векторного добутку вектора абсолютної кутової швидкості обертання цієї рухомої системи на сам вектор.

Можна також сформулювати це правило так:

абсолютна швидкість вектора дорівнює його відносній швидкості, складеній з переносною швидкістю, обумовленою обертанням рухомої системи відліку і рівною векторному добутку вектора абсолютної кутової швидкості рухомої системи відліку на сам вектор.

Подання правила диференціювання вектора у векторній формі (4.8) є компактним і простим. Але матричні форми (4.4) та (4.6) цього правила дають більш конкретну інформацію, як слід поводитися з заданими проекціями векторів. Зокрема, якщо відомими є проекції кутової швидкості рухомої системи координат на осі рухомої ж системи, то перевагу слід віддати формі (4.4). Якщо ж проекції кутової швидкості задані в нерухомій системі координат – то слід використовувати форму (4.6)

4.2. Кінематичні рівняння Пуассона

Із співвідношення (4.5) випливає диференціальне рівняння

$$\frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt} = \mathbf{C}^{SP} \cdot (\boldsymbol{\omega}_P^{PS} \times), \tag{4.9}$$

яке можна використати для визначення похідної від матриці напрямних косинусів за заданими проекціями кутової швидкості. Воно називається **рівнянням Пуассона**.

Аналогічно, з (4.7) випливає

$$\frac{d\mathbf{C}^{SP}}{dt} = (\boldsymbol{\omega}_S^{PS} \times) \cdot \mathbf{C}^{SP}, \tag{4.10}$$

яке є однією з форм того ж **рівняння Пуассона**.

Отже, існують дві форми кінематичного рівняння Пуассона, які відрізняються лише тим, на осі якої системи координат заданий вектор кутової швидкості повороту рухомої системи координат, – якщо на осі самої рухомої системи, то слід обирати (4.9), якщо ж на осі нерухомої системи координат, то слід використовувати форму (4.10).

4.3. Кінематичні рівняння Ейлера

Найбільш поширеною формою кінематичних рівнянь є така, в якій вони подані через кути Ейлера послідовних поворотів.

Через те що подання повороту через кути послідовних поворотів не є єдиним, форма кінематичних рівнянь у цьому випадку також не є єдиною і визначається цією послідовністю поворотів. Тому розглянемо як приклад кінематичні рівняння для послідовності, поданої на рис. 2.4.

Вектор кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}^P$ системи P відносно системи S, як очевидно (див. рис. 2.4), складається з трьох векторних складових, що відповідають швидкостям змінювання трьох кутів послідовних поворотів:

$$\boldsymbol{\omega}^P = \dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\phi}}.$$

Якщо спроеціювати це векторне співвідношення на осі системи S, одержимо (див. рис. 2.4):

$$\begin{cases} \omega_{1S}^P = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cdot \sin \theta; \\ \omega_{2S}^P = \dot{\theta} \cdot \cos \psi - \dot{\phi} \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi; \\ \omega_{3S}^P = \dot{\theta} \cdot \sin \psi + \dot{\phi} \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi; \end{cases} \quad (4.11)$$

Проеціювання на осі рухомої системи приводить до результату

$$\begin{cases} \omega_{1P}^P = \dot{\theta} \cdot \sin \phi + \dot{\psi} \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi; \\ \omega_{2P}^P = \dot{\theta} \cdot \cos \phi - \dot{\psi} \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi; \\ \omega_{3P}^P = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cdot \sin \theta. \end{cases} \quad (4.12)$$

Рівняння типу (4.11) і (4.12), які виражають проекції кутової швидкості деякої системи відліку через швидкості змінювання кутів послідовних поворотів, що визначають кутове положення цієї системи, будемо називати *кінематичними рівняннями Ейлера*. Так само називатимемо у подальшому й обернені рівняння, що виражають швидкості змінювання кутів Ейлера через проекції кутової швидкості:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \omega_{1S}^P - \operatorname{tg} \theta (\omega_{3S}^P \cos \psi - \omega_{2S}^P \sin \psi); \\ \dot{\theta} = \omega_{2S}^P \cos \psi + \omega_{3S}^P \sin \psi; \\ \dot{\phi} = (\omega_{3S}^P \cos \psi - \omega_{2S}^P \sin \psi) / \cos \theta; \\ \dot{\psi} = (\omega_{1P}^P \cdot \cos \phi - \omega_{2P}^P \cdot \sin \phi) / \cos \theta; \\ \dot{\theta} = \omega_{2P}^P \cdot \cos \phi + \omega_{1P}^P \cdot \sin \phi; \\ \dot{\phi} = \omega_{3S}^P - \operatorname{tg} \theta \cdot (\omega_{1P}^P \cdot \cos \phi - \omega_{2P}^P \cdot \sin \phi). \end{cases}$$

4.4. Кінематичні рівняння у кватерніонах

Для одержання аналогічних рівнянь у кватерніонній формі, скористаємося рівнянням повороту (3.25).

Візьмемо похідну за часом з обох частин цього рівняння. Одержимо (крапка зверху позначає похідну за часом):

$$\dot{\mathbf{a}}_S = \mathbf{Q}^{SP} \circ \dot{\mathbf{a}}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} + \dot{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{a}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} + \mathbf{Q}^{SP} \circ \mathbf{a}_P \circ \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}^{SP}. \quad (4.13)$$

Перепроеціюємо одержаний результат на осі системи P (див. (3.26)):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{a}}_S \circ \mathbf{Q}^{SP} &= \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} \circ \dot{\mathbf{a}}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} + \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{a}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} + \\ &+ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} \circ \mathbf{a}_P \circ \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} = \dot{\mathbf{a}}_P + \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{a}_P + \mathbf{a}_P \circ \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP}. \end{aligned}$$

Використаємо співвідношення

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} = 1,$$

яке випливає з того, що кватерніон повороту є нормованим. Диференціюючи його за часом, отримуємо

$$\dot{\tilde{\mathbf{Q}}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} = -\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP}.$$

З врахуванням цього можна записати:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{a}}_S \circ \mathbf{Q}^{SP} &= \dot{\mathbf{a}}_P + \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{a}_P - \mathbf{a}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP} = \\ &= \dot{\mathbf{a}}_P + 2 \cdot (\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP}) \times \mathbf{a}_P \end{aligned} \quad (4.14)$$

Тут враховано властивість (3.14а) і позначено $(\mathbf{Q}) \times = \mathbf{q} \times$ векторний добуток векторної частини кватерніону \mathbf{Q} на наступний вектор.

Доведемо, що добуток спряженого до кватерніону повороту на його похідну за часом завжди є вектором, тобто його скалярна частина дорівнює нулеві:

$$sqal(\tilde{\mathbf{Q}} \circ \dot{\mathbf{Q}}) = 0. \quad (4.15)$$

Доведення.

Запишемо кватерніон повороту у виді (див. (3.22), (3.23))

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \cdot (e_1 \cdot \mathbf{i} + e_2 \cdot \mathbf{j} + e_3 \cdot \mathbf{k}),$$

причому виконується співвідношення

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \quad (4.16)$$

Тоді матимемо:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \cos \frac{\delta}{2} - \sin \frac{\delta}{2} \cdot (e_1 \cdot \mathbf{i} + e_2 \cdot \mathbf{j} + e_3 \cdot \mathbf{k});$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= \frac{\dot{\delta}}{2} \cdot \left\{ -\sin \frac{\delta}{2} + \cos \frac{\delta}{2} \cdot (e_1 \cdot \mathbf{i} + e_2 \cdot \mathbf{j} + e_3 \cdot \mathbf{k}) \right\} + \sin \frac{\delta}{2} (\dot{e}_1 \cdot \mathbf{i} + \dot{e}_2 \cdot \mathbf{j} + \dot{e}_3 \cdot \mathbf{k}) = \\ &= -\frac{\dot{\delta}}{2} \cdot \sin \frac{\delta}{2} + \mathbf{i} \cdot \left(\frac{\dot{\delta}}{2} \cdot e_1 \cdot \cos \frac{\delta}{2} + \dot{e}_1 \cdot \sin \frac{\delta}{2} \right) + \mathbf{j} \cdot \left(\frac{\dot{\delta}}{2} \cdot e_2 \cdot \cos \frac{\delta}{2} + \dot{e}_2 \cdot \sin \frac{\delta}{2} \right) + \\ &+ \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\dot{\delta}}{2} \cdot e_3 \cdot \cos \frac{\delta}{2} + \dot{e}_3 \cdot \sin \frac{\delta}{2} \right). \end{aligned}$$

Перемножимо знайдені кватерніони й обмежимося визначенням лише скалярної частини результату:

$$\begin{aligned} sqal(\tilde{\mathbf{Q}} \circ \dot{\mathbf{Q}}) &= \cos \frac{\delta}{2} \cdot \left(-\frac{\dot{\delta}}{2} \cdot \sin \frac{\delta}{2} \right) + \sin \frac{\delta}{2} \cdot \left\{ e_1 \cdot \left(\frac{\dot{\delta}}{2} \cdot e_1 \cdot \cos \frac{\delta}{2} + \dot{e}_1 \cdot \sin \frac{\delta}{2} \right) + \right. \\ &+ e_2 \cdot \left(\frac{\dot{\delta}}{2} \cdot e_2 \cdot \cos \frac{\delta}{2} + \dot{e}_2 \cdot \sin \frac{\delta}{2} \right) + e_3 \cdot \left(\frac{\dot{\delta}}{2} \cdot e_3 \cdot \cos \frac{\delta}{2} + \dot{e}_3 \cdot \sin \frac{\delta}{2} \right) \left. \right\} = \\ &= -\sin \frac{\delta}{2} \cdot \left\{ \frac{\dot{\delta}}{2} \cdot \cos \frac{\delta}{2} - \frac{\dot{\delta}}{2} \cdot \cos \frac{\delta}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + \sin \frac{\delta}{2} \cdot (e_1 \cdot \dot{e}_1 + e_2 \cdot \dot{e}_2 + e_3 \cdot \dot{e}_3) \right\} \end{aligned}$$

З огляду на (4.16) і співвідношення, яке випливає з нього

$$\frac{d}{dt}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 2(e_1 \cdot \dot{e}_1 + e_2 \cdot \dot{e}_2 + e_3 \cdot \dot{e}_3) = 0,$$

можна дійти висновку (4.15). *що й потрібно було довести.*

Тепер порівняємо рівність (4.14) із (4.5). Обидві вони, очевидно, описують ту саму залежність дещо відмінними засобами. Є повна відповідність один одному кожного із членів цих двох рівнянь. Тому, зіставляючи останні члени рівнянь, можна зробити висновок, що векторний кватерніон $2 \cdot (\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP})$ має дорівнювати вектор-кватерніону із проєкцій на осі системи P вектора кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}^{PS}$ обертання системи P відносно системи S. Позначаючи цей кватерніон $\boldsymbol{\Omega}_P^{PS}$

$$\boldsymbol{\Omega}_P^{PS} = \mathbf{1}_P \cdot \omega_{1P}^{PS} + \mathbf{2}_P \cdot \omega_{2P}^{PS} + \mathbf{3}_P \cdot \omega_{3P}^{PS}.$$

можна встановити таке кватерніонне кінематичне рівняння

$$\boldsymbol{\Omega}_P^{PS} = 2 \cdot (\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt}).$$

Розв'язуючи це рівняння відносно похідної, отримаємо

$$\boxed{\frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{SP} \circ \boldsymbol{\Omega}_P^{PS}}. \quad (4.17)$$

Дещо перетворимо рівняння (4.13), використовуючи в ньому, що $\mathbf{a}_P = \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{a}_S \circ \mathbf{Q}^{SP}$. Отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_S &= \mathbf{Q}^{SP} \circ \dot{\mathbf{a}}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} + \dot{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{a}_S \circ \mathbf{Q}^{SP} \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} + \mathbf{Q}^{SP} \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{a}_S \circ \mathbf{Q}^{SP} \circ \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}^{SP} = \\ &= \mathbf{Q}^{SP} \circ \dot{\mathbf{a}}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} + \dot{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{a}_S + \mathbf{a}_S \circ \mathbf{Q}^{SP} \circ \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}^{SP} = \\ &= \mathbf{Q}^{SP} \circ \dot{\mathbf{a}}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} + \dot{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{a}_S - \mathbf{a}_S \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} = \\ &= \mathbf{Q}^{SP} \circ \dot{\mathbf{a}}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} + 2(\dot{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP}) \times \mathbf{a}_S. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Зіставимо співвідношення (4.18) і (4.8). Можна дійти висновку, що

$$\boldsymbol{\Omega}_S^{PS} = 2 \cdot \frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt} \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP},$$

де позначено

$$\boldsymbol{\Omega}_S^{PS} = \mathbf{1}_S \cdot \omega_{1S}^{PS} + \mathbf{2}_S \cdot \omega_{2S}^{PS} + \mathbf{3}_S \cdot \omega_{3S}^{PS}.$$

Інакше це можна записати у такий спосіб

$$\boxed{\frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_S^{PS} \circ \mathbf{Q}^{SP}}. \quad (4.19)$$

Вирази (4.17) та (4.19) є двома формами кінематичного рівняння у кватерніонах. Вираз (4.17) спирається на знання проєкцій кутової швидкості тіла на осі рухомої системи координат P, а вираз (4.19) – на знання проєкцій цього вектора на осі нерухомої системи координат S. У безплатформових інерціальних навігаційних системах використовується форма (4.17).

Резюмуючи, можна сформулювати наступні **правила визначення вектора кутової швидкості**:

вектор-кватерніон із проєкцій кутової швидкості однієї системи відліку відносно іншої на осі першої системи дорівнює подвійному добуткові спряженого кватерніону повороту від другої системи до першої на похідну за часом від кватерніону того ж повороту;

вектор-кватерніон із проєкцій кутової швидкості однієї системи відліку відносно іншої на осі другої (початкової) системи дорівнює подвійному добуткові похідної за часом від кватерніону повороту від другої системи до першої на спряжений кватерніон того ж повороту.

4.5. Матричний аналог кватерніонних кінематичних рівнянь

Для використання кватерніонних кінематичних рівнянь орієнтації (4.17) і (4.19) у теоретичних дослідженнях і розрахунках на ЕОМ зручніше використовувати їхню матричну форму, яка базується на поданні кватерніону через матриці його скалярної і векторної частин. При цьому варто зважити на те, що кватерніон кутової швидкості є вектор-кватерніоном, тобто його скалярна частина дорівнює нулю. Тоді рівняння (4.17) зведеться до наступних двох матричних:

$$\frac{dq^{SP}}{dt} = -\frac{1}{2}(\mathbf{q}^{SP})^T \cdot \boldsymbol{\omega}_P^{PS} \tag{4.20}$$

$$\frac{d\mathbf{q}^{SP}}{dt} = \frac{1}{2}[q^{SP} \cdot \boldsymbol{\omega}_P^{PS} + (\mathbf{q}^{SP} \times) \cdot \boldsymbol{\omega}_P^{PS}],$$

а рівняння (4.19) – до таких

$$\frac{dq^{SP}}{dt} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_S^{PS})^T \cdot \mathbf{q}^{SP}; \tag{4.21}$$

$$\frac{d\mathbf{q}^{SP}}{dt} = \frac{1}{2}[q^{SP} \cdot \boldsymbol{\omega}_S^{PS} + (\boldsymbol{\omega}_S^{PS} \times) \cdot \mathbf{q}^{SP}],$$

4.6. Кінематичні рівняння через вектор Гіббса

Кінематичне рівняння повороту через вектор Гіббса отримуємо з кватерніонних рівнянь.

Розглянемо, наприклад, рівняння (4.17). Врахуємо в ньому, що кватерніон повороту має вигляд (3.23), а тому рівняння (4.17) можна подати так:

$$\frac{d}{dt} \left(\cos \frac{\delta_{SP}}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\sin \frac{\delta_{SP}}{2} \mathbf{e}_{SP} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\delta_{SP}}{2} + \mathbf{e}_{SP} \cdot \sin \frac{\delta_{SP}}{2} \right) \circ \boldsymbol{\Omega}_P^{PS}.$$

Виділимо скалярні і векторні частини кватерніонів в обох рівняннях і, враховуючи (4.20), прирівняємо їх одна до одної. Отримаємо два рівняння:

$$\frac{d}{dt} \left(\cos \frac{\delta_{SP}}{2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{e}_{SP} \cdot \sin \frac{\delta_{SP}}{2} \right) \boldsymbol{\Omega}_P^{PS};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sin \frac{\delta_{SP}}{2} \mathbf{e}_{SP} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\delta_{SP}}{2} \boldsymbol{\Omega}_P^{PS} + \mathbf{e}_{SP} \times \boldsymbol{\Omega}_P^{PS} \cdot \sin \frac{\delta_{SP}}{2} \right).$$

Перейдемо в них до вектора Гіббса (3.33):

$$\frac{d}{dt} \left(\cos \frac{\delta_{SP}}{2} \right) = -\frac{1}{2} \cos \frac{\delta_{SP}}{2} (\mathbf{g}^{SP} \cdot \boldsymbol{\Omega}_P^{PS}); \tag{4.22}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\cos \frac{\delta_{SP}}{2} \mathbf{g}^{SP} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\delta_{SP}}{2} \boldsymbol{\Pi}_P^{PS} + \cos \frac{\delta_{SP}}{2} \mathbf{g}^{SP} \times \boldsymbol{\Pi}_P^{PS} \right). \tag{4.23}$$

Перетворимо рівняння (4.23):

$$\frac{d}{dt} \left(\cos \frac{\delta_{SP}}{2} \right) \mathbf{g}^{SP} + \cos \frac{\delta_{SP}}{2} \frac{d\mathbf{g}^{SP}}{dt} = \frac{1}{2} \cos \frac{\delta_{SP}}{2} \boldsymbol{\Omega}_P^{PS} + \frac{1}{2} \cos \frac{\delta_{SP}}{2} \mathbf{g}^{SP} \times \boldsymbol{\Omega}_P^{PS},$$

або

$$\frac{d\mathbf{g}^{SP}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\Omega}_P^{PS} + \mathbf{g}^{SP} \times \boldsymbol{\Omega}_P^{PS} \right) - \frac{1}{\cos \frac{\delta_{SP}}{2}} \frac{d}{dt} \left(\cos \frac{\delta_{SP}}{2} \right) \mathbf{g}^{SP}.$$

Якщо ж в останньому виразі врахувати (4.22), матимемо остаточно

$$\boxed{\frac{d\mathbf{g}^{SP}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\Omega}_P^{PS} + \mathbf{g}^{SP} \times \boldsymbol{\Omega}_P^{PS} \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}^{SP} \cdot \boldsymbol{\Omega}_P^{PS} \right) \mathbf{g}^{SP}}. \quad (4.24)$$

Аналогічно з (4.19) виходить

$$\frac{d\mathbf{g}^{SP}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\Omega}_S^{PS} + \mathbf{g}^{SP} \times \boldsymbol{\Omega}_S^{PS} \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}^{SP} \cdot \boldsymbol{\Omega}_S^{PS} \right) \mathbf{g}^{SP}. \quad (4.25)$$

Примітка. Вираз (4.24) можна отримати також з правила (3.36) підсумовування векторів Гіббса. Дійсно, нехай перший поворот (\mathbf{g}^{ST}) буде просто \mathbf{g} , а другий – (\mathbf{g}^{TP}) – нескінченно малим ds . В результаті їх підсумовування виходить третій вектор (\mathbf{g}^{SP}), який подати як просту векторну (геометричну) суму першого вектора з новим (невідомим) вектором $d\mathbf{g}$, який, очевидно, теж буде нескінченно малим за величиною. Використовуючи (3.13), матимемо

$$\mathbf{g} + d\mathbf{g} = \frac{\mathbf{g} + ds + \mathbf{g} \times ds}{1 - \mathbf{g} \cdot ds} \approx \mathbf{g} + ds + \mathbf{g} \times ds + \mathbf{g}(\mathbf{g} \cdot ds).$$

Звідси випливає

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \frac{ds}{dt} + \mathbf{g} \times \frac{ds}{dt} + \mathbf{g}(\mathbf{g} \cdot \frac{ds}{dt}).$$

Але $\frac{ds}{dt}$ можна розглядати як кутову швидкість самого тіла у проєкціях на осі, зв'язані з тілом ($\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_S^{PS}$). Тому останній вираз еквівалентний рівнянню (4.25).

4.7. Кінематичні рівняння через вектор Родріга

Кінематичні рівняння через вектор скінченного повороту (вектор Родріга) легко отримати з рівнянь вектора Гіббса (4.24) та (4.25), якщо врахувати зв'язок між цими векторами (див. п. 3.7):

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_P^{PS} + \frac{1}{2} \mathbf{p} \times \boldsymbol{\Omega}_P^{PS} + \frac{1}{4} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Omega}_P^{PS}) \mathbf{p}}.$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_S^{PS} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_S^{PS} \times \mathbf{p} + \frac{1}{4} (\boldsymbol{\Omega}_S^{PS} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p}. \quad (4.26)$$

Як бачимо, як й у разі рівнянь Пуассона і кватерніонних рівнянь, отримано два різних рівняння з різними способами подання вектора кутової швидкості. Найбільш суттєва відмінність між ними – протилежні знаки при других складових у правих частинах рівнянь. У відомій літературі [1, 2] наводиться лише друге рівняння (4.26). Однак для розв'язування задачі обчислення поточних параметрів орієнтації за допомогою безплатформових систем орієнтації (БІСО) цей різновид виявляється непридатним, бо БІСО спираються на вимірювання проєкцій кутової швидкості основи на осі, пов'язані саме з рухомою основою.

До речі, друге рівняння (4.26) випливає з правила складання векторів скінченного повороту

$$\mathbf{p}^{SP} = \frac{\mathbf{p}^{ST} + \mathbf{p}^{TP} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^{TP} \times \mathbf{p}^{ST}}{1 - \frac{1}{4}\mathbf{p}^{ST} \cdot \mathbf{p}^{TP}}.$$

яке повністю збігається з (3.3.13) [2, с. 109]. При цьому $\mathbf{\Omega}_S^{PS} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}$, а усі вектори визначені у нерухомій системі координат.

4.8. Кінематичні рівняння через вектор Ейлера

Для встановлення кінематичного рівняння через вектор орієнтації (вектор Ейлера), використаємо співвідношення (4.17) і (3.23) з врахуванням позначення (3.39) вектора орієнтації:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\cos \frac{\delta}{2} \right) &= -\frac{1}{2\delta} \sin \frac{\delta}{2} (\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega}_P^{PS}); \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\delta} \sin \frac{\delta}{2} \mathbf{\Theta} \right) &= \frac{1}{2} \cos \frac{\delta}{2} \mathbf{\Omega}_P^{PS} + \frac{1}{2\delta} \sin \frac{\delta}{2} \mathbf{\Theta} \times \mathbf{\Omega}_P^{PS}. \end{aligned}$$

Друге співвідношення можна перетворити до такого

$$\frac{d\mathbf{\Theta}}{dt} = \frac{\delta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \mathbf{\Omega}_P^{PS} + \frac{1}{2} \mathbf{\Theta} \times \mathbf{\Omega}_P^{PS} - \frac{\delta}{\sin \frac{\delta}{2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\delta} \sin \frac{\delta}{2} \right) \mathbf{\Theta}. \tag{4.27}$$

З першого рівняння випливає

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{\delta} (\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega}_P^{PS}),$$

з врахуванням якого можна дістати

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\delta} \sin \frac{\delta}{2} \right) = -\frac{1}{\delta} \sin \frac{\delta}{2} \frac{1 - \frac{\delta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}}{\delta^2} (\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega}_P^{PS}).$$

Тепер (4.27) можна подати у вигляді

$$\frac{d\mathbf{\Theta}}{dt} = \mathbf{\Omega}_P^{PS} + \frac{1}{2} \mathbf{\Theta} \times \mathbf{\Omega}_P^{PS} + \frac{1 - \frac{\delta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}}{\delta^2} \mathbf{\Theta} (\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega}_P^{PS}) - \left(1 - \frac{\delta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \right) \mathbf{\Omega}_P^{PS},$$

або, остаточно

$$\boxed{\frac{d\mathbf{\Theta}}{dt} = \mathbf{\Omega}_P^{PS} + \frac{1}{2} \mathbf{\Theta} \times \mathbf{\Omega}_P^{PS} + \frac{1 - \frac{\delta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}}{\delta^2} (\mathbf{\Theta} \times (\mathbf{\Theta} \times \mathbf{\Omega}_P^{PS}))}.$$

У той же час у цитованій літературі наводиться інша формула

$$\frac{d\mathbf{\Theta}}{dt} = \mathbf{\Omega}_P^{PS} + \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}_P^{PS} \times \mathbf{\Theta} + \frac{1 - \frac{\delta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}}{\delta^2} (\mathbf{\Theta} \times (\mathbf{\Theta} \times \mathbf{\Omega}_P^{PS})).$$

Різниця – у другій складовій правій частини, яка має у цих двох виразах протилежний знак.

4.9. Кінематичні рівняння орієнтації штучного супутника Землі

У задачах кутової орієнтації штучного супутника Землі (ШСЗ) задля визначення поточного кутового положення ШСЗ (зв'язаної з ним системи координат) відносно орбітальної системи відліку у ряді випадків використовують вимірювальну інформацію про проекції абсолютної кутової швидкості ШСЗ на осі зв'язаної системи відліку, яку одержують за допомогою блоку гіроскопічних тахометрів. За цією інформацією інтегруючи кінематичні рівняння у тій чи іншій формі, отримують інформацію про шукане кутове положення ШСЗ. При цьому, вочевидь, потрібно також використовувати інформацію про кутову швидкість орбітальної системи у інерціальному просторі. Таку інформацію одержують у вигляді проекцій поточного значення вектора орбітальної кутової швидкості на осі саме орбітальної системи відліку.

Використаємо попередні позначення, вважаючи, що S – орбітальна система координат; P – система координат, пов'язана з корпусом ШСЗ; ω^{PS} – вектор кутової швидкості повороту ШСЗ відносно орбітальної системи координат, а також уведемо позначення: ω^P – вектор абсолютної (відносно інерціального простору) кутової швидкості ШСЗ; ω^S – вектор абсолютної кутової швидкості орбітальної системи відліку. Між ними існує такий зв'язок:

$$\omega^{PS} = \omega^P - \omega^S. \tag{4.28}$$

Рівняння (4.9) Пуассона у цьому випадку набуває вигляду:

$$\frac{dC^{SP}}{dt} = C^{SP} \cdot (\omega_P^{PS} \times) = C^{SP} \cdot (\omega_P^P \times) - C^{SP} \cdot (\omega_P^S \times).$$

Як зазначалося, вектор ω^P належить припускати відомим у проекціях на осі зв'язаної системи, тобто вважати відомою матрицю $(\omega_P^P \times)$, а вектор ω^S слід вважати відомим у проекціях на осі системи координат S.

Щоб виразити $(\omega_P^S \times)$ через відому матрицю $(\omega_S^S \times)$, скористаємося співвідношенням (2.12), яке у цьому випадку набуває вигляду

$$(\omega_P^S \times) = (C^{SP})^T \cdot (\omega_S^S \times) \cdot C^{SP}.$$

Підставлення його у попереднє співвідношення приводить до практично корисної форми кінематичного рівняння Пуассона

$$\boxed{\frac{dC^{SP}}{dt} = C^{SP} \cdot (\omega_P^P \times) - (\omega_S^S \times) \cdot C^{SP}}. \tag{4.29}$$

Аналогічно можна відшукати кватерніонне рівняння орієнтації. Для цього скористаємося рівнянням (4.19). З врахуванням (4.28) його можна подати у вигляді

$$\frac{dQ^{SP}}{dt} = \frac{1}{2} (Q^{SP} \circ \Omega_P^P - Q^{SP} \circ \Omega_P^S). \tag{4.30}$$

Якщо тепер використати перетворення (3.26) у формі

$$\Omega_P^S = \tilde{Q}^{SP} \circ \Omega_S^S \circ Q^{SP},$$

то з (4.30) виходить

$$\boxed{\frac{dQ^{SP}}{dt} = \frac{1}{2} (Q^{SP} \circ \Omega_P^P - \Omega_S^S \circ Q^{SP})}. \tag{4.31}$$

Кінематичні рівняння (4.29) і (4.31) використовуються при побудові систем орієнтації ШСЗ.

5. КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

5.1. Швидкість точки рухомого тіла

Щоб визначити швидкість довільної точки твердого тіла (див. рис. 2.1) достатньо про- диференціювати за часом загальний вираз (2.2) для радіуса-вектора точки

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + ix + jy + kz, \tag{5.1}$$

або в матричній формі (2.5)

$$\mathbf{R}_S = \mathbf{R}_{oS} + \mathbf{C}^{SP} \cdot \mathbf{R}_P. \tag{5.2}$$

При диференціюванні припустимо, що рухома система відліку P жорстко пов'язана з тілом, рух якого досліджується. З того випливає, що координати x , y і z точки у системі P, отже й матриця-стовпець \mathbf{R}_P і вектор \mathbf{p} , є величинами незмінними, а величини \mathbf{r}_o , \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , \mathbf{R}_{oS} , \mathbf{C}^{SP} можуть залежати від часу.

Позначимо абсолютну швидкість (тобто відносно нерухомої системи відліку S) довільної точки тіла через $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, абсолютну швидкість полюса O через $\mathbf{v}_o = \frac{d\mathbf{r}_o}{dt}$. Тоді, враховуючи правило (4.8) диференціювання вектора у рухомій системі відліку, матимемо

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \frac{\tilde{d}_P \mathbf{p}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^{PS} \times \mathbf{p}. \tag{5.3}$$

Але, з огляду на вищезазначене, відносна швидкість змінювання вектора \mathbf{p} (відносно рухомої системи P) дорівнює нулю, а вектор $\boldsymbol{\omega}^{PS}$ кутової швидкості рухомої системи відносно нерухомої у розглядуваному випадку збігається з вектором $\boldsymbol{\omega}$ абсолютної кутової швидкості самого тіла (бо система P жорстко пов'язана з тілом). Тому

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}. \tag{5.4}$$

З одержаної формули випливає, що швидкість довільної точки твердого тіла є геометричною сумою двох векторів: одного – \mathbf{v}_o , однакового для усіх точок тіла і рівного швидкості полюса, та другого – $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$, який змінюється разом із положенням точки у тілі і який має такі проєкції на осі, що пов'язані з тілом

$$\omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y; \quad \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z; \quad \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x.$$

Вектор \mathbf{v}_o є швидкістю, яку мала б будь-яка точка тіла, якщо б тіло рухалося поступально з цією швидкістю. Вектор $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$ є швидкістю, яку мала б та сама точка тіла, якщо б твердому тілу було надано обертання з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$ навколо осі, що проходить крізь полюс. Через те що проєкції вектора $\boldsymbol{\omega}$, які визначаються співвідношеннями (4.5), залежать у загальному випадку від часу, то й вісь обертання може змінювати своє положення відносно тіла (системи P) і нерухомого простору (системи S). Тому вектор $\boldsymbol{\omega}$ кутової швидкості називають миттєвим. Отже, – швидкість довільної точки твердого тіла складається зі швидкості поступального руху тіла разом із полюсом та швидкості внаслідок обертання точки навколо миттєвої осі обертання, що проходить через полюс.

Формула (5.4) має ґрунтовне значення для кінематики твердого тіла. Відносно прийнятої нерухомої системи відліку рух твердого тіла буде повністю визначений, якщо у цьому тілі обрано довільну точку O – полюс і є заданими (як функції часу) два вектори \mathbf{v}_o

та ω . Проекції цих векторів на осі, що сполучені з тілом, називатимемо *характеристиками руху твердого тіла*.

Диференціюючи матричну рівність (5.2) за тих самих умов, можна дійти матричного аналогу залежності (5.4) (див. позначення (2.4)):

$$\dot{\mathbf{R}}_S = \dot{\mathbf{R}}_{oS} + \dot{\mathbf{C}}^{SP} \cdot \mathbf{R}_P. \quad (5.5)$$

Зручніше за все подати це рівняння у проєкціях на осі рухомої системи. Для цього слід помножити (5.5) зліва на матрицю $\mathbf{C}^{PS} = (\mathbf{C}^{SP})^T$:

$$(\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \dot{\mathbf{R}}_S = (\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \dot{\mathbf{R}}_{oS} + (\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \dot{\mathbf{C}}^{SP} \cdot \mathbf{R}_P,$$

або, враховуючи (4.5)

$$(\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \dot{\mathbf{R}}_S = (\mathbf{C}^{SP})^T \cdot \dot{\mathbf{R}}_{oS} + (\omega_P \times) \cdot \mathbf{R}_P,$$

Тут у лівій частині міститься матриця-стовпець із проєкцій абсолютної швидкості точки на осі системи відліку, пов'язаної з тілом, перший доданок правої частини – аналогічні складові швидкості полюса, а останній член – матриця-стовпець із складових переносної швидкості точки, обумовленої обертанням тіла у просторі.

Дійдемо аналогічних співвідношень у кватерніонній формі. За основу візьмемо такий кватерніонний (див. (3.24)) аналог векторного співвідношення (5.1) (або (2.1)):

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_{oS} + \mathbf{Q}^{SP} \circ \rho_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP}, \quad (5.6)$$

де \mathbf{r}_S , \mathbf{r}_{oS} , ρ_P – вектор-кватерніони точки тіла відповідно у нерухомій системі, полюса у нерухомій системі й точки в рухомій системі відліку, а \mathbf{Q}^{SP} – нормований кватерніон повороту рухомої системи відносно нерухомої.

Якщо продиференціювати (5.6) і провести необхідні перетворення (див., наприклад (4.14) та (4.17)), можна одержати остаточно

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{r}}_S \circ \mathbf{Q}^{SP} = \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{r}}_{oS} \circ \mathbf{Q}^{SP} + \omega_P \times \rho_P.$$

5.2. Швидкість полюса

У загальному випадку вектор швидкості полюса може мати довільний напрямок як відносно до нерухомої, так і до зв'язаної з тілом системи відліку. У будь-якій системі відліку вектор \mathbf{v}_o можна повністю охарактеризувати за допомогою завдання його значення та двох кутів між ним і осями обраної координатної системи.

Якщо тіло (наприклад, транспортний засіб) рухається у середовищі, яке чинить опір, зазначені два кути задаються між вектором швидкості полюса й осями системи відліку, яка жорстко пов'язана з тілом. Причина такого обрання полягає у тому, що головний вектор і головний момент сил опору залежать, в основному, від значення вектора швидкості та його орієнтації відносно тіла.

З метою завдання вектора \mathbf{v}_o зазвичай вводять у розгляд так звану *швидкісну систему координат* $X_V Y_V Z_V$ з початком у полюсі, одна з осей якої (X_V) орієнтована вздовж вектора швидкості полюса \mathbf{v}_o . Взаємне розташування швидкісної ($X_V Y_V Z_V$) і пов'язаної з тілом (XYZ) систем, яке прийняте у наш час в аерогідромеханіці, наведено на рис. 5.1.

Кут між вектором швидкості полюса та його проєкцією на площину XU , який зазвичай позначається β , називається *кутом дрейфу* або *кутом ковзання*. Кут між зазначеною проєкцією й віссю X називають *кутом атаки* й позначають літерою α . У динаміці рухомих об'єктів (літаків, ракет-носіїв, снарядів, суден тощо) як площина XU приймається їхня діаметральна площина, тобто вісь X спрямовується удовж повздовжньої осі об'єкта, а вісь Y – удовж нормальної осі об'єкта.

Система $X_V Y_V Z_V$ є зв'язаною лише з напрямком вектора швидкості полюса. Відносно тіла ця координатна система може повертатися, бо кути α й β у більшості випадків є функціями часу.

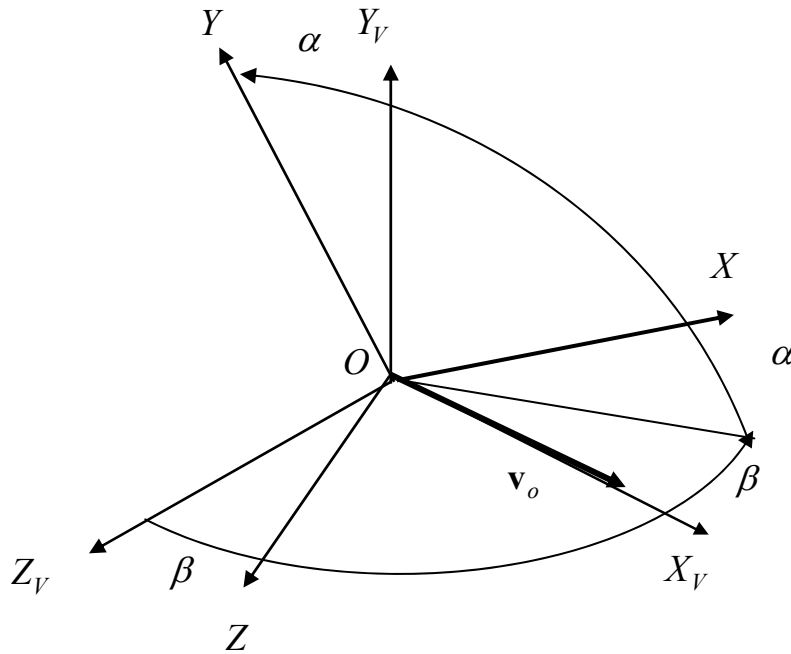


Рис. 5.1. Швидкісна система відліку

У відповідності до рис. 5.1, проекції вектора швидкості полюса на осі зв'язаної з тілом системи відліку є такими:

$$v_{ox} = v_o \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta; \quad v_{oy} = -v_o \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha; \quad v_{oz} = v_o \cdot \sin \beta.$$

Варто взяти до відома, що проекції вектора швидкості на осі зв'язаної системи самі по собі не можуть повністю охарактеризувати поступальний рух тіла разом із полюсом. Для цього потрібно знати також взаємне положення осей зв'язаної й нерухомої систем відліку, яке визначається матрицею напрямних косинусів.

5.3. Прискорення точок твердого тіла

Прискорення довільної точки у твердому тілі відшукується двократним диференціюванням за часом радіуса-вектора цієї точки або диференціюванням вектора її швидкості. У відповідності з (5.4) одержимо

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_o}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}. \tag{5.7}$$

Тут \mathbf{w} – вектор абсолютного прискорення точки тіла, яка має радіус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ відносно полюса O , $\frac{d\mathbf{v}_o}{dt} = \mathbf{w}_o$ – вектор абсолютного прискорення полюса. Вектор $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}$ називають вектором кутового абсолютного прискорення тіла.

Використовуючи правило диференціювання вектора у обертовій системі відліку і, враховуючи, як і досі, що за рухому систему відліку приймається система, жорстко зв'язана з тілом, а потому

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\tilde{d}_P \rho}{dt} + \omega^P \times \rho = \omega \times \rho,$$

де ω – кутова швидкість тіла, перетворимо (5.7) до вигляду

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_o + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}). \quad (5.8)$$

Другий доданок у правій частині (5.8) називається обертальним прискоренням, а третій – доосьовим (доцентровим) прискоренням. Останнє спрямоване вдовж перпендикуляра, який опущено з розглядуваної точки на напрямок вектора миттєвої кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$. Доосьове прискорення можна подати у виді

$$|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})| = |\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}^2| = R\omega^2, \quad (5.9)$$

де R – відстань від точки до прямої, яка збігається з напрямком осі миттєвого обертання і проходить крізь полюс.

Формула (5.8) виражає теорему Рівальса про прискорення точки тіла.

5.4. Складний рух матеріальної точки

Нехай деяка точка M рухається відносно рухомої системи відліку P , яка у власну чергу переміщується відносно нерухомої системи S . У цьому випадку говорять про складний рух точки, тобто одночасне її переміщення у двох системах відліку – абсолютній S і рухомій P . У відповідності до цього рух точки M у системі P називають *відносним*, а її рух у системі S – *абсолютним*.

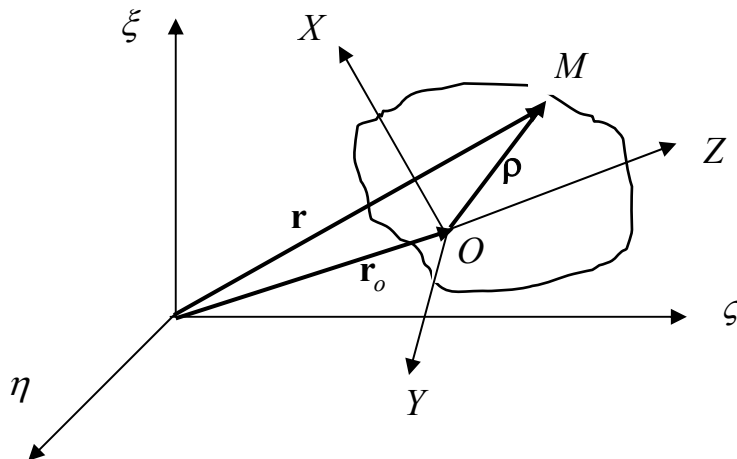


Рис. 5.2. Кінематика складного руху матеріальної точки

Положення точки M відносно нерухомої координатної системи визначається її радіусом-вектором \mathbf{r} (рис. 5.2).

Якщо \mathbf{r}_o – радіус-вектор полюса, а $\boldsymbol{\rho}$ – радіус-вектор точки M в координатній системі xuz (P), то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \boldsymbol{\rho}. \quad (5.10)$$

За зовнішнім виглядом векторна рівність (5.10) збігається з (2.1), але вона суттєво відрізняється від останньої тим, що відносні координати x , y і z вектора $\boldsymbol{\rho}$ у загальному випадку є вже не незмінними, а деякими функціями часу.

5.4.1. Абсолютна швидкість точки

Абсолютну швидкість точки М, яку позначимо \mathbf{v} , можна одержати диференціюванням абсолютного радіуса-вектора \mathbf{r} за часом. У відповідності із правилом диференціювання вектора, заданого в рухомій системі відліку, застосовуючи цю операцію до (5.10), отримуємо

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho} + \frac{\tilde{d}_P \boldsymbol{\rho}}{dt}, \quad (5.11)$$

де $\boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega}^P$ – переносна кутова швидкість системи xyz (P).

Перші два доданки визначають швидкість точки М при її русі сумісно із системою Р відносно S. Позначимо цю швидкість \mathbf{v}_e . Матимемо

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}.$$

Останній доданок у виразі (5.11) визначає відносну швидкість точки $\mathbf{v}_r = \frac{\tilde{d}_P \boldsymbol{\rho}}{dt}$.

Відтак, абсолютна швидкість точки М визначиться виразом

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_r,$$

який показує, що у кожному мить абсолютна швидкість точки дорівнює сумі відносної й переносної швидкостей.

5.4.2. Абсолютне прискорення точки

Абсолютне прискорення точки визначається як похідна за часом від абсолютної її швидкості

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_o}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_e \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt}.$$

Вектори $\boldsymbol{\rho}$ і \mathbf{v}_r задані у рухомій системі координат. Застосовуючи до них правило (4.8), дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} &= \frac{\tilde{d}_P \boldsymbol{\rho}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}, \\ \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} &= \frac{\tilde{d}_P \mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r, \end{aligned}$$

Отже, абсолютне прискорення точки у її складеному русі визначається формулою

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}_o}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}) + 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r + \frac{\tilde{d}_P \mathbf{v}_r}{dt}. \quad (5.12)$$

Перші три доданки правої частини визначають прискорення тієї точки, незмінно зв'язаної із системою Р, в якій у цю мить розташовано точку М. Це прискорення називається *переносним* \mathbf{W}_e .

Останній член у формулі (5.6) визначає, очевидно, прискорення точки М у її русі відносно рухомої системи Р. Це прискорення називається *відносним* і позначається \mathbf{W}_r .

Залишився ще подвійний вектор $\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$, що залежить як від відносного, так й від переносного рухів. Складову прискорення, що визначається цим вектором, називають *кориолісовим прискоренням* і позначають \mathbf{W}_c .

Отже, для абсолютного прискорення точки маємо наступну формулу

$$\mathbf{w} = \mathbf{W}_e + \mathbf{W}_r + \mathbf{W}_c,$$

причому

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_e &= \frac{d\mathbf{v}_o}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}); \\ \mathbf{w}_r &= \frac{\tilde{d}_P \mathbf{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}_P^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2}; \\ \mathbf{w}_c &= 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r.\end{aligned}$$

Формула (5.12) виражає теорему Кориоліса: *абсолютне прискорення точки складається з переносного, відносного і кориолісова прискорень.*

Звернемо увагу на те, що у формулі для визначення переносного прискорення фігурує абсолютна похідна від вектора швидкості полюса. У випадку, коли швидкість полюса задається у рухомій системі відліку, переносне прискорення зручніше подавати у вигляді:

$$\mathbf{w}_e = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_o}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_o + \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}).$$

5.5. Складний рух твердого тіла

Нехай тепер тверде тіло і зв'язаний з ним тригранник $T (OXYZ)$ здійснює рух відносно координатної системи $P (AX_cY_cZ_c)$, а остання, в свою чергу, рухається відносно умовно нерухомої системи координат $S\xi\eta\zeta$. Рух тіла відносно нерухомої системи називають *абсолютним*, відносно проміжної системи P – *відносним*, а рух рухомої проміжної системи P відносно нерухомої S – *переносним*.

Положення системи координат $AX_cY_cZ_c$ по відношенню до системи $S\xi\eta\zeta$ визначається трьома координатами ξ_A, η_A, ζ_A полюса A і дев'ятьма напрямними косинусами a_{ik} кутів між осями X_c, Y_c, Z_c і ξ, η, ζ . Аналогічно, положення тіла по відношенню до системи $AX_cY_cZ_c$ задається також трьома "відносними" координатами x_{cO}, y_{cO}, z_{cO} полюса O і дев'ятьма напрямними косинусами b_{ik} між осями систем $X_cY_cZ_c$ та XYZ . Абсолютному рухові твердого тіла також відповідатимуть три "абсолютні" координати ξ_O, η_O, ζ_O полюса O (рис. 5.2) і дев'ять напрямних косинусів кутів між осями XYZ і $\xi\eta\zeta$.

У прикладних задачах часто потрібно визначити один із рухів тіла – абсолютний, переносний або відносний, коли два інших рухи є відомими. Це й складає задачу визначення складного руху тіла.

Нехай потрібно визначити положення тіла в абсолютному просторі при заданому його відносному положенні й абсолютному положенні рухомої системи. Положення полюса O в абсолютній системі координат визначається векторним співвідношенням:

$$\mathbf{r}_O = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}_O, \quad (5.13)$$

що відповідає наступним скалярним

$$\begin{cases} \xi_O = \xi_A + a_{11} \cdot x_{cO} + a_{12} \cdot y_{cO} + a_{13} \cdot z_{cO} \\ \eta_O = \eta_A + a_{21} \cdot x_{cO} + a_{22} \cdot y_{cO} + a_{23} \cdot z_{cO} \\ \zeta_O = \zeta_A + a_{31} \cdot x_{cO} + a_{32} \cdot y_{cO} + a_{33} \cdot z_{cO} \end{cases}$$

і матричному

$$\mathbf{R}_{OS} = \mathbf{R}_{AS} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_{OP} \quad (5.14)$$

співвідношенням. Тут використані позначення:

$$\mathbf{R}_{OS} = \begin{bmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_{AS} = \begin{bmatrix} \xi_A \\ \eta_A \\ \zeta_A \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

причому \mathbf{A} є матрицею напрямних косинусів переносного руху.

Матриця \mathbf{C} напрямних косинусів абсолютного руху дорівнює добутку матриці \mathbf{A} переносного руху й матриці \mathbf{B} відносного руху:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \tag{5.15}$$

Аналогічно визначається положення тіла у відносному русі, якщо є заданими абсолютний і переносний рухи. Обертаючи співвідношення (5.14), отримаємо

$$\mathbf{R}_{OP} = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{R}_{OS} - \mathbf{R}_{AS}).$$

а, розв'язуючи (5.15) відносно матриці \mathbf{B} , дійдемо формули

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{C}.$$

Для визначення координат полюса у переносному русі можуть бути використані вирази (5.13) і (5.14), а для відшукування матриці напрямних косинусів \mathbf{A} – вираз

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T,$$

що впливає з (5.15).

5.6. Швидкості та прискорення точок твердого тіла у складному його русі

Розглянемо рух довільної точки M тіла, положення якої відносно зв'язаної системи T задано радіусом-вектором \mathbf{p} . Радіус-вектор цієї точки відносно нерухомої системи подається у вигляді суми

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \mathbf{c}, \tag{5.16}$$

де \mathbf{r}_O – радіус-вектор полюса O .

Абсолютна швидкість розглядуваної точки M тіла, у відповідності до цього, може бути подана у наступний спосіб:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_O}{dt} + \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Першій доданок визначає абсолютну швидкість початку координат системи $OXYZ$, зв'язаної з тілом.

Нехай у подальшому $\boldsymbol{\omega}_r$ – вектор миттєвої кутової швидкості обертання тіла (системи $OXYZ$) відносно проміжної рухомої системи $P (AX_cY_cZ_c)$, а $\boldsymbol{\omega}_e$ – кутова швидкість останньої по відношенню до нерухомої системи $S (S\xi\eta\zeta)$. Вектор \mathbf{p} зазвичай є заданим у рухомій системі відліку $OXYZ$, яка обертається відносно $S\xi\eta\zeta$ з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_e$. Тому, у відповідності до правила (4.8), матимемо:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{c}}{dt} + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{c} = (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{c},$$

оскільки у системі відліку $OXYZ$ вектор \mathbf{p} не змінюється ані за значенням, ані за напрямком.

Отже, швидкість точки тіла визначається так:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{c}. \tag{5.17}$$

Цю формулу можна розвинути далі. Через те що вектор дорівнює сумі $\mathbf{r}_O = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}_O$ (5.13), то

$$\mathbf{v}_O = \frac{d\mathbf{r}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}_O}{dt}.$$

Вектор $\boldsymbol{\rho}_O$ зазвичай задається у координатному базисі $AX_cY_cZ_c$ проміжної системи відліку P, яка обертається з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_e$. Тому матимемо

$$\mathbf{v}_O = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}_O = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{rO} + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}_O, \quad (5.18)$$

де $\mathbf{v}_{rO} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}_O}{dt}$ - швидкість полюса відносно проміжної системи координат.

Підставляючи знайдений результат у (5.17) знаходимо остаточно:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{rO} + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}_O + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\rho}. \quad (5.19)$$

Завважимо, що перші три доданки у цій формулі визначають абсолютну швидкість початку зв'язаної системи відліку.

Тепер продиференціюємо (5.17) за часом, щоб отримати абсолютне прискорення довільної точки тіла:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_O}{dt} + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_r}{dt} \right) \times \mathbf{c} + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \frac{d\mathbf{c}}{dt}.$$

Перший доданок $\frac{d\mathbf{v}_O}{dt}$ визначає абсолютне прискорення полюса O. У відповідності до виразу (5.18), беручи до уваги, що вектори \mathbf{v}_{rO} і $\boldsymbol{\rho}_O$ задані у проміжній системі, його можна подати у виді:

$$\mathbf{w}_O = \frac{d\mathbf{v}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_{rO}}{dt} + \boldsymbol{\varepsilon}_e \times \boldsymbol{\rho}_O + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}_O) + 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_{rO}.$$

Вектори $\boldsymbol{\omega}_e$, $\boldsymbol{\omega}_r$ і $\boldsymbol{\rho}_O$ задаються у рухомих системах координат $AX_cY_cZ_c$ і $OXYZ$, тому

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}_e}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\varepsilon}_e;$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}_r}{dt} + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\varepsilon}_r + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r;$$

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt} + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\rho}.$$

Отже

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}_r}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \right) \times \boldsymbol{\rho} + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \\ & = \boldsymbol{\varepsilon}_e \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\varepsilon}_r \times \boldsymbol{\rho} + (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}) + \\ & + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \boldsymbol{\rho}) \end{aligned}$$

Через те що (див. (1.3))

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r) \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}) = -\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r) + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\rho}) = \\ & = -\boldsymbol{\omega}_e \cdot (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}_r) + \boldsymbol{\omega}_r \cdot (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}_e) + \boldsymbol{\omega}_e \cdot (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}_r) - \boldsymbol{\rho} \cdot (\boldsymbol{\omega}_r \cdot \boldsymbol{\omega}_e) = \\ & = \boldsymbol{\omega}_r \cdot (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}_e) - \boldsymbol{\rho} \cdot (\boldsymbol{\omega}_r \cdot \boldsymbol{\omega}_e) \end{aligned}$$

вираз для прискорення стане наступним:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c. \quad (5.20)$$

Перша складова визначає *переносне прискорення* \mathbf{w}_e :

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon}_e \times (\boldsymbol{\rho}_O + \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\rho}_O + \boldsymbol{\rho})),$$

причому перший доданок – це абсолютне прискорення полюса А, другий – обертальне переносне, третє – доосьове переносне прискорення.

Друга складова у (5.20) – це *відносне прискорення*

$$\mathbf{w}_r = \frac{d\tilde{\mathbf{v}}_{rO}}{dt} + \boldsymbol{\varepsilon}_r \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \boldsymbol{\rho}).$$

В ньому перший доданок – прискорення полюса О відносно системи $AX_cY_cZ_c$, другий – обертальне відносне, а третій – доосьове відносне прискорення точки, які обумовлені обертанням системи $OXYZ$ відносно проміжної системи $AX_cY_cZ_c$.

Нарешті, остання складова у (5.20) подає коріолісове прискорення точки

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}_e \times (\mathbf{v}_{rO} + \boldsymbol{\omega}_r \times \boldsymbol{\rho}),$$

яке визначається одночасно і переносним, і відносним рухом точки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бранец В. Н. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. – М.: Наука, 1992. – 280 с
2. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: ФизМатЛит, 1961. – 824 с.

Предметний покажчик

A

антикомутативність векторного добутку 6, 14

B

вектор 6
 Гіббса 36
 Ейлера 40
 одиничний 15
 орієнтації 40
 Родріга 39
 скінченного повороту 39
 вектор-кватерніон 30, 53
 вісь Ейлера 27

D

діада 10, 15, 28
 добуток
 кватерніонів 29
 матриць 9
 добуток векторів
 векторний 6, 13
 векторно-скалярний 6, 14
 подвійний векторний 7, 14
 потрійний векторний 15
 скалярний 6, 13

K

кватерніон 29
 зворотний 31
 нормований 30
 повороту 34
 спряжений 30
 кінематичні рівняння
 Ейлера 45
 Пуассона 44
 у кватерніонах 47
 через вектор Гіббса 48
 через вектор Ейлера 49
 через вектор Родріга 49
 кут
 атаки 53
 диферента 21
 дрейфу 53
 Ейлера 27
 ковзання 53
 крена 21
 нутації 20
 прецесії 20
 ристання 21
 ротації 20
 тангажа 21
 кути
 Ейлера 20, 22
 Ейлера-Крилова 20

M

матриця 8
 вироджена 11
 квадратна 8
 кососиметрична 11
 напрямних косинусів 17, 25
 обернена 11
 одинична 10
 ортогональна 18
 симетрична 11
 транспонована 10

H

напрямні косинуси 13
 норма кватерніона 30

П

подання вектора
 матричне 11
 у векторно-координатній формі 12
 у координатній формі 8
 правило диференціювання вектора 41, 43
 у векторній формі 43
 у матричній формі 41, 42
 правило складання поворотів
 через вектори Гіббса 38
 через вектори Родріга 39
 через кватерніони 36
 через матриці напрямних косинусів 26
 прискорення
 абсолютне 55, 58
 відносне 56, 59
 доосьове відносне 59
 коріолісове 56, 59
 обертальне відносне 59
 переносне 56, 59
 полюса 59

P

рух
 абсолютний 54, 56
 відносний 54, 56
 переносний 56

C

система координат
 абсолютна 16
 інерціальна 16
 пов'язана з тілом 53
 рухома 16
 швидкісна 53
 слід матриці 11, 28
 сума

векторів	6, 13
кватерніонів	29
матриць	9
сферичний трикутник.....	23

T

теорема	
Ейлера	27

косинусів сферичного трикутника	24
Рівальса.....	54

III

швидкість	
абсолютна	41, 55, 58
відносна	42, 55
переносна.....	42, 55