

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»

Кафедра приладів і систем орієнтації і навігації

*С. А. Мураховський*

# **Теорія автоматичного керування**

Рекомендовано  
Вченою Радою приладобудівного факультету  
НТУУ «КПІ»

Київ – НТУУ "КПІ" – 2012

УДК 62-52

*Гриф надано Вченою радою ПБФ  
(протокол № 6/12 від 24 травня 2012 р.)*

Відповідальний редактор  
*ЛАЗАРЄВ Юрій Федорович*, к.т.н., доцент,  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»

**M91**

*Мураховський С.А.*

Теорія автоматичного керування [електронний ресурс]: лабораторний практикум. – К.: НТУУ "КПІ", 2012. – 30 с.

Практикум містить опис і методичні вказівки до виконання лабораторних робіт, виконуваних на комп'ютері. Тематика робіт присвячена питанням аналізу лінійних систем автоматичного керування: дослідженню часових та частотних характеристик елементарних динамічних ланок та систем автоматичного керування, визначенню усталених похибок в системах при дії типових збурень, дослідженню стійкості систем автоматичного керування.

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП .....</b>	<b>4</b>
<b>1. МОДЕЛЮВАННЯ ВЛАСНОГО РУХУ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ.....</b>	<b>5</b>
1.1. МЕТА РОБОТИ.....	5
1.2. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ .....	5
1.3. ВИКОРИСТАННЯ MATLAB .....	6
1.4. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ. ....	7
1.5. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ .....	8
1.6. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ .....	10
<b>2. ПОБУДОВА ВАГОВИХ ТА ПЕРЕХІДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИНАМІЧНИХ ЛАНОК.....</b>	<b>11</b>
2.1. МЕТА РОБОТИ.....	11
2.2. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ .....	11
2.3. ПОБУДОВА ХАРАКТЕРИСТИК ЗАСОБАМИ MATLAB .....	11
2.4. ЗАВДАННЯ.....	15
2.5. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ .....	16
<b>3. ПОБУДОВА ВАГОВИХ ТА ПЕРЕХІДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ .....</b>	<b>17</b>
3.1. МЕТА РОБОТИ.....	17
3.2. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ .....	17
3.3. ЗАВДАННЯ.....	17
3.4. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ .....	21
<b>4. ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМІЧНИХ ЛАНОК .....</b>	<b>22</b>
4.1. МЕТА РОБОТИ.....	22
4.2. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ .....	22
4.3. ЗАВДАННЯ.....	23
4.4. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ .....	23
<b>5. ЛОГАРИФМІЧНІ ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ....</b>	<b>24</b>
5.1. МЕТА РОБОТИ.....	24
5.2. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ .....	24
5.3. ВИКОРИСТАННЯ MATLAB .....	24
5.4. ЗАВДАННЯ.....	25
5.5. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ .....	25
<b>6. ВИЗНАЧЕННЯ УСТАЛЕНИХ ПОХИБОК СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ .....</b>	<b>26</b>
6.1. МЕТА РОБОТИ.....	26
6.2. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ .....	26
6.3. ЗАВДАННЯ.....	27
6.4. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ .....	27
<b>7. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ .....</b>	<b>28</b>
7.1. МЕТА РОБОТИ.....	28
7.2. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ .....	28
7.3. ЗАВДАННЯ.....	29
7.4. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ .....	29
<b>ЛІТЕРАТУРА.....</b>	<b>30</b>

## **Вступ**

Лабораторний практикум складений відповідно до робочої навчальної програми кредитного модуля «Теорія автоматичного керування» для студентів приладобудівного факультету, які навчаються за напрямом 6.051003 «Приладобудування».

Практикум містить опис і методичні вказівки до виконання сімох лабораторних робіт, виконуваних на комп'ютері. Тематика робіт присвячена питанням аналізу лінійних систем автоматичного керування: дослідженню часових та частотних характеристик елементарних динамічних ланок та систем автоматичного керування, визначенню усталених похибок в системах при дії типових збурень, дослідженню стійкості систем автоматичного керування.

Кожна лабораторна робота містить короткі теоретичні відомості, опис функцій системи MATLAB, які використовуються для дослідження з прикладами їх використання, а також варіанти завдань та контрольні запитання.

# 1. Моделювання власного руху систем автоматичного керування

## 1.1. Мета роботи

Здобуття практичних навичок комп'ютерного моделювання режимів власного руху в системах автоматичного керування.

## 1.2. Загальні теоретичні відомості

Диференціальне рівняння, що визначає залежність керованої (вихідної) величини  $y(t)$  від вхідних дій  $x(t)$  і  $L(t)$  та від часу, називається рівнянням динаміки. В загальному випадку рівняння можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \\ = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x + c_r \frac{d^r L}{dt^r} + c_{r-1} \frac{d^{r-1} L}{dt^{r-1}} + \dots + c_1 \frac{dL}{dt} + c_0 L \end{aligned} \quad (1.1)$$

Розв'язок рівняння динаміки характеризує процес керування в системі і може бути записаний у такий спосіб:

$$y(t) = y_{\text{власний}}(t) + y_{\text{вимушений}}(t), \quad (1.2)$$

де  $y_{\text{власний}}(t)$  – складова, що характеризує перехідний режим в системі, тобто власний (вільний) рух;  $y_{\text{вимушений}}(t)$  – складова, що характеризує усталений режим в системі, тобто вимушений рух при дії певних вхідних дій.

Отже, для аналізу власного руху системи автоматичного керування необхідно визначити  $y_{\text{власний}}(t)$ . Ця складова являє собою розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0. \quad (1.3)$$

Для знаходження розв'язку однорідного рівняння (1.3) необхідно знайти корені характеристичного рівняння:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (1.4)$$

Розв'язок однорідного рівняння (1.3) матиме вигляд:

$$y_{\text{власний}}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (1.5)$$

де  $C_i$  – сталі інтегрування;  $p_i$  – корені характеристичного рівняння (1.4)

Вираз (1.5) записаний для випадку відсутності кратних коренів характеристичного рівняння.

В багатьох випадках використовують іншу форму запису рівняння динаміки, яку називають поданням у просторі станів.

Для прикладу переходу у простір станів розглянемо просте рівняння динаміки у формі (1.1):

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x(t). \quad (1.6)$$

Позначимо:

$$u = x; \quad x_1 = y; \quad x_2 = \frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt}. \quad (1.7)$$

Використаємо позначення (1.7) у рівнянні (1.6):

$$a_2 \frac{dx_2}{dt} + a_1 x_2 + a_0 x_1 = b_0 u(t).$$

Тоді рівняння динаміки у формі простору станів можна записати у вигляді системи двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{a_1}{a_2} x_2 - \frac{a_0}{a_2} x_1 + \frac{b_0}{a_2} u(t) \end{cases}. \quad (1.8)$$

Систему рівнянь (1.8) можна подати у матричному вигляді:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}, \quad (1.9)$$

де  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  – вектор стану,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix}$  – матриця коефіцієнтів при век-

торі стану,  $\mathbf{U} = [u(t)]$  – вектор керування,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_0}{a_2} \end{bmatrix}$  – матриця коефіцієнтів

при векторі керування.

### 1.3. Використання Matlab

Якщо система автоматичного керування описується диференціальним рівнянням (або системою диференціальних рівнянь) 1-го або 2-го порядку, то просто знайти точний аналітичний розв'язок рівняння (1.3), оскільки в такому випадку характеристичне рівняння буде алгебраїчним рівнянням не вище 2-го порядку. При більш високих порядках системи диференціальних рівнянь доцільно використовувати методи чисельного інтегрування. В середовищі MATLAB для розв'язку таких задач можна використовувати вбудовані функції *ode23* та *ode45*.

Для використання наведених функцій необхідно записати рівняння динаміки у формі простору станів. Наприклад, рівняння (1.8) для випадку власного руху матиме вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{a_1}{a_2} x_2 - \frac{a_0}{a_2} x_1 \end{cases}. \quad (1.10)$$

Для моделювання будемо використовувати функцію *ode45*. Синтаксис звертання до неї такий:

```
[t,y] = ode45(odefun,tspan,y0),
```

де  $t,y$  – вихідні значення часу та змінних стану,

*odefun* – назва файлу (строкова змінна, яка записується в апострофах), в якому збережено підпрограму,

*tspan* – проміжок модельного часу інтегрування рівнянь,

$y_0$  – вектор початкових умов.

Отже, необхідно написати підпрограму у вигляді окремого файлу, в якій записано рівняння (1.10). Функція *ode45* буде звертатися з основної програми до цієї підпрограми на кожному кроці інтегрування.

```
function z=lab1_pr(t,y)
% Процедура правих частин ДР
% Параметри системи;
a0=100;
a1=1;
a2=1;
% Рівняння стану
z(1)=y(2);
z(2)=-a1*y(2)/a2-a0*y(1)/a2;
z=z';
```

В основній програмі необхідно задати початкові умови (наприклад,  $x_1(0) = 0.1$ ;  $x_2(0) = 0$ ), функцію інтегрування рівнянь динаміки у формі простору станів, та забезпечити виведення на екран монітора результатів у вигляді графіків залежності змінних стану від часу.

Основна програма матиме такий вигляд

```
% Лабораторна робота №1
clc
% Початкові умови
y0=[0.1 0];
% Інтегрування диференціальних рівнянь
[t,y]=ode45('lab1_pr',[0 1], y0);
% Графіки власного руху
plot(t,y(:,1));grid
figure
plot(t,y(:,2));grid
```

### **1.4. Порядок виконання роботи.**

1. Подати рівняння вільного руху в формі простору станів
2. Розробити програму для моделювання в середовищі MATLAB
3. Побудувати графіки вільного руху по всіх змінних стану для заданих параметрів системи та початкових умов.
4. Проаналізувати вплив змінюваного параметру
5. Визначити період та частоту загасаючих коливань в системі для одного з графіків
6. Зробити висновки

## 1.5. Варіанти завдань

### Варіант 1

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + cx = 0$$

$$m = 0.01 \text{ кг}, f = 0.5 \text{ Нс/м.}$$

Змінюваний параметр –  $c$  ( $c_1 = 1 \text{ Н/м}$ ,  $c_2 = 5 \text{ Н/м}$ ,  $c_3 = 10 \text{ Н/м}$ ),

Початкові умови:  $x(0) = 0.01$ ;  $\dot{x}(0) = 0$ .

### Варіант 2

$$J\ddot{\varphi} + \mu\dot{\varphi} + mgl\varphi = 0$$

$$J = 10^{-6} \text{ кг м}^2, m = 0.01 \text{ кг}, l = 0.01 \text{ м.}$$

Змінюваний параметр –  $\mu$  ( $\mu_1 = 10^{-5} \text{ Н м с}$ ,  $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Н м с}$ ,  $\mu_3 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Н м с}$ ),

Початкові умови:  $\varphi(0) = 0.02$ ;  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

### Варіант 3

$$J\ddot{\beta} + \mu\dot{\beta} + c\beta = 0$$

$$J = 10^{-5} \text{ кг м}^2, \mu = 10^{-4} \text{ Н м с},$$

Змінюваний параметр –  $c$  ( $c_1 = 1 \text{ Н м}$ ,  $c_2 = 0.1 \text{ Н м}$ ,  $c_3 = 0.01 \text{ Н м}$ ),

Початкові умови:  $\beta(0) = 0.02$ ;  $\dot{\beta}(0) = 0.01$ .

### Варіант 4

$$\begin{cases} H\dot{\beta} + H\omega\alpha + k\beta = 0 \\ -H\dot{\alpha} + H\omega\beta = 0 \end{cases}$$

$$\omega = 10^{-5} \text{ 1/с}, H = 0.1 \text{ Н м с},$$

Змінюваний параметр –  $k$  ( $k_1 = 10^{-6} \text{ Н м}$ ,  $k_2 = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ Н м}$ ,  $k_3 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Н м}$ ),

Початкові умови:  $\alpha(0) = 0.002$ ;  $\beta(0) = 0.001$ .

### Варіант 5

$$\begin{cases} H\dot{\beta} + f_1\dot{\alpha} + H\omega\alpha = 0 \\ -H\dot{\alpha} + f_2\dot{\beta} + H\omega\beta + mgl\beta = 0 \end{cases}$$

$$\omega = 10^{-5} \text{ 1/с}, H = 0.5 \text{ Н м с}, m = 1 \text{ кг}, f_1 = 0.0002 \text{ Н м с}, f_2 = 0.0002 \text{ Н м с},$$

Змінюваний параметр –  $l$  ( $l_1 = 0.1 \text{ м}$ ,  $l_2 = 0.15 \text{ м}$ ,  $l_3 = 0.05 \text{ м}$ ),

Початкові умови:  $\alpha(0) = 0.001$ ;  $\beta(0) = 0.005$ .



### Варіант 6

$$J\ddot{\alpha} + f\dot{\alpha} + H\omega\alpha = 0$$

$$J = 10^{-4} \text{ кг м}^2, f = 10^{-5} \text{ Н м с},$$

Змінюваний параметр –  $H$  ( $H_1 = 1 \text{ Нмс}$ ,  $H_2 = 0.5 \text{ Нмс}$ ,  $H_3 = 0.1 \text{ Нмс}$ ),

Початкові умови:  $\alpha(0) = 0.02$ ;  $\dot{\alpha}(0) = 0$ .

### Варіант 7

$$\begin{cases} H\dot{\beta} - f_1\dot{\alpha} - H\omega\alpha + c_1\beta = 0 \\ H\dot{\alpha} + f_2\dot{\beta} + H\omega\beta + c_2\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\omega = 10^{-5} \text{ 1/с}, m = 1 \text{ кг}, f_1 = 0.001 \text{ Н м с}, f_2 = 0.001 \text{ Н м с},$$

$$c_1 = 10^{-5} \text{ Н м}, c_2 = 10^{-5} \text{ Н м}$$

Змінюваний параметр –  $H$  ( $H_1 = 0.1 \text{ Н м с}$ ,  $H_2 = 0.2 \text{ Н м с}$ ,  $H_3 = 0.4 \text{ Н м с}$ ),

Початкові умови:  $\alpha(0) = 0.002$ ;  $\beta(0) = 0.002$ .

### Варіант 8

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + f_1\dot{\alpha} + k\beta = 0 \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + f_2\dot{\beta} = 0 \end{cases}$$

$$A = 10^{-3} \text{ кг м}^2, B = 5 \cdot 10^{-4} \text{ кг м}^2, f_1 = 0.001 \text{ Н м с}, f_2 = 0.001 \text{ Н м с}, H = 0.2 \text{ Н м с}$$

Змінюваний параметр –  $k$  ( $k_1 = 0.001 \text{ Н м}$ ,  $k_2 = 0.002 \text{ Н м}$ ,  $k_3 = 0.005 \text{ Н м}$ ),

Початкові умови:  $\alpha(0) = 0.001$ ;  $\beta(0) = 0.005$ ,  $\dot{\alpha}(0) = 0$ ;  $\dot{\beta}(0) = 0$ .

### Варіант 9

$$\begin{cases} J_1\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + f_1\dot{\alpha} + H\omega\alpha = 0 \\ J_2\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + f_2\dot{\beta} + H\omega\beta + mgl\beta = 0 \end{cases}$$

$$J_2 = 10^{-3} \text{ кг м}^2, J_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ кг м}^2, f_1 = 0.0002 \text{ Н м с}, f_2 = 0.0002 \text{ Н м с},$$

$$\omega = 10^{-5} \text{ 1/с}, H = 0.5 \text{ Н м с}, m = 1 \text{ кг}.$$

Змінюваний параметр –  $l$  ( $l_1 = 0.1 \text{ м}$ ,  $l_2 = 0.15 \text{ м}$ ,  $l_3 = 0.2 \text{ м}$ ),

Початкові умови:  $\alpha(0) = 0.001$ ;  $\beta(0) = 0.005$ ,  $\dot{\alpha}(0) = 0$ ;  $\dot{\beta}(0) = 0$ .

### Варіант 10

$$\begin{cases} m\ddot{x} + f_1\dot{x} + cx + ml\ddot{\phi} + mg\phi = 0 \\ ml\ddot{x} + mgx + (J_0 + ml^2)\ddot{\phi} + f_2\dot{\phi} + mgl\phi = 0 \end{cases}$$

$$m = 3 \text{ кг}, f_1 = 7.5 \text{ Н с/м}, f_2 = 1.2 \text{ Н м с}, c = 500 \text{ Н/м}, J_0 = 1.5 \text{ кг м}^2,$$

Змінюваний параметр –  $l$  ( $l_1 = 0.2 \text{ м}$ ,  $l_2 = 0.3 \text{ м}$ ,  $l_3 = 0.4 \text{ м}$ ),

Початкові умови:  $x(0) = 0.05$ ;  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\phi(0) = 0.002$ ;  $\dot{\phi}(0) = 0$ .

### Варіант 11

$$\begin{cases} (m_k + m_0)\ddot{x} + f_1\dot{x} + cx + m_0l\ddot{\varphi} = 0 \\ m_0l\ddot{x} + (J_0 + m_0l^2)\ddot{\varphi} + f_2\dot{\varphi} + m_0gl\varphi = 0 \end{cases}$$

$$m_0 = 3 \text{ кг}, m_k = 5 \text{ кг}, f_1 = 7.5 \text{ Н с/м}, f_2 = 1.2 \text{ Н м с}, l = 0.3 \text{ м}, J_0 = 1.5 \text{ кг м}^2,$$

Змінюваний параметр –  $c$  ( $c_1 = 500 \text{ Н/м}$ ,  $c_2 = 300 \text{ Н/м}$ ,  $c_3 = 400 \text{ Н/м}$ ),

Початкові умови:  $x(0) = 0.01$ ;  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0.001$ ;  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

### 1.6. Контрольні запитання

1. Що таке рівняння динаміки?
2. Назвіть форми запису рівняння динаміки.
3. Що являє собою розв'язок рівняння динаміки?
4. З яких складових складається розв'язок рівняння динаміки?
5. Як визначається вільна складова розв'язку рівняння динаміки?
6. Як визначається аналітичний розв'язок однорідного диференціального рівняння 2-го порядку?
7. Чим визначається власний рух?
8. Які попередні дії потрібно зробити, щоб реалізувати чисельне інтегрування диференціального рівняння динаміки керованої системи у комп'ютерній системі Matlab?

## 2. Побудова вагових та перехідних характеристик динамічних ланок

### 2.1. Мета роботи

Вивчення динамічних характеристик елементарних ланок систем автоматичного керування, набуття вмінь моделювання вагових та перехідних характеристик.

### 2.2. Загальні теоретичні відомості

Ваговою функцією  $w(t)$  називається реакція елемента (системи) на миттєвий одиничний імпульс  $\delta(t)$  на вході елемента (системи), тобто на миттєвий імпульс нескінченно великої амплітуди і одиничної площі. Щоб отримати вагову функцію  $w(t)$ , необхідно визначити оригінал (обернене перетворення Лапласа), що відповідає передатній функції:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\}, \quad (2.1)$$

де  $L^{-1}\{\bullet\}$  знак оберненого перетворення Лапласа.

Перехідною функцією елемента (системи)  $h(t)$  називається реакція елемента (системи) на одиничне ступінчасте діяння, тобто перехідна функція визначається як процес на виході  $h(t)=X_{\text{вих}}(t)$  за одиничного стрибка на вході  $X_{\text{вх}}(t)=1/t$ . Перехідна функція  $h(t)$  визначається як обернене перетворення Лапласа (тобто оригінал) від зображення  $W(p)/p$ , тобто:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}. \quad (2.2)$$

Отже, для визначення вагової та перехідної характеристик необхідно знайти передатну функцію динамічної ланки, використовуючи перетворення Лапласа до рівняння динаміки.

Передатна функція ланки (системи)  $W(p)$  визначається як відношення зображень за Лапласом вихідної  $X_{\text{вих}}(p)$  і вхідної  $X_{\text{вх}}(p)$  величин за нульових початкових умов:

$$W(p) = \frac{X_{\text{вих}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)}, \quad (2.3)$$

тобто передатна функція визначається із рівняння ланки, записаного в операторній формі. Якщо елемент системи має дві вхідних величини, необхідно визначити дві передатні функції (за кожним входом).

### 2.3. Побудова характеристик засобами Matlab

Для побудови вагових та перехідних характеристик динамічних ланок та систем автоматичного керування зручно використовувати середовище Simulink в системі MATLAB.

Розглянемо побудову таких характеристик на прикладі аперіодичної ланки, яка має рівняння динаміки:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t) \quad (2.4)$$

де  $x(t)$  – вхідна величина;  $y(t)$  – вихідна величина;  $T$ ,  $k$  – постійна часу та коефіцієнт передачі ланки відповідно ( $T = 0,2$  с,  $k = 5$ )

Передатна функція ланки є такою:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{Tp + 1}$$

Для аналізу динамічних характеристик ланки або системи автоматичного керування створюється модель Simulink (S-модель). В панелі інструментів головного вікна MATLAB викликається **Simulink Library Browser** – бібліотека середовища Simulink, в якій представлені моделі елементів систем автоматичного керування. У вікні **Simulink Library Browser** в меню *File* потрібно викликати на екран монітору нове вікно (рис. 3.1), в якому у подальшому складати блок-схему нової моделі.

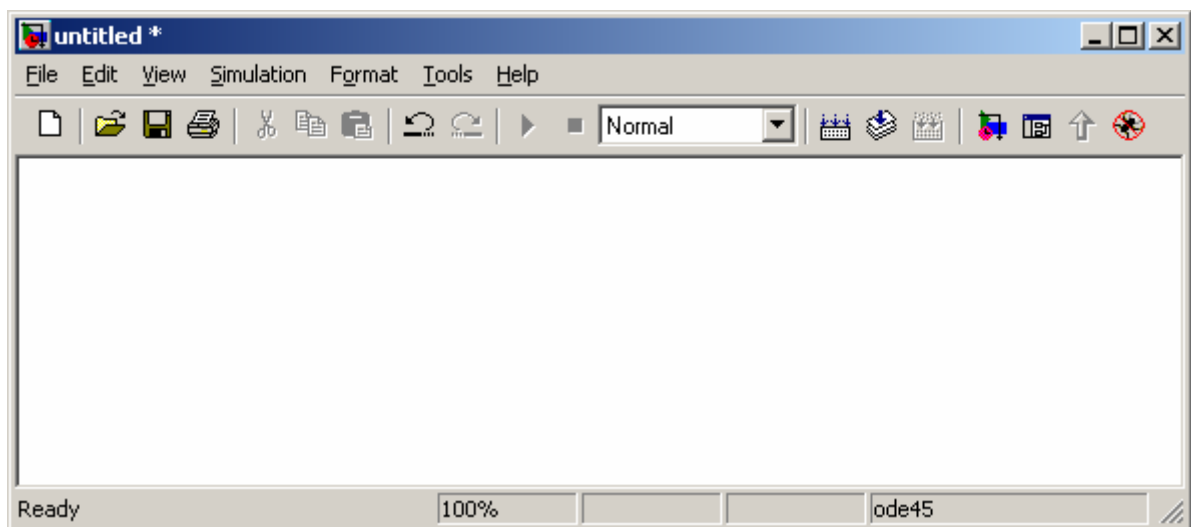


Рис. 3.1. Вікно блок-схеми нової S-моделі

Оскільки в лабораторній роботі вивчаються лише ланки зі задалегідь відомими передатними функціями  $W(p)$ , то для моделювання потрібно перетягнути з бібліотеки *Simulink\Continuous* блок **Transfer Fcn** (Передатна функція) у вікно створеної нової моделі, а також блоки-порти вхідного *Simulink\Sources\In1* та вихідного *Simulink\Sinks\Out1* сигналів.

Для завдання коефіцієнтів полінома чисельника та знаменника передатної функції необхідно подвійно клацнувши лівою клавішею миші на зображенні блоку **Transfer Fcn**, викликати його вікно налаштування *Block Parameters* (рис. 3.2).

В полі *Numerator* в квадратних дужках через пропуск записуються коефіцієнти полінома чисельника починаючи з старшого. В розглядуваному випадку слід записати в даному полі коефіцієнт  $k = 5$ . Якщо чисельник передатної функції має більш складний вигляд, то коефіцієнт передачі можна представити окремим блоком *Simulink\Math Operations\Gain*, який ставиться попереду блоку передатної функції.

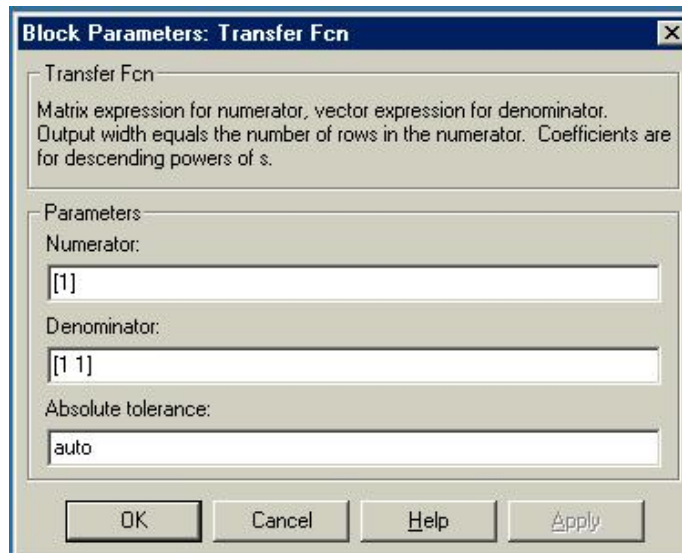


Рис. 3.2. Параметри блоку *Transfer Fcn*

В полі *Denominator* в квадратних дужках через пропуск записуються коефіцієнти полінома знаменника починаючи зі старшого. В розглядуваному випадку в цьому полі запишемо  $[0.2 \ 1]$ .

Побудову вагової та перехідної характеристик можна проводити декількома способами.

**Спосіб 1.** За допомогою графічного інтерфейсу *LTI Viewer*. У вікні моделі треба обрати пункт меню *Tools\Linear Analysis*. Виникають два графічні вікна:

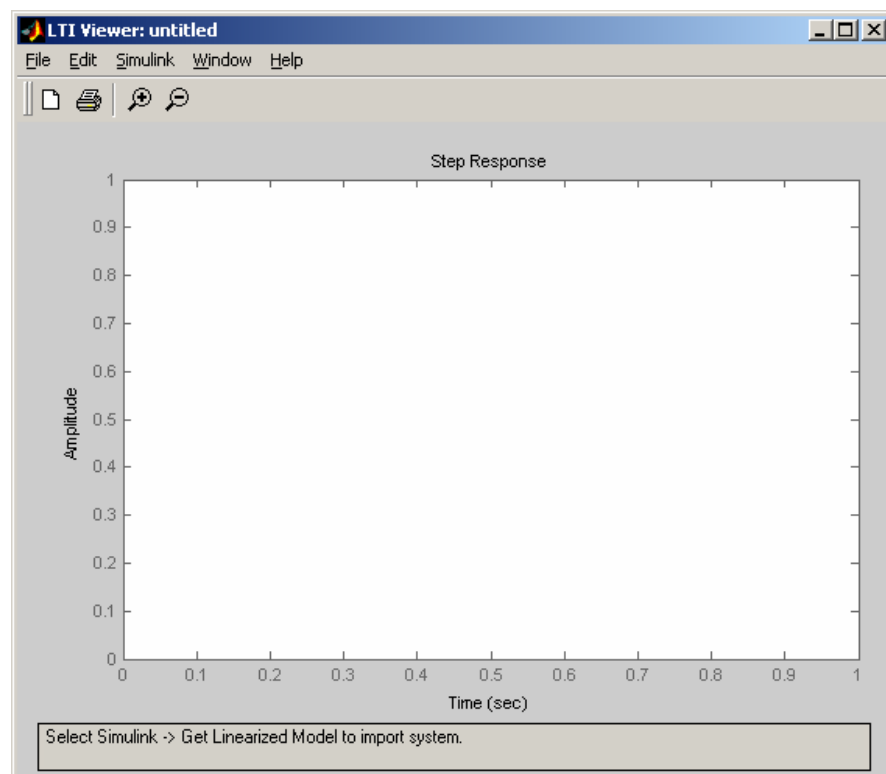


Рис. 3.3. Вікно графічного інтерфейсу *LTI Viewer*

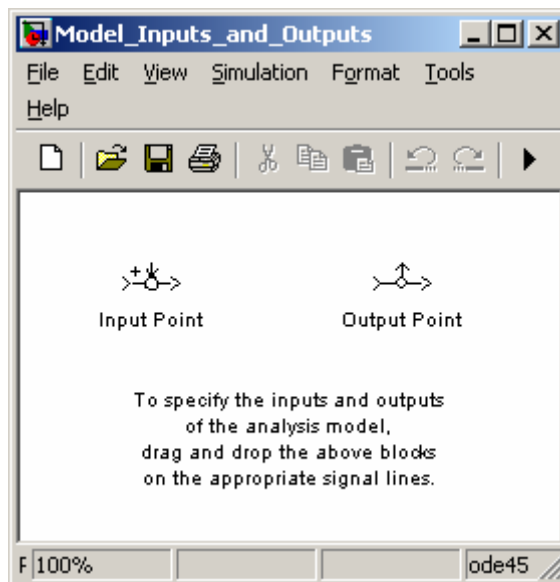


Рис. 3.4. Вікно вхідних та вихідних величин системи

Із графічного вікна, яке подане на рис. 3.4, необхідно перетягнути в модель блоки, які позначають вхідну та вихідну величину системи. Ці блоки також містяться в бібліотеці *Control System Toolbox*. Отримаємо блок-схему моделі Simulink такого вигляду:

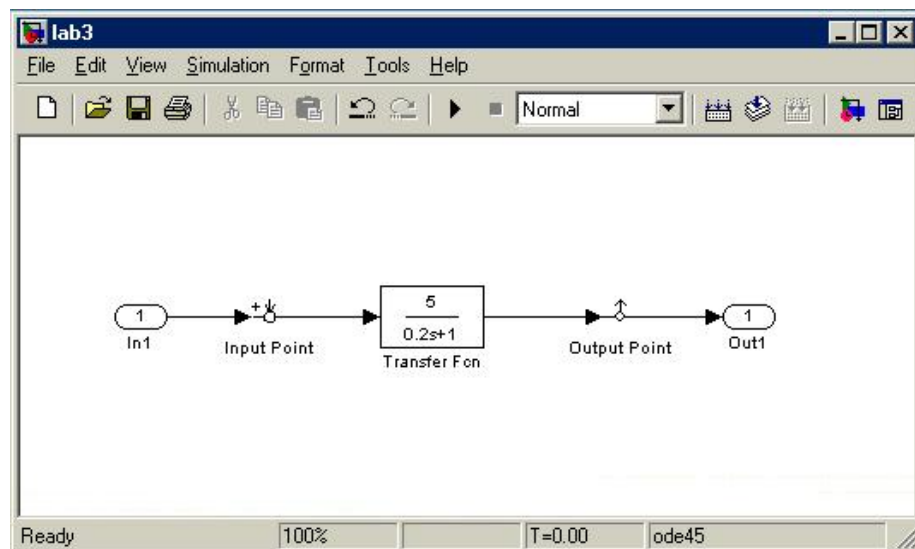


Рис. 3.5. Модель динамічної ланки в середовищі Simulink

Для побудови вагової та перехідної характеристики в меню графічного вікна *LTI Viewer* (рис. 3.3) обираємо поділ *Simulink\Get Linearized Model*. В результаті отримуємо перехідну характеристику ланки (*Step Response*), побудова якої встановлена за замовчуванням. Для побудови вагової характеристики (*Impulse Response*) необхідно в пункті меню *Edit\Plot Configuration* обрати відповідну характеристику в полі *Response Type*.

**Спосіб 2. Використання вбудованих функцій MATLAB.** Для створеної моделі Simulink можна розрахувати модель простору станів (state-space model) за допомогою команди *linmod*.

**[A,B,C,D]=linmod('ім'я файлу-моделі')**

Отримані матриці A, B, C, D перетворюються командою `ss` в об'єкт `sys`.  
`sys=ss(A,B,C,D)`

Для побудови вагової та перехідної характеристик використовуються команди `impulse(sys)` та `step(sys)` відповідно.

## 2.4. Завдання

1. По заданому рівнянню динаміки ланки визначити передатну функцію  $W(p)$ , вагову  $w(t)$  та перехідну  $h(t)$  характеристики.
2. Створити S-модель для отриманої передатної функції.
3. Побудувати графіки вагової та перехідної характеристик за допомогою LTI Viewer.
4. Побудувати графіки вагової та перехідної характеристик за допомогою команд `impulse` та `step`.
5. Побудувати графіки вагової та перехідної характеристик за отриманими функціями  $w(t)$  та  $h(t)$ .
6. Порівняти графіки побудовані в пунктах 3-5.
7. Проаналізувати вплив параметрів системи на вагову та перехідну характеристики.
8. Зробити висновки.

## Варіанти завдань

### Варіант 1

$$T_2^2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = k \cdot x_1(t)$$

$$T_1 = 0.25 \text{ с}, T_2 = 0.1 \text{ с}, k = 10,$$

### Варіант 2

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = T \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$T = 10^{-2} \text{ с}.$$

### Варіант 3

$$T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = k \cdot x(t)$$

$$T = 0.5 \text{ с}, k = 10,$$

### Варіант 4

$$T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$T = 0.1 \text{ с}.$$

### Варіант 5

$$T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$T_1 = 0.2 \text{ с}, T_2 = 0.01 \text{ с}.$$

### Варіант 6

$$T_2^2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = k \cdot x_1(t)$$

$$T_1 = 1.25 \text{ с}, T_2 = 0.2 \text{ с}, k = 0.3,$$

### Варіант 7

$$T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}$$

$$T = 0.25 \text{ с.}$$

### Варіант 8

$$\frac{dy(t)}{dt} = T \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$T = 0.04 \text{ с.}$$

### Варіант 9

$$m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + cx(t) = m \cdot a(t)$$

$$m = 0.01 \text{ кг}, f = 0.5 \text{ Нс/м}, c = 1 \text{ Н/м.}$$

### Варіант 10

$$J\ddot{\phi}(t) + \mu\dot{\phi}(t) + mgl\phi(t) = ml \cdot a(t)$$

$$J = 10^{-6} \text{ кгм}^2, m = 0.01 \text{ кг}, l = 0.01 \text{ м}, \mu = 10^{-5} \text{ Нмс.}$$

### Варіант 11

$$J\ddot{\beta} + \mu\dot{\beta} + c\beta = H \cdot \omega(t)$$

$$J = 10^{-5} \text{ кгм}^2, \mu = 10^{-4} \text{ Нмс}, c = 0.01 \text{ Нм.}$$

## 2.5. Контрольні запитання

1. Що таке вагова характеристика?
2. Що являє собою перехідна характеристика?
3. Як пов'язані між собою вагова та перехідна характеристики?
4. Як визначається передатна функція ланки?
5. Як визначаються вагова та перехідна характеристики з передатної функції?
6. Що являють собою функції Дірака та Хевісайда?



### **3. Побудова вагових та перехідних характеристик систем автоматичного керування**

#### **3.1. Мета роботи**

Вивчення динамічних характеристик систем автоматичного керування, набуття вмінь використовувати комп'ютерні засоби для побудови і аналізу вагових та перехідних характеристик САК.

#### **3.2. Загальні теоретичні відомості**

Передатна функція розімкненої системи  $W_{роз}(p)$  визначається як добуток передатних функцій прямого ланцюга та ланцюга зворотного зв'язку:

$$W_{роз}(p) = W_{пр}(p) \cdot W_{зз}(p). \quad (3.1)$$

Для визначення  $W_{роз}(p)$  структурну схему систему зводять до послідовного з'єднання елементів.

Передатна функція  $\Phi(p)$  замкненої системи за вхідним діянням визначається формулою:

$$\Phi(p) = \frac{W_{пр}(p)}{1 + W_{роз}(p)} \quad (3.2)$$

Ця передатна функція за визначенням є відношенням зображень за Лапласом вихідної величини системи та вхідного діяння, тобто за нею можна визначити вагову та перехідну характеристики системи в цілому (див. формули (2.1) – (2.2)).

Передатна функція замкненої системи за похибкою  $\Phi_{\delta}(p)$ :

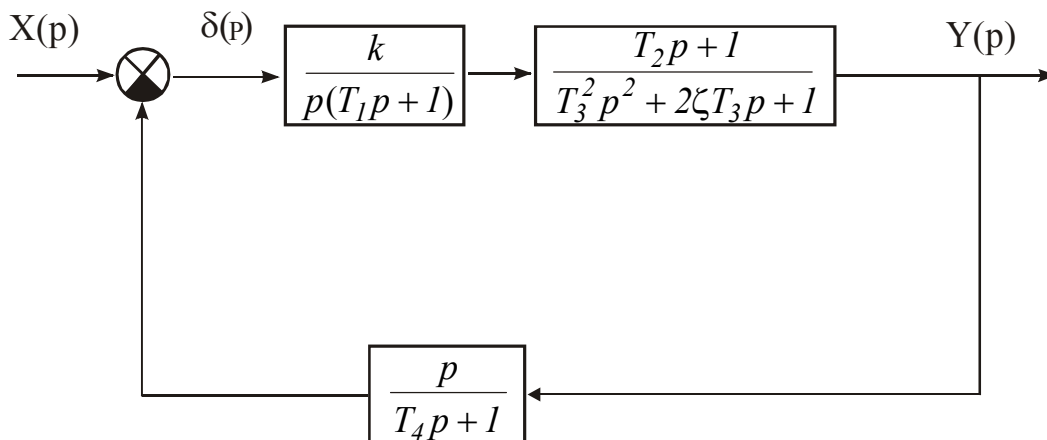
$$\Phi_{\delta}(p) = \frac{1}{1 + W_{роз}(p)}. \quad (3.3)$$

#### **3.3. Завдання**

1. За заданою структурною схемою визначити передатну функцію розімкненої системи  $W_{роз}(p)$ , передатну функцію замкненої системи за вхідним діянням  $\Phi(p)$  та передатну функцію замкненої системи за похибкою  $\Phi_{\delta}(p)$ .
2. Створити S-модель системи на основі її структурної схеми.
3. Побудувати графіки вагової та перехідної характеристик замкненої системи автоматичного керування.
4. Визначити перехідну характеристику  $h(t)$  замкненої системи аналітичним шляхом через  $\Phi(p)$ , побудувати графік та порівняти з побудованим в п. 3.
5. Зробити висновки.

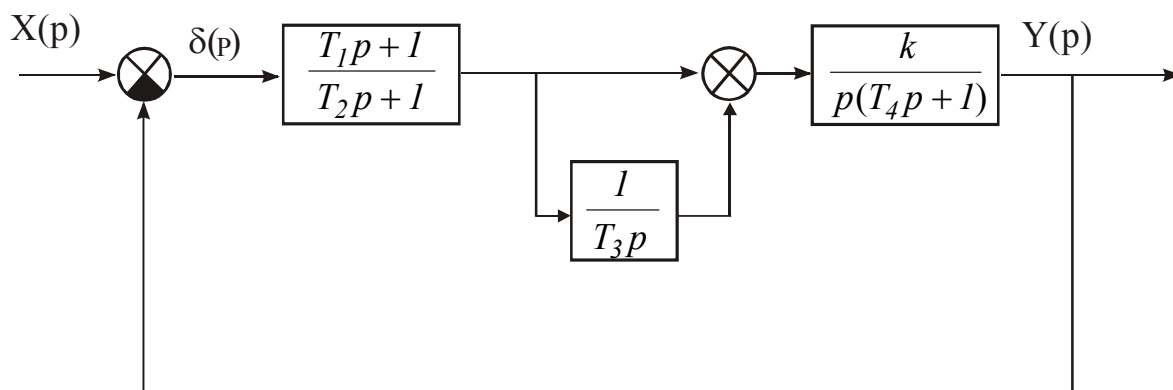
## Варіанти завдань

### Варіант 1



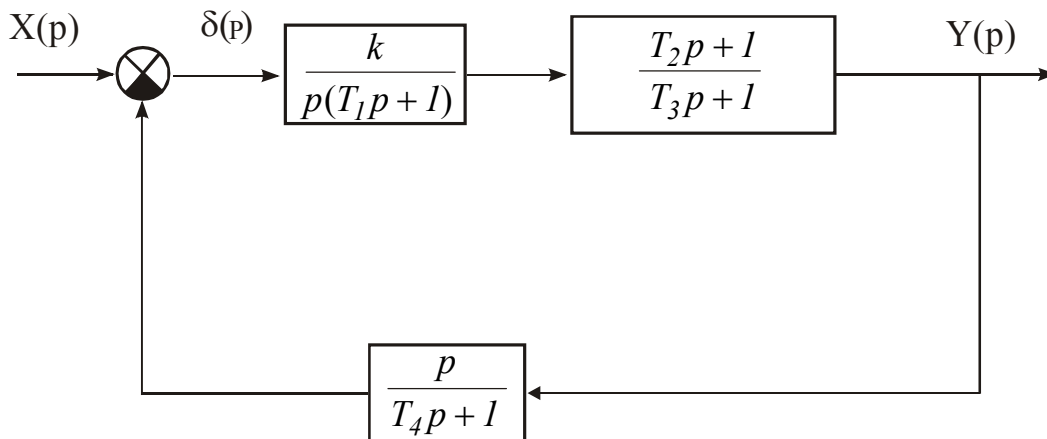
$$k = 10, T_1 = 0.05 \text{ с}, T_2 = 0.02 \text{ с}, T_3 = 0.01 \text{ с}, T_4 = 0.1 \text{ с}, \zeta = 0.7$$

### Варіант 2



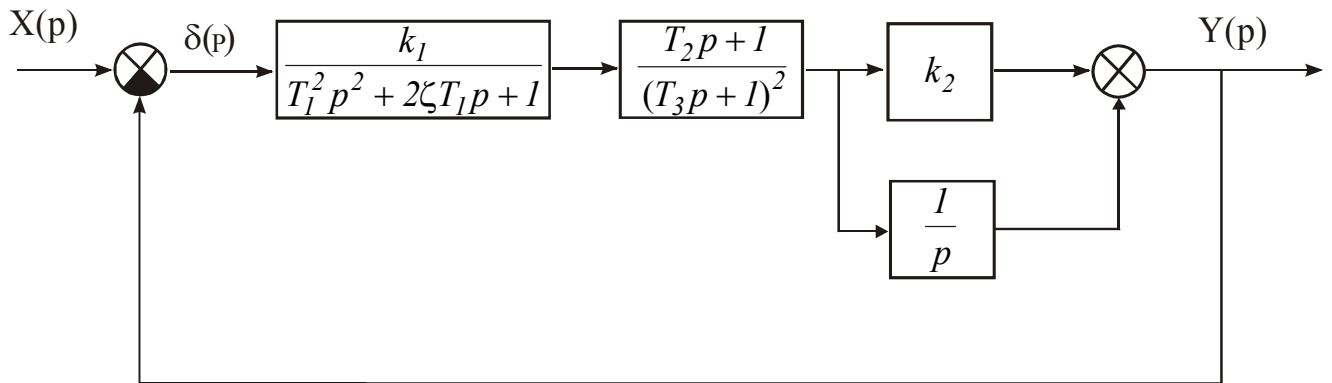
$$k_1 = 1, T_1 = 0.05 \text{ с}, T_2 = 0.5 \text{ с}, T_3 = 1 \text{ с}, T_4 = 0.01 \text{ с}$$

### Варіант 3



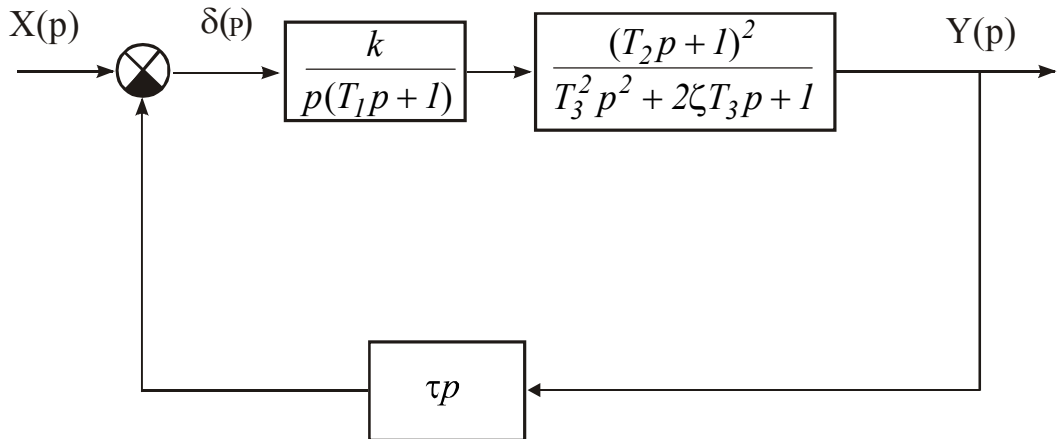
$$k = 0.1, T_1 = 0.5 \text{ с}, T_2 = 0.05 \text{ с}, T_3 = 0.01 \text{ с}, T_4 = 0.1 \text{ с}$$

Варіант 4



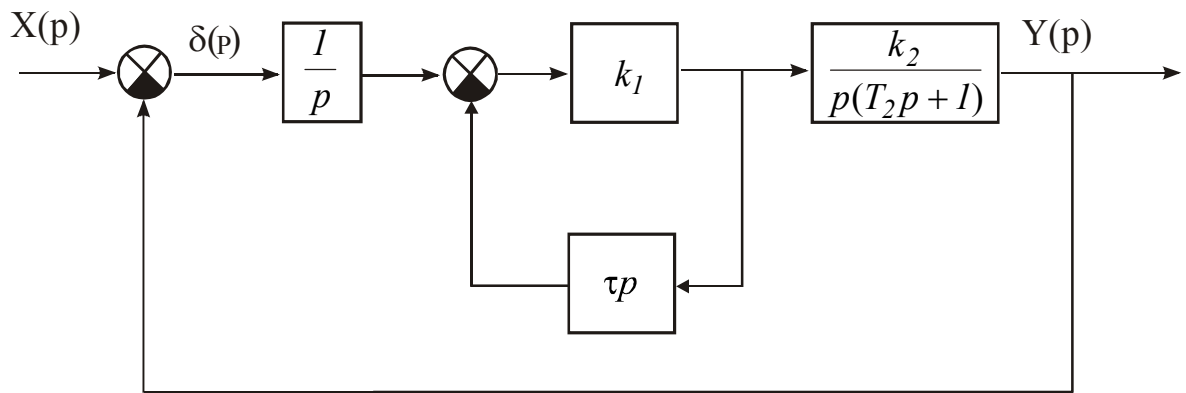
$$k_1 = 10, k_2 = 0.1, T_1 = 0.01 \text{ с}, T_2 = 0.1 \text{ с}, T_3 = 1 \text{ с}, \zeta = 0.7$$

Варіант 5



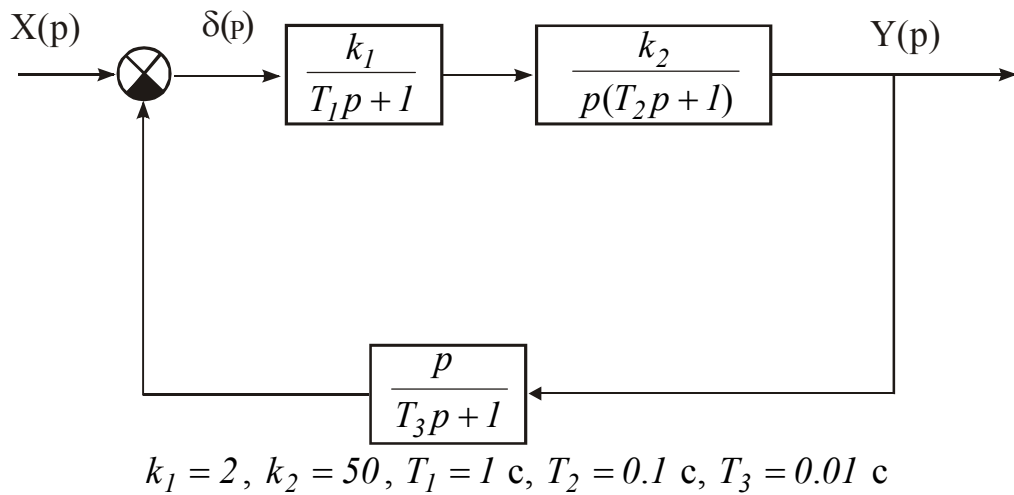
$$k = 10, T_1 = 1 \text{ с}, T_2 = 5 \text{ с}, T_3 = 0.1 \text{ с}, \tau = 0.01 \text{ с}, \zeta = 0.7$$

Варіант 6

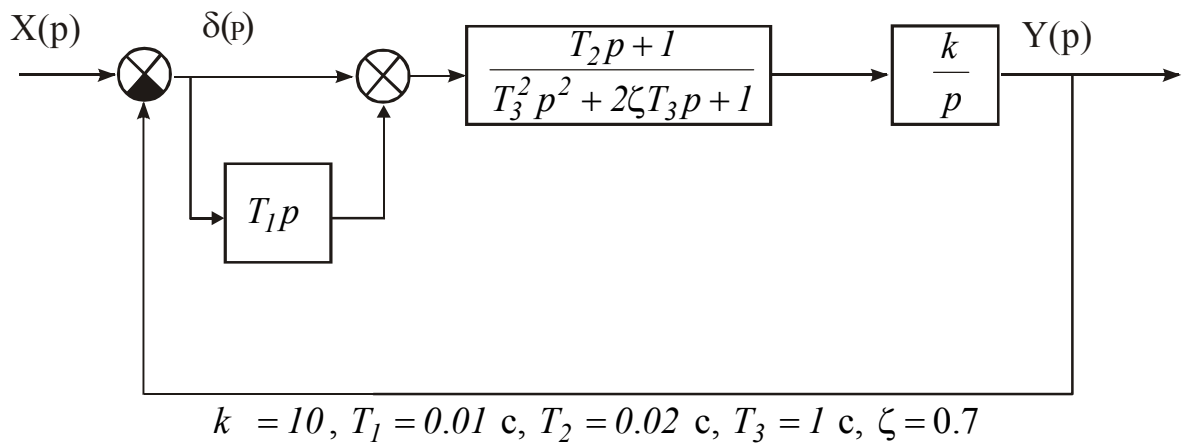


$$k_1 = 0.1, k_2 = 10, T_2 = 0.1 \text{ с}, \tau = 0.2 \text{ с}$$

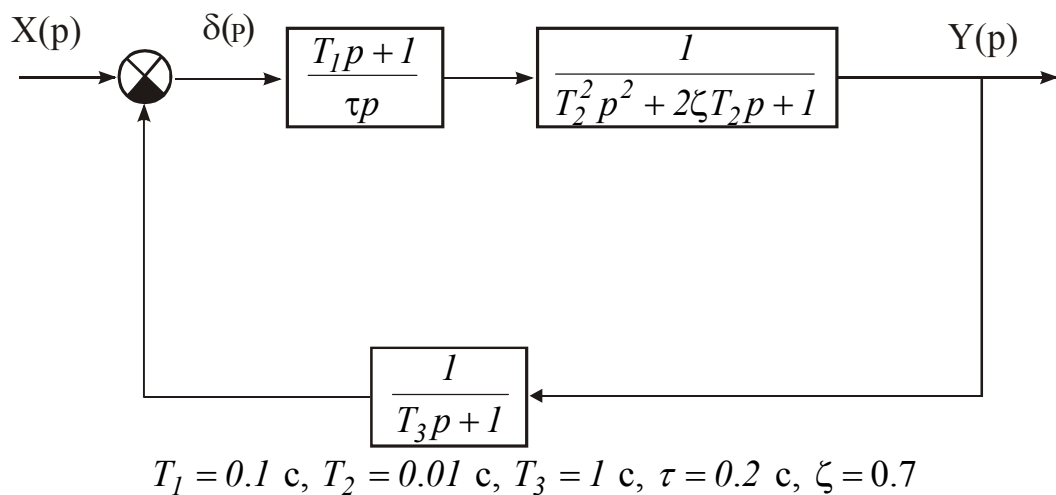
Варіант 7



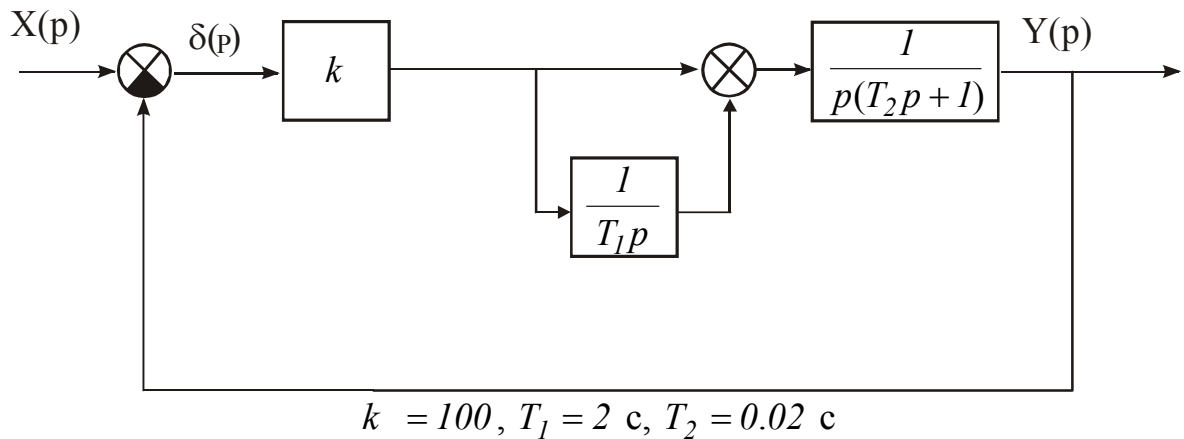
Варіант 8



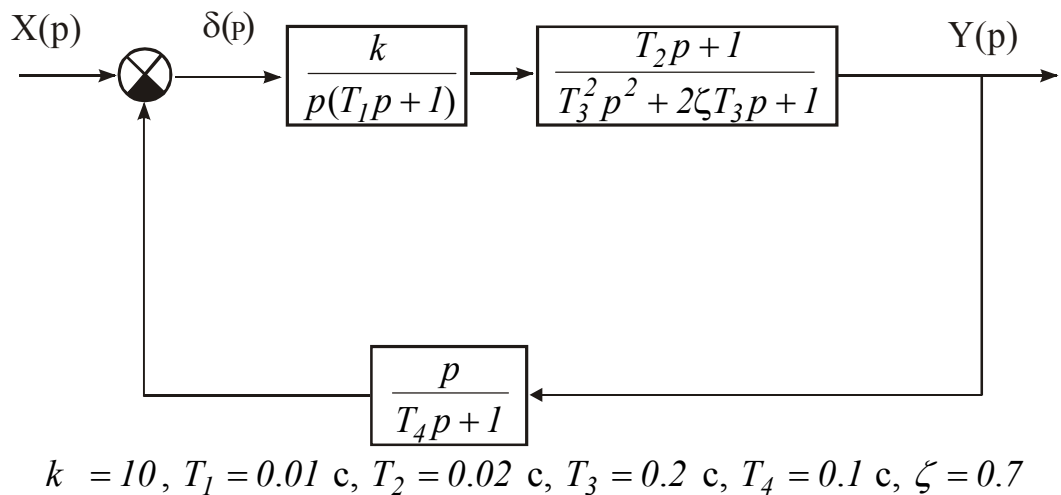
Варіант 9



### Варіант 10



### Варіант 11



### 3.4. Контрольні запитання

1. Як визначається передатна функція розімкненої системи?
2. Що являє собою перехідна характеристика?
3. Як визначається передатна функція замкненої системи за вхідним ді-  
янням?
4. Як визначається передатна функція замкненої системи за похибкою?
5. Як визначаються вагова та перехідна характеристики з передатної  
функції  $\Phi(p)$ ?

## 4. Частотні характеристики динамічних ланок

### 4.1. Мета роботи

Вивчення частотних характеристик елементарних динамічних ланок систем автоматичного керування, набуття вміль комп'ютерними засобами досліджувати частотні характеристики ланок.

### 4.2. Загальні теоретичні відомості

**Комплексна передатна функція (КПФ)** ланки визначається як відношення комплексного зображення вихідної величини до комплексного зображення вхідної величини в режимі усталених гармонічних коливань:

$$W(j\omega) = \frac{X_{\text{вих}}(j\omega)}{X_{\text{вх}}(j\omega)}, \quad (4.1)$$

Комплексну передатну функцію можна подати в алгебричній формі:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

де  $P(\omega)$  та  $Q(\omega)$  – відповідно дійсна та уявна частини КПФ.

КПФ також можна подати в показниковій формі:

$$W(j\omega) = N(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

де  $N(\omega)$  та  $\varphi(\omega)$  – відповідно модуль та аргумент КПФ.

**Амплітудно-фазовою частотною характеристикою (АФЧХ)** називається крива, яку описує вектор КПФ при зміні частоти від  $-\infty$  до  $+\infty$ . АФЧХ може бути побудована в декартових та полярних координатах.

**Амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ)** ланки (системи) називається крива залежності модуля  $N(\omega)$  КПФ від частоти при змінюванні частоти від 0 до  $\infty$ .

**Фазочастотною характеристикою (ФЧХ)** ланки (системи) називається крива залежності аргументу  $\varphi(\omega)$  КПФ від частоти при змінюванні частоти від 0 до  $\infty$ .

Розглянемо як приклад аперіодичну ланку:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}.$$

Комплексна передатна функція (КПФ) ланки:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} \cdot \frac{1 - j\omega T}{1 - j\omega T} = \frac{k - jk\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} + j \frac{-k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Дійсна  $P(\omega)$  та уявна  $Q(\omega)$  частини КПФ у цьому разі дорівнюють

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Модуль  $N(\omega)$  та аргумент  $\varphi(\omega)$  КПФ визначаються залежностями

$$N(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\text{arctg}\omega T.$$

### 4.3. Завдання

1. За заданим рівнянням (див. п. 2.4) динаміки ланки визначити комплексну передатну функцію  $W(j\omega)$ , амплітудно-частотну характеристику (АЧХ)  $N(\omega)$  та фазочастотну характеристику (ФЧХ)  $\varphi(\omega)$ . Визначити дійсну  $P(\omega)$  та уявну  $Q(\omega)$  частини КПФ.
2. Створити модель Simulink для отриманої передатної функції. Побудувати графік АФЧХ за допомогою команди *nyquist*.
3. Побудувати графік АФЧХ в декартових координатах за отриманими функціями  $P(\omega)$  та  $Q(\omega)$ .
4. Побудувати графік АФЧХ в полярних координатах.
5. Побудувати графіки АЧХ та ФЧХ за отриманими функціями  $N(\omega)$  та  $\varphi(\omega)$ .
6. Проаналізувати вплив параметрів системи на частотні характеристики.
7. Зробити висновки.

### 4.4. Контрольні запитання

1. Як визначається комплексна передатна функція ланки?
2. Які можливі форми запису КПФ?
3. Що таке амплітудно-фазова частотна характеристика?
4. Що таке амплітудно-частотна характеристика?
5. Що таке фазочастотна характеристика?
6. Як визначаються АЧХ та ФЧХ з комплексної передатної функції?

## 5. Логарифмічні частотні характеристики систем автоматичного керування

### 5.1. Мета роботи

Набуття практичних навичок побудови та моделювання логарифмічних частотних характеристик систем автоматичного керування.

### 5.2. Загальні теоретичні відомості

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ) розімкненої системи визначається у такий спосіб:

$$L(\omega) = 20 \lg N(\omega) = \sum L_i(\omega).$$

Одиницею виміру  $L(\omega)$  є децибел (відкладається вздовж осі ординат), а вздовж осі абсцис відкладається частота  $\omega [c^{-1}]$  в логарифмічному масштабі.

Вираз для логарифмічної фазочастотної характеристики (ЛФЧХ), також подамо у вигляді алгебричної суми:

$$\varphi(\omega) = \sum \varphi_i(\omega) \text{ ю}$$

Розглянемо передатну функцію:

$$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_4 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2\zeta T_3 p + 1)}.$$

Вирази для АЧХ та ФЧХ мають у цьому разі вигляд:

$$N(\omega) = \frac{k\sqrt{T_2^2\omega^2 + 1}}{\sqrt{(T_1^2\omega^2 + 1)(T_4^2\omega^2 + 1)((1 - T_3^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T_3^2\omega^2)}};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(\omega T_2) - \arctg(\omega T_1) - \arctg(\omega T_4) - \arctg \frac{2\zeta T_3 \omega}{1 - T_3^2 \omega^2}.$$

Тому вираз логарифмічна амплітудно-частотна характеристика матиме такий вигляд

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_4^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{(1 - T_3^2 \omega^2)^2 + 4\zeta^2 T_3^2 \omega^2}.$$

### 5.3. Використання Matlab

Для побудови графіків ЛАЧХ та ЛФЧХ у середовищі Matlab необхідно задати діапазон змінювання частоти за допомогою функції **logspace**:

**w = logspace(0,3,150)**

Діапазон обирається в залежності від значень частот спряження, аналогічно тому, як при побудові асимптотичної ЛАЧХ. У розглядуваному випадку обрано діапазон частот від  $10^0(1)$  до  $10^3(1000) c^{-1}$ , кількість точок – 150.

Функції  $L(\omega)$  та  $\varphi(\omega)$  задаються наступним чином:

```
L=20*(log10(k) + log10(sqrt(1+w.^2*T2^2)) - log10(sqrt(1+w.^2*T1^2)) -  
- log10(sqrt(1+w.^2*T4^2)) - log10(sqrt((1-w.^2*T3^2).^2+4*ksi*w.^2*T3^2)));  
Fi=atan(w*T2)- atan(w*T1)- atan(w*T4)- atan(2*ksi*T3*w/(1-w.^2*T3^2));
```



Необхідно зазначити, що для коливальної ланки використовується функція *atan2*, яка визначає значення функції *arctg* в діапазоні від  $-\pi$  до  $\pi$ , тобто враховуються знаки чисельника і знаменника.

Для побудови графіків функцій  $L(\omega)$  та  $\varphi(\omega)$  слід використовувати функцію *semilogx*, яка будує графік в логарифмічному масштабі по осі абсцис, і в звичайному по осі ординат. Також доцільно використовувати функцію *subplot*.

```
subplot(2,1,1)
semilogx(w,L)
subplot(2,1,2)
semilogx(w,Fi*180/pi)
```

Для знаходження модуля та аргументу комплексних функцій також можна використовувати функції *abs* і *angle*. В такому випадку задається комплексна передатна функція  $W_{роз}(j\omega)$ :

```
p=j*w;
W=k*(T2*p+1)/((T1*p+1)*(T4*p+1)*(T3^2*p.^2+2*ksi*T3*p+1));
N=abs(W);
Fi=angle(W);
L=20*log10(N);
```

Слід зазначити, що функція *angle* видає значення аргументу в  $-\pi$  до  $\pi$ , тому якщо кінцеве значення ФЧХ перевищує  $-180^\circ$ , то необхідно застосувати функцію *unwrap*:

```
Fi2= unwrap (Fi);
```

## 5.4. Завдання

1. За заданою структурною схемою (див. п. 3.3) системи визначити передатну функцію розімкненої системи  $W_{роз}(p)$ , амплітудно-частотну  $N(\omega)$ , фазочастотну  $\varphi(\omega)$  характеристики та побудувати асимптотичну ЛАЧХ.

2. Побудувати точні ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи за допомогою засобів Simulink (функція *bode*).

3. Побудувати точні ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи за отриманими формулами  $L(\omega)$  та  $\varphi(\omega)$ .

4. Побудувати точні ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи безпосередньо за комплексною передатною функцією розімкненої системи  $W_{роз}(j\omega)$ , використовуючи функції *abs* та *angle*.

5. Порівняти отримані графіки та зробити висновки.

## 5.5. Контрольні запитання

1. Як визначається ЛАЧХ?
2. Які одиниці виміру по осях на графіку ЛАЧХ?
3. Що таке частота зрізу?
4. Як будується асимптотична ЛФЧХ?
5. Як будується асимптотична ЛАЧХ?
6. Як визначаються запаси стійкості по логарифмічним частотним характеристикам?

## 6. Визначення усталених похибок систем автоматичного керування

### 6.1. Мета роботи

Вивчення похибок систем автоматичного керування в усталених режимах.

### 6.2. Загальні теоретичні відомості

В теорії автоматичного керування точність автоматичних систем, як правило, оцінюють за усталеними похибками, тобто за похибками в усталеному режимі, який настає після завершення перехідного процесу.

Усталені похибки САК визначають, використовуючи теорему про кінцеве значення функції:

$$\delta_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Phi_{\delta}(p) X(p)$$

де  $\Phi_{\delta}(p)$  – передатна функція замкненої системи за похибкою;  $X(p)$  – зображення вхідного діяння.

Якщо на вхід САК подається гармонічне вхідне збурення:

$$x(t) = A_m \sin \omega_x t,$$

де  $A_m$ ,  $\omega_x$  — відповідно амплітуда та частота сигналу, тоді динамічна похибка також матиме гармонічний характер:

$$\delta(t) = \delta_m \sin(\omega_x t + \varphi_{\delta})$$

де  $\delta_m$ ,  $\varphi_{\delta}$  — відповідно амплітуда та фаза помилки.

Іноді визначають тільки амплітуду похибки  $\delta_m$ . Для вхідного діяння (17), частота якого  $\omega_x$  знаходиться у смузі низьких та середніх частот, де підсилення розімкненої системи більше від одиниці, тобто

$$|W_{роз}(j\omega_x)| > 1,$$

доцільно використовувати наближений вираз для визначення амплітуди  $\delta_m$ .

Передатну функцію замкненої системи за похибкою в цьому випадку запишемо у вигляді:

$$\Phi_{\delta}(j\omega_x) = \frac{1}{1 + W_{роз}(j\omega_x)} \approx \frac{1}{W_{роз}(j\omega_x)}.$$

Тоді амплітуда похибки  $\delta_m$  визначається з виразу:

$$\delta_m = A_m |\Phi_{\delta}(j\omega_x)| \approx \frac{A_m}{|W_{роз}(j\omega_x)|}.$$

### 6.3. Завдання

1. За заданою структурною схемою (див. завдання п. 3.3) визначити передатну функцію розімкненої системи  $W_{роз}(p)$  та передатну функцію замкненої системи за похибкою  $\Phi_{\delta}(p)$ .
2. Визначити усталені похибки для заданих типів вхідних діянь.
3. Створити S-модель на основі структурної схеми системи.
4. Побудувати графіки похибок  $\delta(t)$  при заданих вхідних збуреннях.
5. Порівняти результати моделювання (п. 4) з аналітичними розрахунками (п. 2).
6. Зробити висновки.

### Варіанти завдань

Варіант	Види вхідного діяння $x(t)$			
	1	2	3	4
1	2	$3t$	$5t^2$	$3 \sin(0,2t)$
2	0,2	$4t$	$0,5t^2$	$0,35 \sin(0,1t)$
3	0,5	$0,6t$	$7t^2$	$12 \sin(0,5t)$
4	5	$2t$	$0,8t^2$	$1,5 \sin(2t)$
5	12	$6t$	$0,7t^2$	$1,8 \sin(0,2t)$
6	1,2	$0,6t$	$1,7t^2$	$0,4 \sin(0,15t)$
7	1,5	$0,1t$	$1,9t^2$	$0,1 \sin(0,5t)$
8	5	$1,5t$	$9t^2$	$0,1 \sin(t)$
9	1,3	$8t$	$2t^2$	$0,2 \sin(0,1t)$
10	1,2	$4t$	$t^2$	$0,5 \sin(0,1t)$
11	1,1	$0,25t$	$0,6t^2$	$7 \sin(0,2t)$

### 6.4. Контрольні питання

1. Як визначається передатна функція розімкненої системи?
2. Як визначається передатна функція замкненої системи за похибкою?
3. Як визначається усталені похибки при вхідному діянні виду  $x(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2$ ?
4. Як визначається усталені похибки при вхідному діянні виду  $x(t) = A_m \sin \omega_x t$ ?
5. Що таке статична похибка?
6. Що таке швидкісна похибка?
7. Що таке динамічна похибка?

## 7. Дослідження стійкості систем автоматичного керування

### 7.1. Мета роботи

Вивчення критеріїв стійкості, які використовуються при аналізі систем автоматичного керування.

### 7.2. Загальні теоретичні відомості.

Стійкість – це властивість системи автоматичного керування повертатися в положення рівноваги після виходу з цього положення та закінчення дії вхідних діянь.

Керована (вихідна) величина в системі може бути записана наступним чином:

$$y(t) = y_{\text{власний}}(t) + y_{\text{вимушений}}(t), \quad (7.1)$$

де  $y_{\text{власний}}(t)$  – складова, що характеризує перехідний режим в системі, тобто власний (вільний) рух;  $y_{\text{вимушений}}(t)$  – складова, що характеризує усталений режим в системі, тобто вимушений рух при дії певних вхідних впливів.

Для забезпечення стійкості системи необхідно виконання умови:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{власний}}(t) = 0 \quad (7.2)$$

Отже, для аналізу стійкості системи автоматичного керування необхідно розглядати  $y_{\text{власний}}(t)$ . Ця складова являє собою розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \quad (7.3)$$

Для знаходження розв'язку однорідного рівняння (7.3) необхідно знайти корені характеристичного рівняння:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (7.4)$$

Тоді розв'язок однорідного рівняння (7.3) має вигляд:

$$y_{\text{власний}}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (7.5)$$

де  $C_i$  – сталі інтегрування;  $P_i$  – корені характеристичного рівняння (7.4)

Умова стійкості (7.2) виконуватиметься, якщо всі дійсні корені характеристичного рівняння будуть від'ємними, а також всі дійсні частини комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння також будуть від'ємними.

Для аналізу стійкості системи можна використовувати критерії стійкості – алгебраїчні та частотні.

### **7.3. Завдання**

1. За заданою структурною схемою (див. завдання п. 3.3) визначити передатну функцію розімкненої системи  $W_{роз}(p)$  та характеристичне рівняння замкненої системи.
2. Дослідити стійкість системи за критерієм Гурвіца.
3. Побудувати АФЧХ розімкненої системи та дослідити стійкість за критерієм Найквіста.
4. Побудувати графіки ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи. Оцінити стійкість системи, та визначити запаси стійкості.
5. Зробити висновки.

### **7.4. Контрольні запитання**

1. Як визначається стійкість системи за критерієм Найквіста?
2. Як визначається стійкість системи за критерієм Гурвіца?
3. Як визначається запас стійкості по амплітуді?
4. Як визначається запас стійкості по фазі?
5. Яка необхідна умова стійкості за критерієм Гурвіца?
6. Якими мають бути корені характеристичного рівняння системи для забезпечення стійкості?

## **Література**

1. Зайцев Г. Ф. Теория автоматического управления и регулирования. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища школа, 1989. – 431 с.
2. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1978. – 256 с.
3. Бурау Н.І., Мураховський С.А., Сопілка Ю.В. Теорія автоматичного керування. Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт. – К.: НТУУ «КПІ», 2007. – 32 с.
4. Краснопрошина А. А., Репникова Н. Б., Ильченко А. А. Современный анализ систем управления с применением MATLAB, Simulink, Control System: Учебное пособие. – К.: "Корнійчук", 1999. – 144 с.
5. Лазарев Ю. Ф. MatLAB 5.x. – К.: Изд. группа BHV, 2000. – 384 с. (Глава 6, с. 295 – 319; Глава 7, с. 325 – 371)
6. Лазарев Ю. Моделирование процессов и систем в MATLAB. Учебный курс. – СПб.: Питер; Киев: Изд. группа BHV, 2005. – 512 с. (Урок 6, с. 234 – 276; Урок 7, с. 277 – 331)