

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»



ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Методичні вказівки
до виконання розрахункових робіт



Київ-2007

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Методичні вказівки

до виконання розрахункових робіт
для студентів напрямів підготовки 0909 «Прилади»
і 0911 «Лазерна та оптоелектронна техніка»
приладобудівного факультету

Затверджено Методичною радою НТУУ «КПІ»

Київ
НТУУ «КПІ»
2007

Теорія автоматичного керування: Метод. вказівки до виконання розрахункових робіт для студентів для студентів напрямів підготовки 0909 «Прилади» і 0911 «Лазерна та оптоелектронна техніка» приладобудівного факультету / Уклад.: Н.І. Бурау, С.А. Мураховський, Ю.В. Сопілка – К.: НТУУ «КПІ», 2007. – 32 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»

(Протокол №3 від 22.11.2007 р.)

Навчальне видання

Теорія автоматичного керування

Методичні вказівки

до виконання розрахункових робіт

для студентів напрямів підготовки 0909 «Прилади»

і 0911 «Лазерна та оптоелектронна техніка»

приладобудівного факультету

Укладачі

*Бурау Надія Іванівна, д-р техн. наук
Мураховський Сергій Анатолійович
Сопілка Юрій Валерійович*

Відповідальний
редактор

Ю.Ф. Лазарєв, канд. техн. наук, доц.

Рецензент

І.В. Максимчук, канд. техн. наук, доц.

За редакцією укладачів

Надруковано з оригінал-макета замовника

Темплан 2007 р., поз. 2-145

Підп. до друку 22.11.2007. Формат 60×84¹/₁₆. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – ризографія. Ум. друк. арк. 1,86, Обл.-вид. арк. 3,09. Зам № ~~426~~ 4. Наклад 120 пр.

НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка»
Свідоцтво ДК № 1665 від 28.01.2004 р.
03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15
тел./факс (044) 241-68-78

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки складені відповідно до чинної робочої навчальної програми дисципліни «Теорія автоматичного керування» для студентів приладобудівного факультету, які навчаються за програмою освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавра за напрямками: 6.0909 – прилади та 6.0911 – лазерна та оптоелектронна техніка.

Мета даного навчального видання – допомогти студентам в освоєнні методів аналізу лінійних систем автоматичного керування та надбанні необхідних практичних навичок аналізу типових лінійних систем в процесі виконання розрахункових (домашніх контрольних) робіт.

Розрахункова робота чи домашня контрольна робота виконується як різновид самостійної роботи студента. Виконання розрахункових чи контрольних робіт з дисципліни «Теорія автоматичного керування» сприятиме закріпленню, поглибленню та узагальненню теоретичних основ курсу, а також сприятиме розвитку навичок самостійної творчої роботи студентів у процесі їх навчання.

Тематика робіт присвячена питанням аналізу типових систем автоматичного керування чи з'єднань динамічних ланок, які можуть являти собою частину складної системи автоматичного керування.

Методичні вказівки містять стислі теоретичні відомості про динамічні характеристики систем автоматичного керування, завдання для розрахункових (домашніх контрольних) робіт двох видів (аналіз розімкнених ланцюгів та аналіз замкнутих систем) зі схемами, математичним описом та варіантами значень параметрів, а також приклади виконання розрахункових (домашніх контрольних) робіт для кожного виду завдання.

1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Основні характеристики елементів та систем автоматичного керування

Рівняння динаміки елемента системи автоматичного керування (САК) – це диференціальне рівняння, що визначає залежність вихідної величини $X_{\text{вих}}(t)$ елемента від його вхідної величини $X_{\text{вх}}(t)$ і часу.

Для заданого чи визначеного рівняння динаміки елемента САК, що описує залежність вихідної величини елемента від вхідної, передатна функція ланки $W(p)$ визначається за допомогою перетворення Лапласа за нульових початкових умов.

Передатна функція ланки (системи) $W(p)$ визначається як відношення зображень за Лапласом вихідної $X_{\text{вих}}(p)$ і вхідної $X_{\text{вх}}(p)$ величин за нульових початкових умов:

$$W(p) = \frac{X_{\text{вих}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)}, \quad (1)$$

тобто передатна функція визначається із рівняння ланки, записаного в операторній формі. Якщо елемент системи має дві вхідних величини, необхідно визначити дві передатні функції (за кожним входом).

Ваговою функцією $w(t)$ називається реакція елемента (системи) на миттєвий одиничний імпульс $\delta(t)$ на вході елемента (системи), тобто на миттєвий імпульс нескінченно великої амплітуди і одиничної площі. Щоб отримати вагову функцію $w(t)$, необхідно визначити оригінал (обернене перетворення Лапласа), що відповідає передатній функції:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\}, \quad (2)$$

де $L^{-1}\{\bullet\}$ знак оберненого перетворення Лапласа.

Перехідною функцією елемента (системи) $h(t)$ називається реакція елемента (системи) на одиничне ступінчасте діяння, тобто перехідна функція визначається як процес на виході $h(t)=X_{\text{вих}}(t)$ за одиничного стрибка на вході $X_{\text{вх}}(t)=1[t]$. Перехідна функція $h(t)$ визначається як обернене перетворення Лапласа (тобто оригінал) від зображення $W(p)/p$, тобто:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\}. \quad (3)$$

В табл. 1 наведено деякі функції часу та відповідні їм зображення.

Таблиця 1.
Таблиця перетворень Лапласа деяких функцій.

№ n/n	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
3.	$A \cdot 1(t)$	$\frac{A}{p}$
4.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5.	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
6.	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$
7.	$\sin \lambda t$	$\frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}$
8.	$\cos \lambda t$	$\frac{p}{p^2 + \lambda^2}$
9.	$e^{-at} \sin \lambda t$	$\frac{\lambda}{(p+a)^2 + \lambda^2}$
10.	$e^{-at} \cos \lambda t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \lambda^2}$

Деякі властивості перетворення Лапласа.

1. Теорема про додавання (лінійність перетворення)

$$L\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 L\{f_1(t)\} + a_2 L\{f_2(t)\}.$$

2. Теорема про інтегрування

$$L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}.$$

3. Теорема про диференціювання (за нульових початкових умов)

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p).$$

Комплексною передатною функцією (КПФ) ланки (системи) називається відношення комплексного зображення вихідної величини $X_{\text{вих}}(j\omega)$ до комплексного зображення вхідної величини $X_{\text{вх}}(j\omega)$ в режимі усталених гармонічних коливань:

$$W(j\omega) = \frac{X_{\text{вих}}(j\omega)}{X_{\text{вх}}(j\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega) = N(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (4)$$

де $P(\omega)$ та $Q(\omega)$ - відповідно дійсна та уявна частини КПФ у алгебраїчному поданні; $N(\omega)$ та $\varphi(\omega)$ – відповідно модуль та аргумент КПФ у показниковому поданні.

Амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) ланки (системи) називається крива залежності модуля КПФ $N(\omega)$ від частоти при змінюванні частоти від 0 до ∞ .

Фазочастотною характеристикою (ФЧХ) ланки (системи) називається крива залежності аргументу КПФ $\varphi(\omega)$ від частоти при змінюванні частоти від 0 до ∞ .

1.2. Передатні функції систем автоматичного керування

Передатна функція розімкненої системи $W_{роз}(p)$ дорівнює добутку передатних функцій всіх елементів, що входять до замкненого контуру:

$$W_{роз}(p) = W_{np}(p) W_{зз}(p), \quad (5)$$

де $W_{np}(p)$ – передатна функція ланок у прямому зв'язку; $W_{зз}(p)$ – передатна функція ланок у зворотному зв'язку.

Для системи з одиничним зворотним зв'язком ($W_{зз}(p) = 1$):

$$W_{роз}(p) = W_{np}(p). \quad (6)$$

Після визначення передатної функції розімкненої системи можна знайти передатні функції замкненої системи :

- за вхідним діянням:

$$\Phi(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{W_{np}(p)}{1 + W_{np}(p)W_{зз}(p)} = \frac{W_{np}(p)}{1 + W_{роз}(p)}, \quad (7)$$

або для $W_{зз}(p) = 1$:

$$\Phi(p) = \frac{W_{роз}(p)}{1 + W_{роз}(p)}; \quad (8)$$

- за помилкою системи:

$$\Phi_{\delta}(p) = \frac{\delta(p)}{x(p)} = \frac{1}{1 + W_{роз}(p)}; \quad (9)$$

- за збуренням:

$$\Phi_f(p) = \frac{y(p)}{f(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W_{роз}(p)}. \quad (10)$$

Вирази (7)-(10) мають однакові знаменники, які визначають характеристичне рівняння $D(p)$ замкненої системи. Якщо передатну функцію розімкненої системи в загальному випадку записати у вигляді:

$$W_{\text{роз}}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)},$$

то для отримання характеристичного рівняння слід до знаменника передатної функції розімкненої системи додати її чисельник:

$$D(p) = R(p) + Q(p).$$

1.3. Побудова асимптотичних логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи.

Розглянемо визначення та побудову частотних характеристик на прикладі передатної функції розімкненої системи

$$W_{\text{роз}}(p) = \frac{K_{\text{роз}}(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2T_3 \zeta p + 1)}, \quad (11)$$

де $K_{\text{роз}} = 10 \text{ с}^{-1}$; $T_1 = 0,1 \text{ с}$; $T_2 = 0,5 \text{ с}$; $T_3 = 0,01 \text{ с}$; $\zeta = 0,7$.

За такого значення ζ можна не враховувати горба амплітудно-частотної характеристики коливальної ланки, величина якого при цьому не перевищує значення 3 дБ.

Амплітудна і фазова частотні характеристики розімкненої системи визначаються за виразами:

$$N(\omega) = \frac{K}{\omega} \sqrt{\frac{1 + T_1^2 \omega^2}{(1 + T_2^2 \omega^2)[(1 - T_3^2 \omega^2)^2 + 4\zeta T_3^2 \omega^2]}}; \quad (12)$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \text{arctg } T_1 \omega - \text{arctg } \frac{2\zeta T_3 \omega}{1 + T_3^2 \omega^2}. \quad (13)$$

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ) розімкненої системи визначається як:

$$L(\omega) = 20 \lg N(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega), \quad (14)$$

де $L_i(\omega)$ - ЛАЧХ i -тої ланки системи.

Одиницею виміру $L(\omega)$ є децибел (відкладаємо на осі ординат), а на осі абсцис відкладається частота ω [c^{-1}] в логарифмічному масштабі.

Вираз для логарифмічної фазочастотної характеристики (ЛФЧХ), який зберігається у вигляді (13) без змін, також запишемо у вигляді алгебраїчної суми:

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega), \quad (15)$$

де $\varphi_i(\omega)$ - ЛФЧХ i -тої ланки.

При побудові ЛФЧХ відлік кутів $\varphi(\omega)$ іде за віссю ординат в звичайному масштабі в кутових градусах чи радіанах. За віссю абсцис відкладається частота в логарифмічному масштабі.

Характеристики $L(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ будують на одному бланку, причому $\varphi(\omega)$ розташовують точно під $L(\omega)$.

ЛАЧХ і ЛФЧХ можна побудувати за виразами (14) та (15), або безпосередньо за заданою передатною функцією, використовуючи відомі асимптотичні характеристики окремих елементів.

Розглянемо методику побудови асимптотичних характеристик (рис.1).

1. Визначити частоти спряження $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, де $\omega_i = 1/T_i$, відкласти їх значення вздовж осі частот.

2. На частоті $\omega = 1$ відкласти ординату, яка дорівнює $20 \lg K_{роз}$, де $K_{роз}$ - коефіцієнт підсилення розімкненої системи, позначивши дану точку A .

3. Через точку A провести пряму з нахилом ($- \nu$ 20 дБ/дек), де ν - порядок астатизму системи, від осі ординат до першої частоти спряження. Даний відрізок є низькочастотною асимптотою ЛАЧХ. Якщо перша частота спряження менша за одиницю (тобто лежить зліва від частоти $\omega = 1$ на осі частот), то через точку A пройде продовження низькочастотної асимптоти.

4. Після кожної частоти спряження ω_i необхідно змінювати нахил ЛАЧХ:

- на (- 20 дБ/дек), якщо частота спряження визначається сталою часу ланки першого порядку типу $(Tp + 1)$ в знаменнику $W_{роз}(p)$;
- на (+20 дБ/дек), якщо частота спряження визначається сталою часу ланки того ж типу в чисельнику $W_{роз}(p)$;
- для ланок другого порядку (аперіодична другого порядку, коливальна) нахил змінюється на (± 40 дБ/дек) (знак "+", якщо ланка знаходиться в чисельнику $W_{роз}(p)$, а знак "-", якщо в знаменнику).

Для побудови точної ЛФЧХ розрахунок слід проводити за формулою (15), а дані розрахунку звести в таблицю, за результатами розрахунку побудувати графік сумарної характеристики.

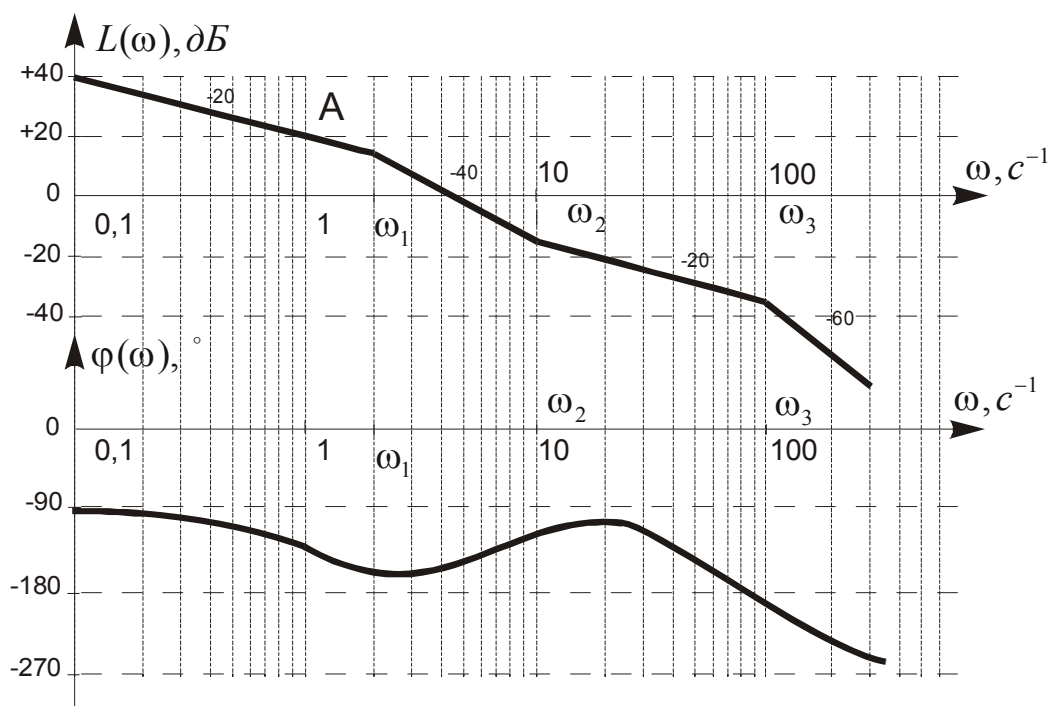


Рис. 1. Приклад побудови асимптотичних логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи.

1.4. Оцінка точності систем автоматичного керування

В теорії автоматичного керування точність автоматичних систем, як правило, оцінюють за усталеними помилками, тобто за помилками в усталеному режимі, який настає після завершення перехідного процесу.

Усталені похибки САК визначають, використовуючи теорему про кінцеве значення функції:

$$\delta_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Phi_{\delta}(p) X(p) \quad (16)$$

де $\Phi_{\delta}(p)$ – передатна функція замкненої системи за помилкою; $X(p)$ – зображення вхідного діяння.

Якщо на вхід САК подається гармонічне вхідне збудження:

$$x(t) = A_m \sin \omega_x t, \quad (17)$$

де A_m , ω_x — відповідно амплітуда та частота сигналу, тоді динамічна помилка також матиме гармонічний характер:

$$\delta(t) = \delta_m \sin(\omega_x t + \varphi_{\delta}) \quad (18)$$

де δ_m , φ_{δ} — відповідно амплітуда та фаза помилки.

Іноді визначають тільки амплітуду помилки δ_m . Для вхідного діяння (17), частота якого ω_x знаходиться у смузі низьких та середніх частот, де підсилення розімкненої системи більше від одиниці, тобто

$$|W_{роз}(j\omega_x)| > 1, \quad (19)$$

доцільно використовувати наближений вираз для визначення амплітуди δ_m .

Передатну функцію замкненої системи за помилкою в цьому випадку запишемо у вигляді:

$$\Phi_{\delta}(j\omega_x) = \frac{1}{1 + W_{роз}(j\omega_x)} \approx \frac{1}{W_{роз}(j\omega_x)}. \quad (20)$$

Тоді амплітуда помилки δ_m визначається з виразу:

$$\delta_m = A_m |\Phi_{\delta}(j\omega_x)| \approx \frac{A_m}{|W_{роз}(j\omega_x)|}. \quad (21)$$

Величину $|W_{роз}(j\omega_x)|$ можна визначити аналітичним шляхом, або, використовуючи ЛАЧХ розімкненої системи $L(\omega)$, за виразом:

$$|W_{\text{роз}}(j\omega_x)| = 10^{\frac{L(\omega_x)}{20}}, \quad (22)$$

де $L(\omega_x)$ — ордината ЛАЧХ на частоті вхідного діяння ω_x .

2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВИХ (ДОМАШНІХ КОНТРОЛЬНИХ) РОБІТ

2.1. Аналіз розімкнених ланцюгів (завдання 1)

1. Визначити передатні функції, вагові та перехідні характеристики, частотні характеристики елементів розімкненого ланцюга.
2. Визначити передатну функцію та записати рівняння динаміки ланцюга.
3. Побудувати асимптотичні ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненого ланцюга. Оцінити стійкість, якби система була замкнена, за частотними характеристиками розімкненого ланцюга.

Завдання 1.1.



Схема розімкненого ланцюга

Рівняння динаміки елементів

1: $U_1(t) = k_1 \cdot x(t);$
 2: $\frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t);$
3: $T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_2 \cdot U_2(t).$

Дані для розрахунку

Варіант	k_1	k_2	T_1, c	T_2, c
1	20	5	1	0,01
2	2,5	4	5	0,1
3	5	20	0,02	2,5
4	5	0,2	0,01	0,5
5	2	5	0,1	10

Завдання 1.2.



Схема розімкненого ланцюга

Рівняння динаміки елементів

1: $U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$; **2:** $T_1^2 \frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = k_2 \cdot U_1(t)$;

3: $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = T_3 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t)$.

Дані для розрахунку

Варіант	k_1	k_2	T_1, c	T_2, c	T_3, c
1	4	2,5	0,05	0,1	2
2	5	20	5	0,2	0,1
3	0,5	2	0,1	0,02	2,5
4	10	100	1	0,1	0,5
5	0,1	2	0,1	5	10

Завдання 1.3.

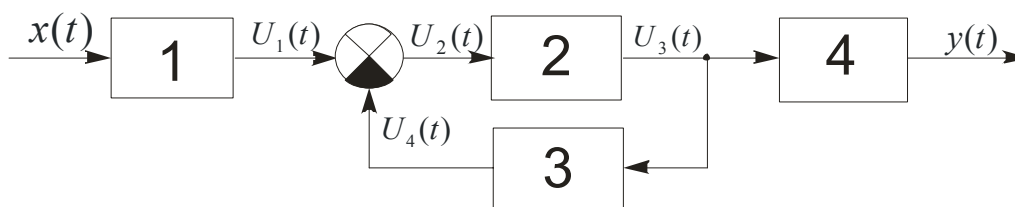


Схема розімкненого ланцюга зі зворотним зв'язком

Рівняння динаміки елементів

1: $U_1(t) = k_1 \cdot x(t)$; **2:** $U_3(t) = k_2 \cdot U_2(t)$;

3: $U_4(t) = \tau \frac{dU_3(t)}{dt}$; **4:** $T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_1 \frac{dU_3(t)}{dt} + U_3(t)$

Дані для розрахунку

Варіант	k_1	k_2	T_1, c	T_2, c	τ, c
1	4	2,5	0,05	0,1	2
2	10	10	0,1	0,5	10
3	10	1	0,05	2	0,01
4	10	0,1	5	0,1	0,2
5	10	100	0,1	1	10

Завдання 1.4.

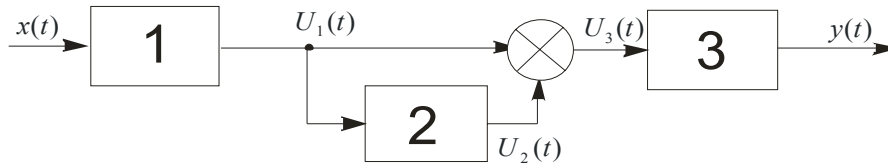


Схема розімкненого ланцюга з паралельним з'єднанням елементів

Рівняння динаміки елементів

$$1: \quad U_1(t) = k \cdot x(t); \quad 2: \quad U_2(t) = \tau \frac{dU_1(t)}{dt};$$

$$3: \quad T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = U_3(t).$$

Дані для розрахунку

Варіант	k	T_1, c	T_2, c	τ, c
1	10	1	2	0,2
2	1	5	0,2	0,1
3	100	10	0,5	2
4	10	5	0,1	0,05
5	0,1	0,01	5	0,02

Завдання 1.5.

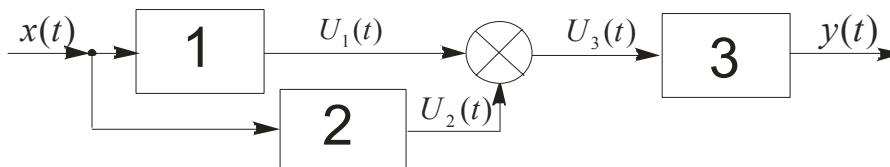


Схема розімкненого ланцюга з паралельним з'єднанням елементів

Рівняння динаміки елементів

$$1: \quad U_1(t) = \tau \frac{dx(t)}{dt}; \quad 2: \quad U_2(t) = k_1 \cdot x(t);$$

$$3: \quad T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = k_2 \cdot U_3(t).$$

Дані для розрахунку

Варіант	k	k	T, c	τ, c
1	20	0,5	0,1	10
2	2	0,5	5	2
3	100	1	0,02	0,01
4	10	0,1	1	0,2
5	10	100	0,1	0,05

Приклад виконання завдання 1



Схема розімкненого ланцюга

Рівняння динаміки:

- 1: $U_1(t) = k_1 \cdot x(t);$
- 2: $\frac{dU_2(t)}{dt} = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t);$
- 3: $T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_2 \cdot U_2(t).$

Дані для розрахунку:

$$k_1 = 0,5; \quad k_2 = 20; \quad T_1 = 0,1\text{с}; \quad T_2 = 0,025\text{с}.$$

1. Визначити передатні функції, вагові, перехідні та частотні характеристики елементів ланцюга.

1.1. Перший елемент

$$U_1(t) = k_1 \cdot x(t).$$

Передатна функція:

$$W_1(p) = \frac{U_1(p)}{X(p)} = k_1.$$

Вагова характеристика:

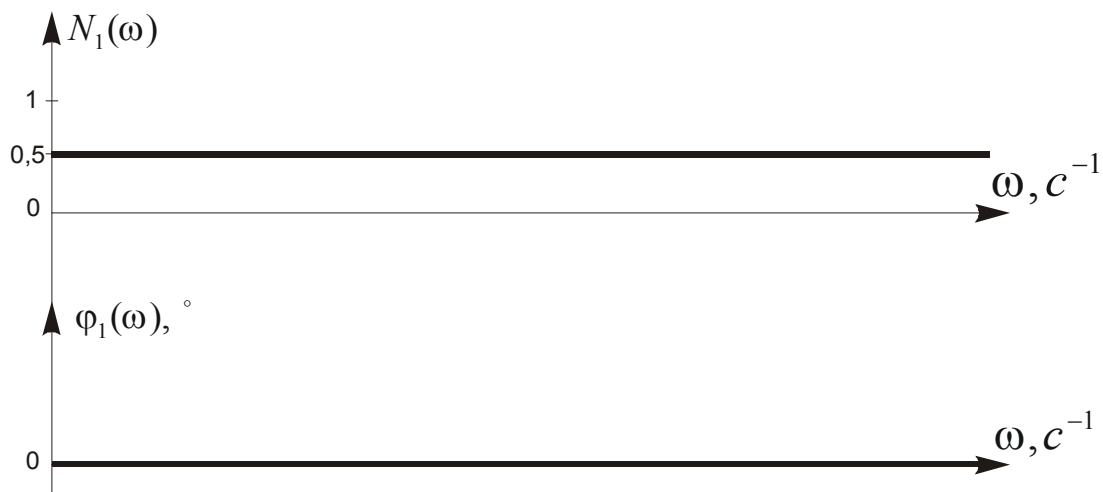
$$w_1(t) = L^{-1}\{W_1(p)\} = k_1 \cdot \delta(t).$$

Перехідна характеристика:

$$h_1(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_1(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k_1}{p}\right\} = k_1 \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = k_1 \cdot 1[t].$$

Частотні характеристики:

$$W_1(j\omega) = k_1; \quad N_1(\omega) = k_1; \quad \varphi_1(\omega) = 0;$$



Графіки частотних характеристик першого елемента

1.2. Другий елемент

$$\frac{dU_2(t)}{dt} = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t).$$

Рівняння в операторній формі: $pU_2(p) = T_1 pU_1(p) + U_1(p)$.

Передатна функція:

$$W_2(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{T_1 p + 1}{p}.$$

Вагова характеристика:

$$w_2(t) = L^{-1}\{W_2(p)\} = L^{-1}\{T_1\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = T_1 \delta(t) + 1[t].$$

Перехідна характеристика:

$$h_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_2(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{T_1 p + 1}{p^2}\right\} = T_1 \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} = T_1 \cdot 1[t] + t.$$

Частотні характеристики:

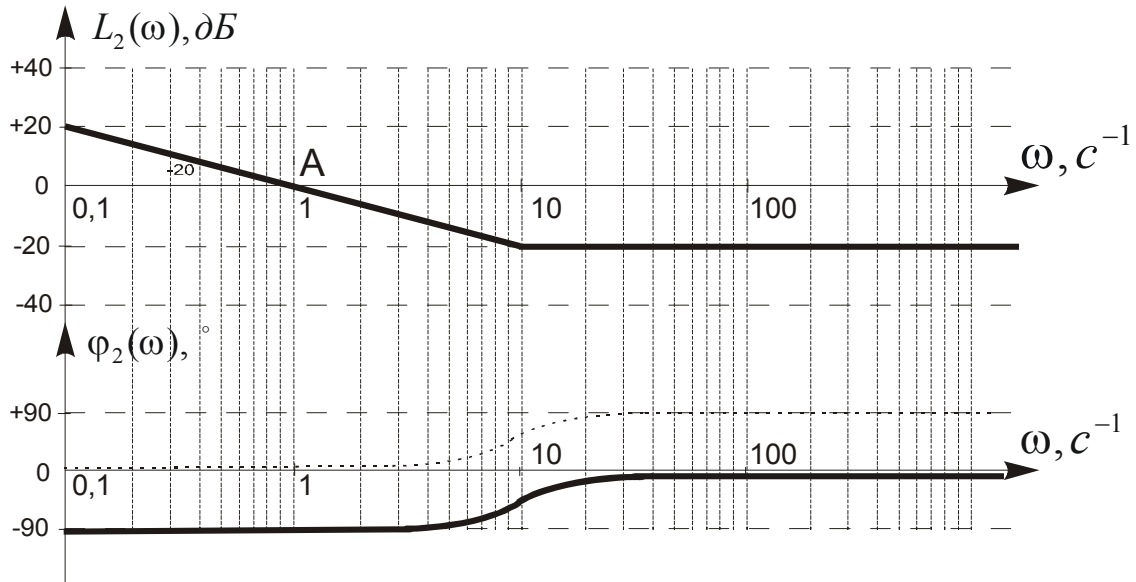
$$W_2(j\omega) = \frac{j\omega T_1 + 1}{j\omega};$$

$$N_2(\omega) = \frac{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}{\omega}; \quad \varphi_2(\omega) = -90^\circ + \operatorname{arctg} \omega T_1$$

$$L_2(\omega) = 20 \lg N_2(\omega) = 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \omega$$

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.; Ошибка! Объект не может

быть создан из кодов полей редактирования.; $T_1 = 0,1c$; $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 10c^{-1}$.



Графіки логарифмічних частотних характеристик другого елемента

1.3. Третій елемент

$$T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_2 \cdot U_2(t).$$

Рівняння в операторній формі: $T_2 p Y(p) + Y(p) = k_2 U_2(p)$.

Передатна функція:

$$W_3(p) = \frac{Y(p)}{U_2(p)} = \frac{k_2}{T_2 p + 1}.$$

Вагова характеристика:

$$w_3(t) = L^{-1}\{W_3(p)\} = \frac{k_2}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Перехідна характеристика:

$$h_3(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_3(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k_2}{p(T_2 p + 1)}\right\} = k_2(1 - e^{-\frac{t}{T_2}}).$$

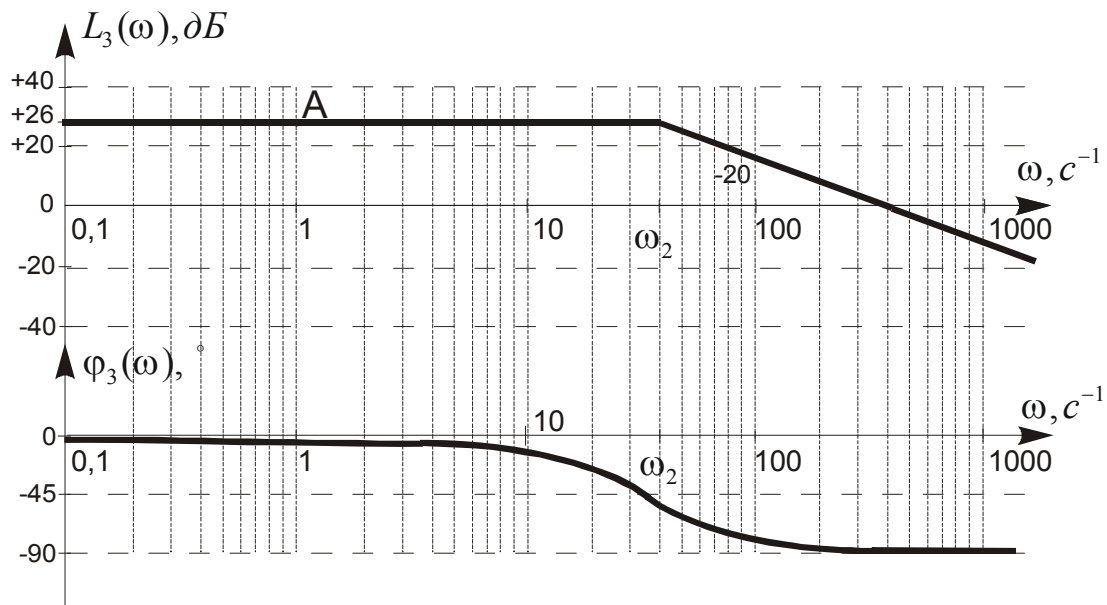
Частотні характеристики:

$$W_3(j\omega) = \frac{k_2}{j\omega T_2 + 1};$$

$$N_3(\omega) = \frac{k_2}{\sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}}; \quad \varphi_3(\omega) = -\arctg \omega T_2;$$

$$L_3(\omega) = 20 \lg N_3(\omega) = 20 \lg k_2 - 20 \lg \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}.$$

$$k_2 = 20 \text{ c}^{-1}; \quad 20 \lg k_2 = 20 \lg 20 = 26 \text{ дБ}; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} = 40 \text{ c}^{-1}.$$



Графіки логарифмічних частотних характеристик третього елемента

2. Визначити передатну функцію і записати рівняння динаміки ланцюга.

Для послідовного з'єднання передатна функція визначається як:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p)W_2(p)W_3(p).$$

Підставимо вирази для $W_1(p)$:

$$W(p) = k_1 \cdot \frac{T_1 p + 1}{p} \cdot \frac{k_2}{T_2 p + 1} = \frac{k_1 k_2 (T_1 p + 1)}{p (T_2 p + 1)}.$$

Позначимо $k_1 k_2 = k$, тоді

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)},$$

звідки запишемо:

$$Y(p) \cdot p(T_2 p + 1) = X(p) \cdot k(T_1 p + 1).$$

Розкриємо дужки:

$$T_2 p^2 Y(p) + p Y(p) = k T_1 p X(p) + k X(p).$$

Перейдемо до оригіналів функцій зліва та справа:

$$T_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = k T_1 \frac{dx(t)}{dt} + k x(t).$$

Рівняння динаміки запишемо у вигляді:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} = b_1 T_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t),$$

де $a_2 = T_2$; $a_1 = 1$; $b_1 = k T_1$; $b_0 = k$.

4. Побудувати асимптотичні ЛАЧХ та ЛФЧХ.

Передатна функція розімкненого ланцюга:

$$W(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)},$$

де $k = k_1 \cdot k_2 = 0.5 \cdot 20 = 10 \text{c}^{-1}$.

Побудова ЛАЧХ:

1) ордината точки А: $20 \lg k = 20 \text{дБ}$;

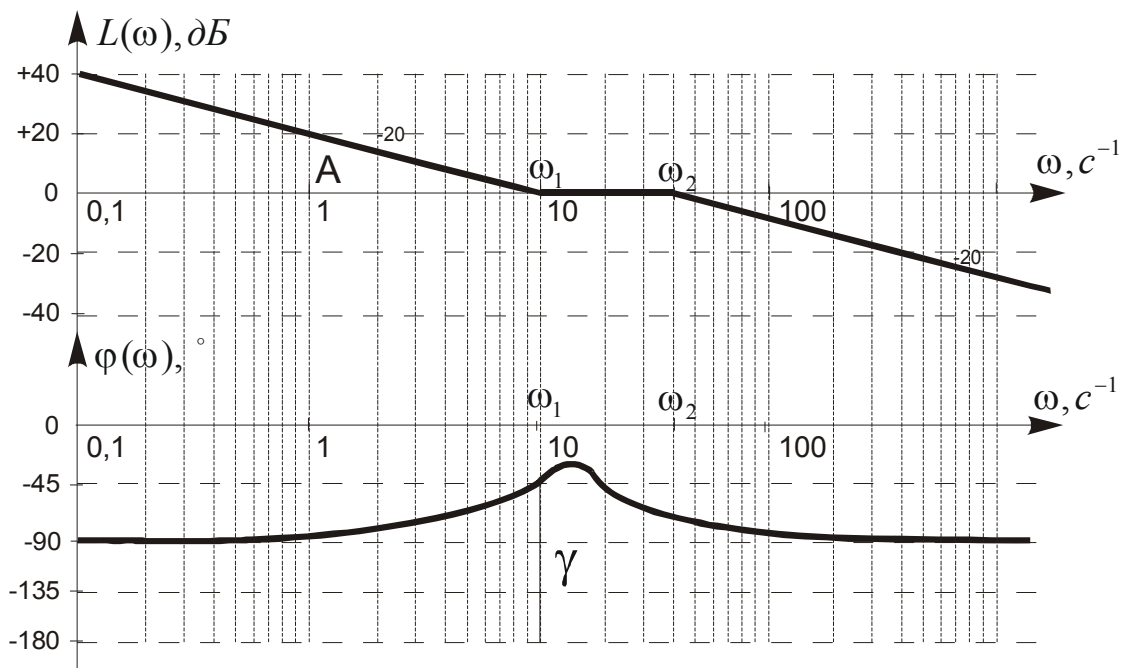
початковий нахил: $\nu = 1$, нахил $-20 \frac{\partial B}{\partial \text{дек}}$;

2) частоти спряження:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 10 \text{c}^{-1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} = 40 \text{c}^{-1}.$$

Побудова ЛФЧХ:

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \text{arctg} \omega T_1 - \text{arctg} \omega T_2$$



Графіки логарифмічних частотних характеристик ланцюга

Частота зрізу $\omega_{зр} = \omega_1$, запас стійкості по фазі визначається на частоті зрізу як фазовий кут, яким необхідно доповнити ЛФЧХ на частоті зрізу $\varphi(\omega_{зр})$ до значення $|-180^\circ|$, тобто, $\gamma = 135^\circ$.

ЛФЧХ не перетинає значення (-180°) , тому запас стійкості по амплітуді не визначаємо (система стійка).

2.2. Аналіз замкнених систем (завдання 2)

1. Визначити передатні функції, вагові та перехідні характеристики, частотні характеристики елементів замкнених систем.
2. Визначити передатну функцію замкненої системи за помилкою $\Phi_\delta(p)$ та оцінити усталену похибку САК при заданому вхідному сигналі $x(t)$.
3. Побудувати асимптотичні ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи. Оцінити стійкість САК.

Завдання 2.1.

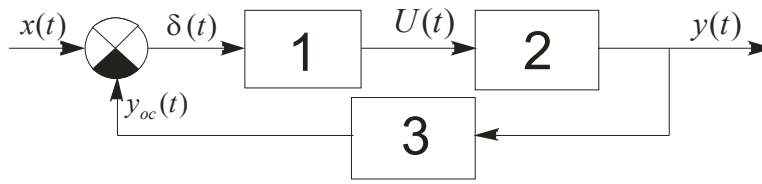


Схема замкненої системи

Рівняння динаміки елементів

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1:} \quad & \frac{dU_1(t)}{dt} = k_1 \cdot \delta(t); & \mathbf{2:} \quad & T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t); \\
 \mathbf{3:} \quad & T_3 \frac{dy_{oc}(t)}{dt} + y_{oc}(t) = k_2 \cdot y(t).
 \end{aligned}$$

Дані для розрахунку

Варіант	k_1 , В/град	k_2	T_1, c	T_2, c	T_3, c	$x(t)$, град
1	50	20	0,8	2	0,05	$3t + 0,8t^2$
2	50	2	0,1	1	0,02	$10t$
3	5	0,2	0,02	0,5	0,2	0,02
4	10	1	1	0,05	0,4	$8 \sin 0,5t$
5	2,5	4	0,1	0,25	0,75	$5 + 0,7t$

Завдання 2.2.

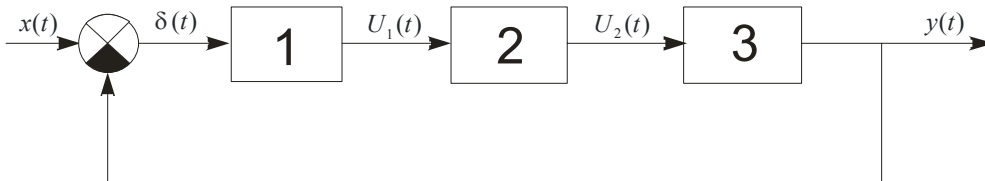


Схема замкненої системи

Рівняння динаміки елементів

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1:} \quad & \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}; \\
 \mathbf{2:} \quad & T_1^2 \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = k \cdot U_1(t); & \mathbf{3:} \quad & \frac{dy(t)}{dt} = U_2(t).
 \end{aligned}$$

Дані для розрахунку

Варіант	k	T_1, c	T_2, c	$x(t)$, град
1	10	0,1	0,4	$0,2 \sin 1,05t$
2	2	0,25	0,5	0,2
3	10	2	4	$2 \sin 0,5t$
4	5	0,02	0,04	$0,5t^2$
5	0,1	5	10	$0,05 \sin 4t$

Завдання 2.3.

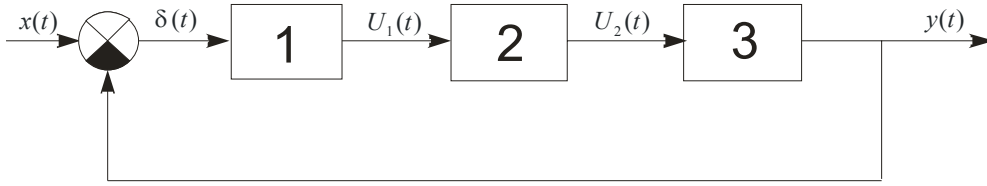


Схема замкненої системи

Рівняння динаміки елементів

$$1: U_1(t) = k \cdot \delta(t); \quad 2: T_1^2 \frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = U_1(t);$$

$$3: T_4 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_3 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t).$$

Дані для розрахунку

Варіант	k, В/град	T_1, c	T_2, c	T_3, c	T_4, c	$x(t)$, град
1	10	2	4	0,1	0,02	$0,5 \sin 2t$
2	0,1	1	0,4	1	0,05	$0,5 \sin 0,1t$
3	1	0,1	0,5	0,01	2	$5 + 2t$
4	5	0,02	0,05	0,1	0,5	$4t^2$
5	10	0,2	1	0,01	0,2	$0,1 \sin 0,4t$

Завдання 2.4.

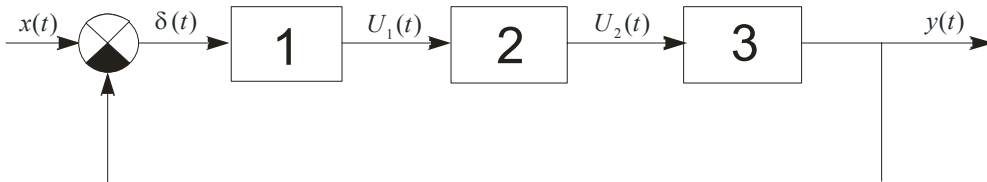


Схема замкненої системи

Рівняння динаміки елементів

$$1: T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = k \cdot \delta(t); \quad 2: \frac{dU_2(t)}{dt} = U_1(t);$$

$$3: T_3 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t).$$

Дані для розрахунку

Варіант	k, В/град	T_1, c	T_2, c	T_3, c	$x(t)$, град
1	10	2	0,2	0,01	$0,8 \sin 0,1t$
2	1	0,01	1	0,5	$0,5 \sin 0,8t$
3	5	0,1	0,2	0,01	$0,1t + 0,5t^2$
4	0,1	0,5	2	0,2	$10t$
5	10	0,01	0,5	0,1	$1,5 \sin 0,2t$

Завдання 2.5.

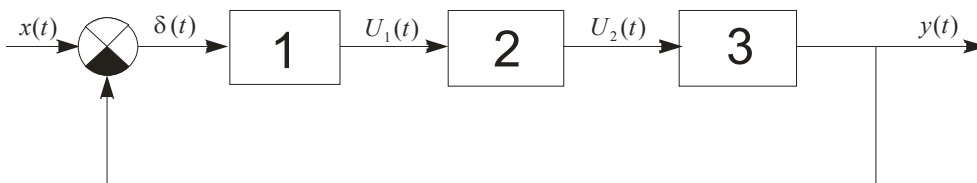


Схема замкненої системи

Рівняння динаміки елементів

$$1: U_1(t) = k_1 \cdot \delta(t); \quad 2: \frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} = T_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t);$$

$$3: T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_3 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_2 \cdot U_2(t).$$

Дані для розрахунку

Варіант	k_1 , В/град	k_2 , град/В	T_1 , с	T_2 , с	T_3 , с	$x(t)$, град
1	20	5	1	0,01	0,02	$3t + 0,8t^2$
2	2,5	4	5	0,1	0,2	$0,5t^2$
3	10	2	0,1	0,02	0,5	$0,2 + 0,5t$
4	1	5	0,05	0,2	0,01	$0.2 \sin 0,5t$
5	5	10	2	0,5	0,1	$4 \sin 8t$

Завдання 2.6.

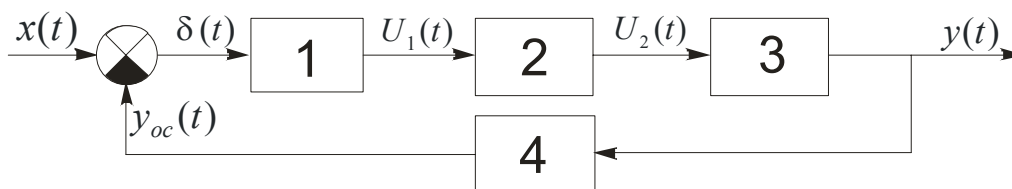


Схема замкненої системи

Рівняння динаміки елементів

$$1: \frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}; \quad 3: T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = U_2(t);$$

$$2: U_2(t) = k_1 \cdot U_1(t); \quad 4: \frac{dy_{oc}(t)}{dt} = k_2(t) \cdot y(t).$$

Дані для розрахунку

Варіант	k_1	k_2	T , с	$x(t)$, град
1	5	2	0,05	$0,8t$
2	0,5	0,2	0,01	$0,25$
3	5	20	0,2	$0,3 \sin 0,2t$
4	0,25	4	0,1	$0,25 \sin 0,1t$
5	10	0,01	2	$0,2t + 0,6t^2$

Завдання 2.7.

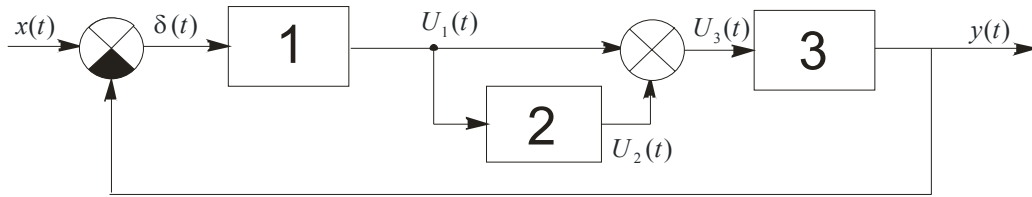


Схема замкненої системи з паралельним з'єднанням елементів

Рівняння динаміки елементів

1: $U_1(t) = k \cdot \delta(t);$

2: $\frac{dU_2(t)}{dt} = U_1(t);$

3: $T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = U_3(t);$

Дані для розрахунку

Варіант	к, В/град	T, с	x(t), град
1	1	0,1	5 sin 0,3t
2	10	1	0,1 sin 0,2t
3	0,1	0,02	2 sin 3t
4	100	0,2	0,3 sin 0,5t
5	0,1	0,5	0,2t + 0,5t ²

Завдання 2.8.

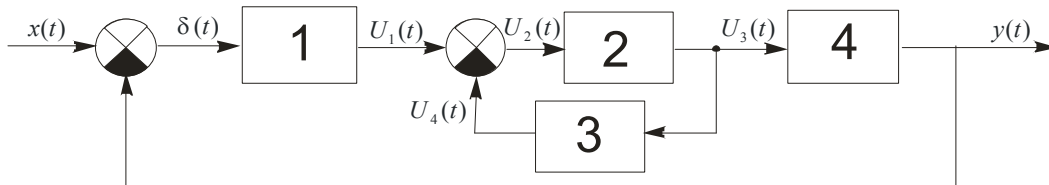


Схема замкненої системи з місцевим зворотним зв'язком

Рівняння динаміки елементів

1: $U_1(t) = k_1 \cdot \delta(t);$

2: $U_3(t) = k_2 \cdot U_2(t);$

3: $U_4(t) = \tau \frac{dU_3(t)}{dt};$

4: $T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = U_3(t)$

Дані для розрахунку

Варіант	k ₁ , В/град	k ₂	τ, с	T, с	x(t), град
1	100	0,1	0,1	0,2	0,7 sin 0,5t
2	40	2,5	0,1	0,5	0,4 sin 0,8t
3	10	10	0,5	0,01	0,5 + 2t
4	1	0,05	0,2	1	4t ²
5	20	0,05	0,01	0,4	5 sin 2t

Завдання 2.9.

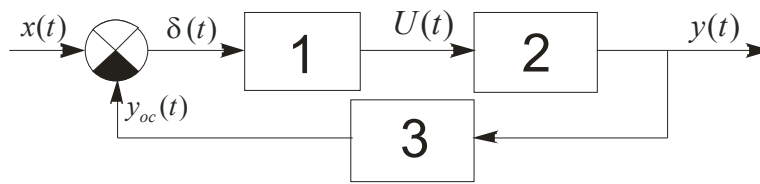


Схема замкненої системи

Рівняння динаміки елементів

$$1: \frac{dU(t)}{dt} + U(t) = k \cdot \delta(t);$$

$$2: \frac{dy(t)}{dt} = U(t); \quad 3: T_2 \frac{dy_{oc}(t)}{dt} + y_{oc}(t) = T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t).$$

Дані для розрахунку

Варіант	k, В/град	T_1, c	T_2, c	$x(t)$, град
1	10	0,02	0,2	$5 \sin 0,05t$
2	10	1	0,02	$0,1 + 2t$
3	1	0,1	2,5	$0,3 \sin 0,1t$
4	10	0,1	0,05	0,25
5	0,1	0,01	0,5	$4t^2$

Завдання 2.10.

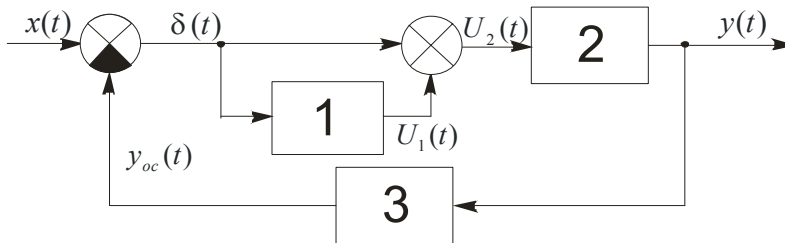


Схема замкненої системи з паралельним з'єднанням елементів

Рівняння динаміки елементів

$$1: \frac{dU_1(t)}{dt} = \delta(t); \quad 2: T_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = k_1 \cdot U_2(t);$$

$$3: T_2 \frac{dy_{oc}(t)}{dt} + y_{oc}(t) = k_2 \cdot \frac{dy(t)}{dt}.$$

Дані для розрахунку

Варіант	k_1	k_2	T_1, c	T_2, c	$x(t)$, град
1	0,4	2,5	0,01	0,5	$0,3 \sin 0,01t$
2	20	5	0,02	5	$0,5 + 0,4t$
3	10	10	0,01	0,1	$0,2 \sin 0,1t$
4	10	0,1	0,5	0,04	0,25
5	1	0,2	1	0,4	$0,7t^2$

Завдання 2.11.

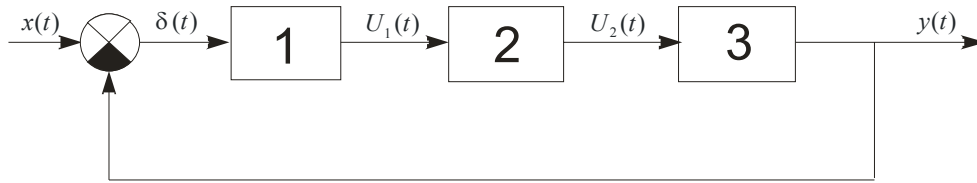


Схема замкненої системи

Рівняння динаміки елементів

1: $U_1(t) = k_1 \cdot \delta(t);$

2: $T_1 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = k_2 \cdot U_1(t);$ 3: $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = T_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t).$

Дані для розрахунку

Варіант	$k_1, \text{В/град}$	k_2	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$x(t), \text{град}$
1	2,5	40	0,02	5	$0,4 \sin 0,2t$
2	0,5	4	0,01	1	$0,2 \sin 5t$
3	0,2	5	0,05	0,2	$0,2 + t$
4	0,5	20	1	0,5	$5t$
5	10	2,5	0,4	0,01	$0,5 \sin 2t$

Приклад виконання завдання 2

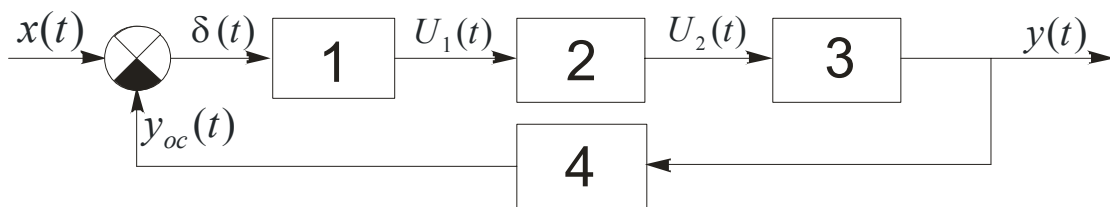


Схема замкненої системи

Рівняння динаміки:

1: $\frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt};$ 2: $T \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = kU_1(t);$

3: $\frac{dy(t)}{dt} = U_2(t).$

Дані для розрахунку:

$k = 10; T_1 = 0,05\text{с}; x(t) = 0,2 \text{ град.}$

1. Визначити передатні функції, вагові, перехідні та частотні характеристики елементів системи.

1.1. Перший елемент

$$\frac{dU_1(t)}{dt} + U_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}.$$

Рівняння в операторній формі: $pU_1(t) + U_1(t) = p\delta(t).$

Передатна функція:

$$W_1(p) = \frac{U_1(p)}{\delta(p)} = \frac{p}{p+1} = \frac{p+1-1}{p+1} = 1 - \frac{1}{p+1}.$$

Вагова характеристика:

$$w_1(t) = L^{-1}\{W_1(p)\} = L^{-1}\{1\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} = \delta(t) - e^{-t}.$$

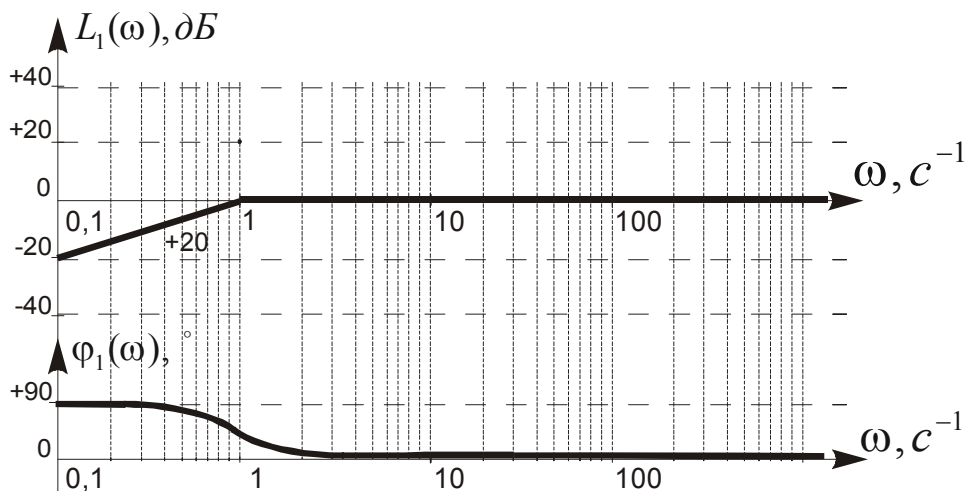
Перехідна характеристика:

$$h_1(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_1(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} = e^{-t}.$$

Частотні характеристики:

$$W_1(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega+1}; \quad N_1(\omega) = \omega \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}; \quad \varphi_1(\omega) = +90^\circ - \arctg\omega;$$

$$L_1(\omega) = 20 \lg N_1(\omega) = 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1+\omega^2}.$$



Графіки логарифмічних частотних характеристик першого елемента

1.2. Другий елемент

$$T \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = kU_1(t).$$

Рівняння в операторній формі: $TpU_2(p) + U_2(p) = kU_1(p).$

Передатна функція:

$$W_2(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{k}{Tp + 1}.$$

Вагова характеристика:

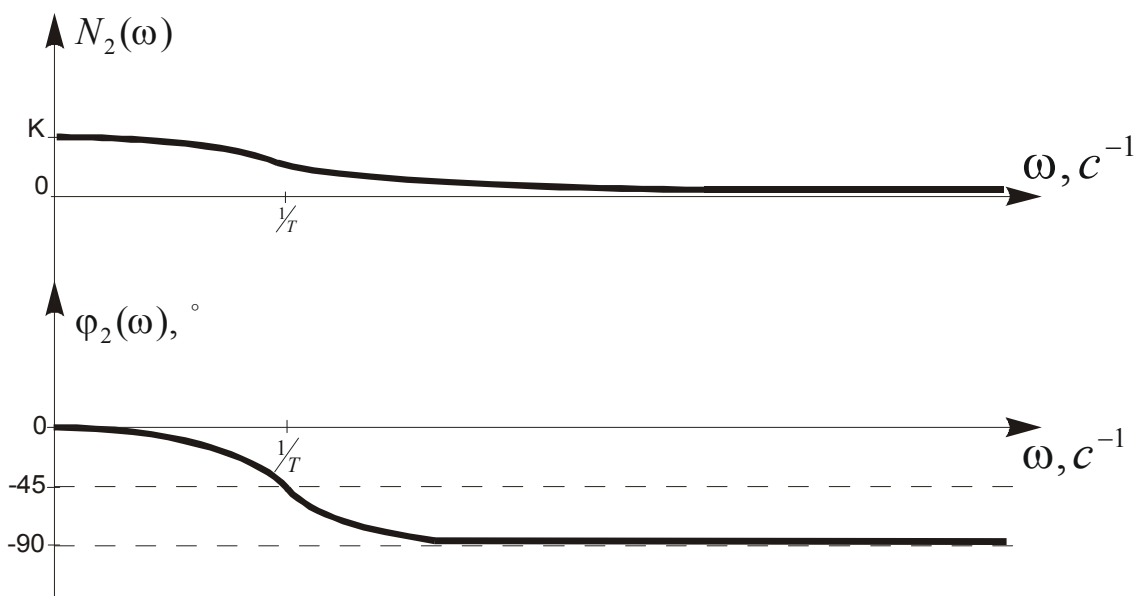
$$w_2(t) = L^{-1}\{W_2(p)\} = \frac{k}{T} L^{-1}\left\{\frac{1}{p + \frac{1}{T}}\right\} = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Перехідна характеристика:

$$h_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_2(p)}{p}\right\} = \frac{k}{T} L^{-1}\left\{\frac{1}{p\left(p + \frac{1}{T}\right)}\right\} = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Частотні характеристики:

$$W_2(j\omega) = \frac{k}{j\omega T + 1}; \quad N_2(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}; \quad \varphi_2(\omega) = -\arctg \omega T.$$



Графіки частотних характеристик другого елементу

1.3. Третій елемент

$$\frac{dy(t)}{dt} = U_2(t).$$

Рівняння в операторній формі: $pY(p) = U_2(p)$.

Передатна функція:

$$W_3(p) = \frac{Y(p)}{U_2(p)} = \frac{1}{p}.$$

Вагова характеристика:

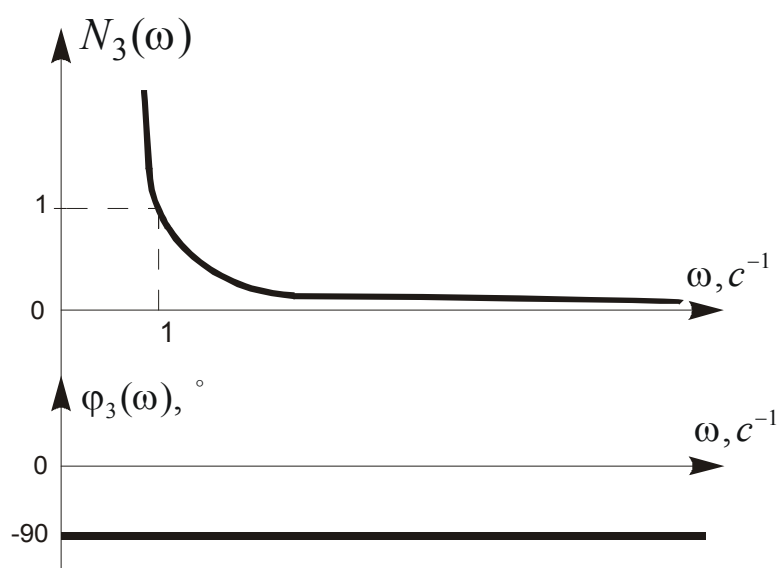
$$w_3(t) = L^{-1}\{W_3(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1[t].$$

Перехідна характеристика:

$$h_3(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_3(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} = t.$$

Частотні характеристики:

$$W_3(j\omega) = \frac{1}{j\omega}; \quad N_3(\omega) = \frac{1}{\omega}; \quad \varphi_3(\omega) = -90^\circ.$$



Графіки частотних елементів третього елементу

2. Визначити передатну функцію замкнутої системи за похибкою та визначити усталену похибку для заданої вхідної дії.

Для розімкненої системи передатна функція визначається як:

$$W_{\text{роз}}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p)W_2(p)W_3(p).$$

Підставимо вирази для $W_i(p)$:

$$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k_{\text{роз}}}{(p+1)(Tp+1)},$$

де $k_{\text{роз}} = k$.

Передатна функція замкненої системи за похибкою:

$$\Phi_{\delta}(p) = \frac{1}{1 + W_{\text{роз}}(p)} = \frac{(p+1)(Tp+1)}{(p+1)(Tp+1) + k_{\text{роз}}}.$$

Усталена похибка системи визначається за виразом:

$$\delta_{\text{уст}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \Phi_{\delta}(p) \cdot X(p),$$

причому, для $x(t) = 0,2$ зображення за Лапласом буде $X(p) = 0,2/p$.

Тоді усталена похибка системи :

$$\delta_{\text{уст}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{(p+1)(Tp+1)}{(p+1)(Tp+1) + k_{\text{роз}}} \cdot \frac{0,2}{p} = \frac{0,2}{1 + k_{\text{роз}}} = \frac{0,2}{1 + 10} = 0,018 \text{ (град.)}.$$

3. Побудувати асимптотичні ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи.

Оцінити стійкість САК.

Передатна функція розімкненої системи:

$$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k_{\text{роз}}}{(p+1)(Tp+1)}.$$

Побудова ЛАЧХ:

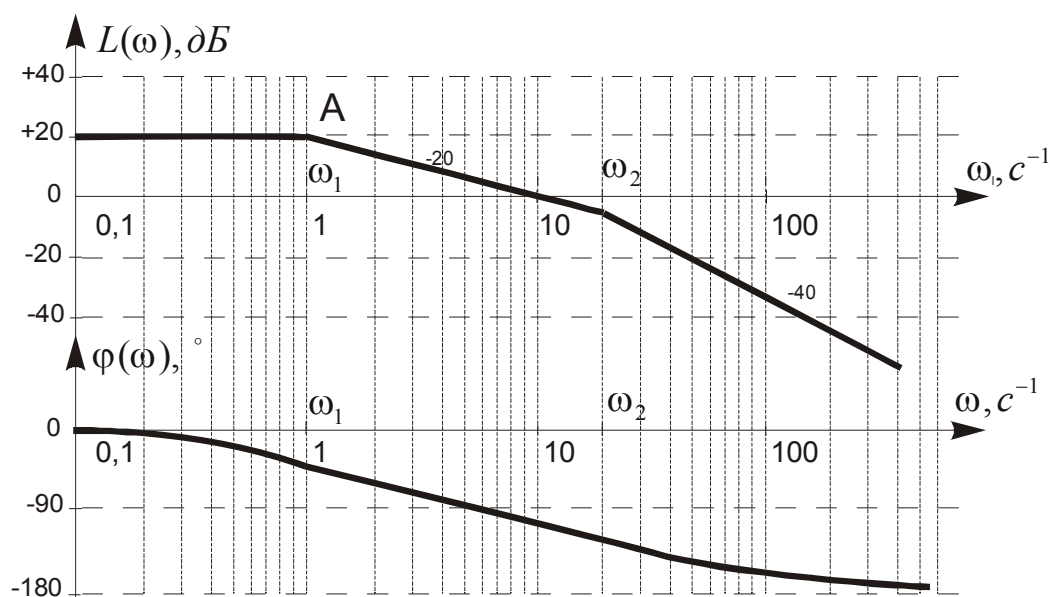
1) ордината точки A : $20 \lg k_{\text{роз}} = 20 \text{дБ}$; початковий нахил: порядок астатизму $\nu = 0$, тому початковий нахил – 0дБ/дек ;

2) частоти спряження:

$$\omega_1 = 1 \text{с}^{-1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{T} = 20 \text{с}^{-1}.$$

Побудова ЛФЧХ:

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega - \arctg \omega T.$$



Графіки логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи

На частоті зрізу системи $\omega_{\text{зр}} = 10 \text{с}^{-1}$ ЛФЧХ не досягає значення (-180°) :

$\varphi_{\text{роз}}(\omega_{\text{зр}}) = -105^\circ$. Це означає, що розглянута система автоматичного керування є стійкою.

Список рекомендованої літератури

1. Зайцев Г. Ф. Теория автоматического управления и регулирования. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища школа, 1989. – 431 с.
2. Попов Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1978. – 256 с.

3. Бондар П. М., Бурау Н. І. Методичні вказівки до контрольних завдань з курсу «Теорія автоматичного керування». – Київ: НТУУ «КПІ», 1997. – 36 с.

4. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування: Підручник. – К.: Либідь, 1997. – 544с.

ЗМІСТ

Передмова.....	3
1. Теоретичні відомості.....	4
1.1. Основні характеристики елементів та систем автоматичного керування	4
1.2. Передатні функції систем автоматичного керування.....	7
1.3. Побудова асимптотичних логарифмічних частотних характеристик розімкненої системи.....	8
1.4. Оцінка точності систем автоматичного керування.....	10
2. Завдання для розрахункових (домашніх контрольних) робіт.....	12
2.1. Аналіз розімкнених ланцюгів (завдання 1).....	12
2.2. Аналіз замкнених систем (завдання 2).....	20
Список рекомендованої літератури	31