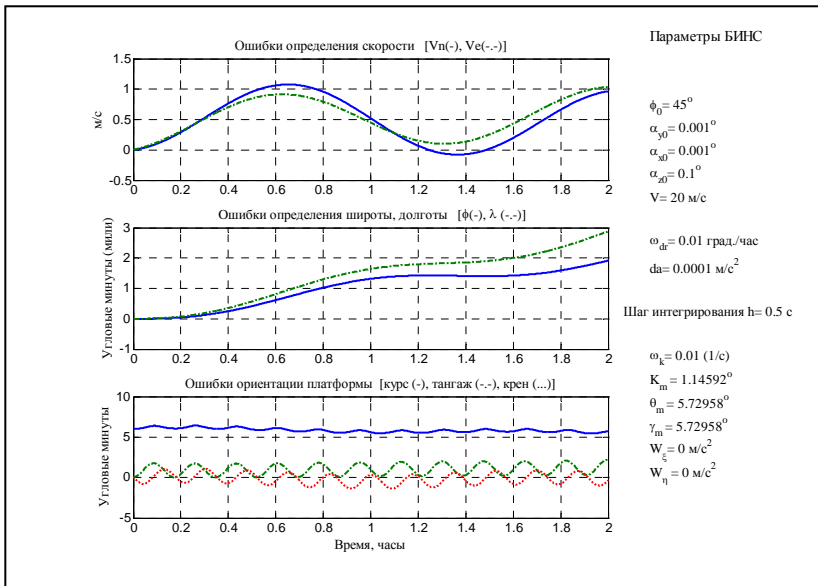


Мелешко В.В., Нестеренко О.И.

БЕСПЛАТФОРМЕННЫЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

Учебное пособие



ББК 34.9
УДК 629.056.6
М-47

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Леонец А.А., доктор технических наук, академик
Международной академии навигации и управления
Панов А.П., доктор технических наук, академик
Международной академии навигации и управления

Ответственный редактор к.т.н., доц. Лазарев Ю.Ф.

Мелешко В.В., Нестеренко О.И.

М-47 Бесплатформенные инерциальные навигационные системы. Учебное пособие. – Кировоград: ПОЛИМЕД - Сервис, 2011. – 171с.

ISBN

Изложены основы теории бесплатформенных инерциальных систем.

Приведены основные сведения для пояснения принципа работы, показаны разновидности уравнений ориентации, различные формы записи скоростей и ускорений в подвижных системах координат. Представлены примеры возможных алгоритмов работы. Рассматривается начальная выставка. Значительное внимание уделено калибровке параметров чувствительных элементов как в производстве, так и в полете. Приведены алгоритмы коррекции от спутниковой навигационной системы и астровизиров. Приведены примеры моделирования.

Для студентов приборостроительных специальностей высших учебных заведений. Может быть полезно инженерам этих специальностей.

Ил. 59, табл. 11

ББК 34.9
УДК 629.056.6
М-47

© Мелешко В.В., Нестеренко О.И.

ISBN

В.В.Мелешко, О.И.Нестеренко

БЕСПЛАТФОРМЕННЫЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
1. Основы инерциальной навигации	7
1.1. Фигура Земли	8
1.2. Системы координат	11
1.3. Гравитационное поле и поле силы тяжести Земли.	15
1.4. Акселерометры. Основное уравнение навигации.	19
1.5. Обобщенная схема ИНС	22
1.6. Принцип работы бесплатформенной ИНС	26
2. Уравнения ориентации	30
2.1. Уравнения ориентации Эйлера	30
2.2. Уравнения ориентации Пуассона	32
2.3. Уравнения с параметрами Родрига-Гамильтона	37
2.4. Уравнения в параметрах вектора ориентации	39
3. Представления скоростей и ускорений	44
4. Алгоритмы БИНС	50
4.1. БИНС в инерциальной системе координат	50
4.2. БИНС в географическом сопровождающем базисе с обобщенными уравнениями Пуассона	54
4.3. БИНС с уравнением в параметрах Родрига-Гамильтона	56
4.4. БИНС с вектором ориентации	58
4.5. Методы и алгоритмы вычислений	61
4.6. Избыточность измерений	66
5. Уравнения идеальной и реальной работы	71
5.1. Уравнения идеальной работы в инерциальной системе координат	71
5.2. Уравнения реальной работы в инерциальной системе координат	73
5.3. Уравнения идеальной работы в географической системе координат	75
5.4. Уравнения реальной работы в географической системе координат	76

6.	Уравнения ошибок	77
7.	Начальная выставка	83
8.	Демпфирование колебаний	90
	8.1. Демпфирование с помощью внутренних связей	90
	8.2. Демпфирование по скорости от внешней системы.	93
9.	Коррекция БИНС	97
	9.1. Разомкнутая схема комплексирования (интегрирования) со спутниковой навигационной системой (СНС)	98
	9.2. Замкнутая схема комплексирования с СНС	107
	9.3. Астрокоррекция в географической системе координат	111
10.	Калибровка БИНС.	120
	10.1. Модели выходных сигналов инерциальных измерителей	120
	10.1.1. Модель выходных сигналов акселерометров	121
	10.1.2. Модель выходных сигналов гироскопов	122
	10.1.3. Упрощение моделей выходных сигналов	124
	10.2. Калибровка измерительного модуля в производстве	126
	10.2.1. Калибровка акселерометров	127
	10.2.2. Калибровка гироскопов	130
	10.2.3. Температурная калибровка	136
	10.3. Использование результатов калибровки	142
	10.4. Калибровка и довыставка на подвижном основании	144
	10.4.1. Алгоритм калибровки и довыставки	146
	10.4.2. Анализ возможностей калибровки и довыставки	151
11.	Моделирование БИНС	158
	Литература	162

Приложения

1.	Сведения из алгебры кватернионов	164
2.	Характеристики БИНС	170

Предисловие

Инерциальные навигационные системы (ИНС) стали основой навигационных комплексов современных подвижных объектов. Это обусловлено тем, что они дают полную информацию о навигационных параметрах движения - углах курса, тангажа (дифферента), крена; ускорении, скорости движения и координатах места объекта. При этом они полностью автономны, т.е. не требуют какой-либо информации извне. Благодаря возможности определять угловое положение объекта с высокой точностью в любом диапазоне углов и с высокой частотой выдачи информации, ИНС к настоящему времени не имеют альтернативы.

Несмотря на активность разработок бесплатформенных инерциальных систем (БИНС), большое количество научной литературы по БИНС, учебная литература по БИНС практически отсутствует или устарела. С целью дополнить учебную литературу по БИНС подготовлено это учебное пособие. Оно может быть использовано как студентами соответствующих специальностей, так и инженерами. Пособие предполагает наличие базовой подготовки.

Авторы стремились осветить все аспекты работы БИНС. В работе рассматриваются как основной режим работы, так и начальная выставка БИНС. Выставка рассматривается как на неподвижном, так и на подвижном основании. Значительное внимание уделяется режимам калибровки параметров и коррекции. В качестве корректирующих систем рассматриваются спутниковая и астронавигационная системы. В пособии освещены наиболее массовые БИНС, использующие датчики угловой скорости. Рассмотрение БИНС с другими измерителями угловой ориентации объекта выходит за рамки пособия. Пособие содержит достаточное количество примеров численной оценки характеристик системы.

Главы 1-9, 11, приложения 1,2 подготовлены Мелешко В.В., гл. 10 подготовлена Нестеренко О.И., п. 2.4 подготовлен совместно. Авторы высказывают большую благодарность рецензентам Леонцу А.А., Панову А.П., а также доц. Лазареву Ю.Ф. за труд по прочтению рукописи. Большинство их замечаний были учтены и способствовали улучшению качества пособия.

Авторы примут все замечания и пожелания, которые постараются учесть при подготовке следующего издания. Их можно направить по адресу: Украина, Киев, 03056, проспект Победы, 37, НТУУ "Киевский политехнический институт", кафедра приборов и систем ориентации и навигации, Мелешко Владиславу Валентиновичу.

Основные сокращения и обозначения

- АЦП – аналого-цифровой преобразователь
БИНС – бесплатформенная инерциальная навигационная система
БЦВМ – бортовая цифровая вычислительная машина
ДУС – датчик угловой скорости
ИИМ – инерциальный измерительный модуль
ИНС – инерциальная навигационная система
МНК – метод наименьших квадратов
ОФК – оптимальный фильтр Калмана
ПК – преобразователь координат
СНС – спутниковая навигационная система
 ψ – угол курса
 \mathcal{G} – угол тангажа
 γ – угол крена
 φ – широта
 λ – долгота
 \vec{r} – радиус-вектор положения объекта
 v – относительная линейная скорость
 V, \dot{r} – абсолютная линейная скорость
 W – абсолютное ускорение
 a – кажущееся ускорение
 g – ускорение силы тяжести
 g' – ускорение силы тяготения (гравитационное)
 ω – угловая скорость
 u – угловая скорость вращения Земли
 R – радиус Земли
 $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости
 Ω – матрица угловой скорости
 $\omega \times$ – матричная форма представления вектора
 XYZ – инерциальная система координат (базис i)
 $\xi\eta\zeta$ (ENH) – географический сопровождающий базис (базис g)
 $\xi_{\Gamma}\eta_{\Gamma}\zeta_{\Gamma}$ – геоцентрическая земная система координат (базис e)
 $x_c y_c z_c$ – связанный с объектом трехгранник (базис b)
 C^{ib} – матрица направляющих косинусов, соответствующая преобразованию от связанного базиса b к инерциальному i
 Ω_b^{ib} – матрица угловой скорости вращения от связанного базиса b к инерциальному i в проекциях на оси связанного базиса b
 Λ^{ib} – кватернион поворота от связанного базиса к инерциальному

1. Основы инерциальной навигации

Идея создания инерциальных навигационных систем (ИНС) возникла в начале 20-го века. Базовым чувствительным элементом такой системы стал акселерометр – прибор для измерения ускорения движения объекта. Поскольку акселерометр, а также и используемые в ИНС гироскопы являются инерциальными чувствительными элементами (основаны на использовании инерции массы), системы называют инерциальными.

Метод навигации, используемый в системе – метод счисления пути. Суть его в том, что в заданной системе координат измеряют проекции абсолютного ускорения, интегрируя их дважды, получают скорость и текущие координаты. Поскольку измерение должно проводиться в заданной системе координат, необходимы гироскопические устройства, обеспечивающие моделирование (физическое или математическое) этой системы. Только к 40-м годам прошлого века уровень гироскопов и акселерометров поднялся до такого, который позволил приступить к реальной разработке ИНС.

Если схема построения системы для измерения координат в инерциальном пространстве (относительно звезд) сравнительно проста, то решение задачи определения параметров движения относительно вращающейся Земли было сложнее. Для решения такой задачи плодотворным стало использование маятника Шулера. Хотя такой маятник является математической абстракцией, в ИНС удалось построить его электромеханический аналог, который обеспечил невозмущаемость системы ускорениями движения относительно Земли и значительно снизил рост ошибок.

С 60-х годов прошлого века началась активная разработка бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС). Привлекательность таких систем в том, что в них не требуется гиростабилизированная платформа (ГСП) – наиболее сложный, следовательно, дорогостоящий узел ИНС. В БИНС акселерометры и гироскопы устанавливают непосредственно на борту объекта, а электромеханическую модель системы (ГСП) координат заменяют математической моделью. Однако эти преимущества не удавалось сразу реализовать в связи с жесткими условиями работы чувствительных элементов (ЧЭ) непосредственно на борту при высоких требованиях к их характеристикам. При этом также предъявлялись высокие требования к вычислительным устройствам. Наконец, к 80 годам было освоено серийное производство БИНС.

1.1. Фигура Земли

Наиболее простая модель фигуры (формы) Земли – **сфера** радиусом $R=6371,3$ км. Объем именно такой сферы наиболее близок к объему реальной Земли. Для такой модели введены геоцентрические координаты: геоцентрическая широта φ' - угол между плоскостью экватора и геоцентрической вертикалью места, изменяется в пределах $\pm 90^\circ$, положительные значения соответствуют северной широте, отрицательные - южной; долгота λ - угол между нулевым (гринвичским) меридианом и меридианом места, изменяется в пределах от $0^\circ \dots 360^\circ$ или $\pm 180^\circ$, положительные значения соответствуют восточной долготе, отрицательные - западной.

Длина окружности сферической Земли равна примерно 40000 км. Длине дуги в 1 градус соответствует 111 км. Дуга в одну угловую минуту ($1'$) равна 1853,3 метра и получила название морская миля. Более

точно, перемещение на одну морскую милю вдоль меридиана примерно соответствует изменению на одну минуту широты. Международная морская миля равна 1852 метрам. Международный кабельтов равен 0,1 морской мили и соответствует 185,2 м.

Такое представление нашей планеты подходит для задач, точность вычислений в которых не превышает 0,5%.

Более точно фигура Земли описывается **двухосным эллипсоидом**, сплюснутым у полюсов. Меридиональное сечение эллипсоида показано на рис.1.1. Здесь a – большая полуось эллипсоида, b – малая полуось. Основные характеристики эллипсоида

$$\alpha = \frac{a-b}{a} \text{ - сжатие, } e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \text{ - эксцентриситет, } e^2 \approx 2\alpha = 6,72e^{-3}.$$

Важными характеристиками эллипсоида являются радиусы кривизны его поверхности:

радиус кривизны в плоскости, перпендикулярной плоскости меридиана

$$R_1 \equiv R_E = \frac{a+h}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (1.1)$$

и радиус кривизны в плоскости меридиана

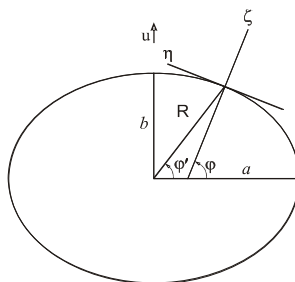


Рис.1.1. Сечение эллипсоида

$$R_2 \equiv R_N = \frac{R_E(1-e^2)}{1-e^2 \sin^2 \varphi} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (1.2)$$

Индексы E и N означают восточную и северную составляющие соответственно. В этих выражениях φ - географическая (геодезическая) широта, равная углу между плоскостью экватора и нормалью к поверхности эллипсоида. Между геоцентрической и географической широтой существует соотношение

$$\varphi - \varphi' = \alpha \sin 2\varphi', \quad \alpha \approx 11,5 \text{ угл.мин.}$$

Радиусы кривизны могут быть записаны приближенно, используя разложение в ряд в виде $\frac{1}{1 \pm x^n} \approx 1 \mp nx + \dots$

$$R_1 \equiv R_E = a \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \dots \right), \quad R_2 \equiv R_N = a(1-e^2) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \dots \right).$$

Радиус параллели $\rho = R_1 \cos \varphi$.

В разных странах существуют различные модели эллипсоидов. Например, сжатие их находится в пределах $\alpha = 1/295 \dots 1/299$. Для того, чтобы наилучшим образом приблизить к эллипсоиду реальную поверхность Земли на ограниченной территории, введены референц-эллипсоиды.

Референц-эллипсоид (от лат. referens – сообщающий, вспомогательный) – земной эллипсоид с определёнными размерами и положением в теле Земли, служащий вспомогательной математической поверхностью, к которой приводят результаты всех геодезических измерений на земной поверхности. Референц-эллипсоид наилучшим образом согласуется с поверхностью фигуры, наиболее точно соответствующей форме Земли - **геоидом** на ограниченной части его поверхности.

Требования к референц-эллипсоиду:

- 1) Ось вращения должна быть параллельна оси вращения Земли
- 2) Плоскость экватора должна быть параллельна плоскости земного экватора
- 3) Сумма квадратов отступлений геоида от общеземного эллипсоида должна быть наименьшей из всех возможных для данной территории.

На территории Советского Союза использовали референц-эллипсоид Красовского (1964 г.) с параметрами $a=6378245$ м , $b=6356863$ м, $\alpha=1/298,3$, $e^2 \approx 2\alpha = 6,72e^{-3}$.

В США и Канаде используют эллипсоид Кларка, в Италии – Хейфорда, в Норвегии – Бесселя. С расширением использования глобаль-

ных навигационных систем (например, спутниковых) широко используют **общеземной эллипсоид (ОЗЭ)**.

Общеземной эллипсоид – наилучшим образом согласующийся с поверхностью геоида в целом.

Требования к общеземному эллипсоиду:

- 1) Центр эллипсоида должен совпадать с центром масс Земли
- 2) Плоскость экватора и малая ось его должны совпадать соответственно с плоскостью экватора и осью вращения Земли
- 3) Объем его должен быть равен объему геоида
- 4) Сумма квадратов отступлений геоида от общеземного эллипсоида должна быть по всей Земле наименьшей из всех возможных:
- 5) Сумма квадратов уклонений отвесных линий (см. п.1.3) должна быть по всей Земле наименьшей из всех возможных.

В США принят общеземной эллипсоид системы World Geodetic System (**WGS-84**) с параметрами $a=6378136,991$ м $b=6356752,3$ м $\alpha=1/298,257$.

В России действует государственная система координат «Параметры Земли 1990 года» (**ПЗ-90**). За отсчетную поверхность в государственной геоцентрической системе координат (ПЗ-90) принят общий земной эллипсоид со следующими геометрическими параметрами:

- большая полуось 6378 136 м;
- сжатие 1:298,257839;
- центр этого эллипсоида совмещен с началом геоцентрической системы координат; плоскость начального (нулевого) меридиана совпадает с плоскостью ZX этой системы.

Масса Земли M , включая массу ее атмосферы, умноженная на постоянную тяготения G , составляет **геоцентрическую гравитационную постоянную** $GM = 398600,44$ км³/с², гравитационное ускорение на экваторе Земли - 978 032,84 мгал (1 Гал=1 см/с², 1 миллиГал=10⁻³ см/с²). Поправка к гравитационному ускорению на уровне моря, обусловленная влиянием атмосферы Земли - 0,87 мГал.

Основные параметры общеземных эллипсоидов сведены в таблицу 1.1.

Геоид - фигура, соответствующая эквипотенциальной поверхности силы тяжести (соответствует уровню океана). По определению эквипотенциальной поверхности, поверхность геоида везде перпендикулярна отвесной линии. Форма геоида отличается от фигуры (формы) Земли. Эти отклонения внесены в карту. На ней приведены изолинии равных отклонений уровня геоида от уровня эллипсоида. Отрицательное отклонение достигает величины - 105 метров и находится на севе-

ре Индийского океана, а положительное отклонение достигает 85 метров и находится на западе Тихого океана.

Таблица 1.1. Параметры общеземных эллипсоидов систем WGS – 84 и ПЗ-90

Параметры	Обозначения	WGS – 84	ПЗ-90
Большая полуось эллипсоида	a	6378137 м	6378136 м
Сжатие	α	1/298,257223	1/298,2578
Угловая скорость вращения Земли	ω	$7,292115 \cdot 10^{-5}$ рад/с	$7,292115 \cdot 10^{-5}$ рад/с
Геоцентрическая гравитационная постоянная с учетом массы атмосферы Земли	GM	398600,5 км ³ /с ²	398600,44 км ³ /с ²

1.2. Системы координат

Определения координат объектов, их навигация могут проводиться в различных системах координат.

Инерциальная геоцентрическая система координат OXYZ имеет ось OX, направленную по линии равноденствия в точку весеннего равноденствия [1], ось OZ направлена по оси вращения Земли, ось OY образует с осями OX и OZ правый координатный трехгранник. В иностранной литературе эту систему координат иногда обозначают **ЕСИ** (*Earth-centered inertial*), кратко обозначают буквой ***i***. (Иногда в качестве инерциальной принимают стартовую систему координат, положение которой известно относительно системы ***i***)

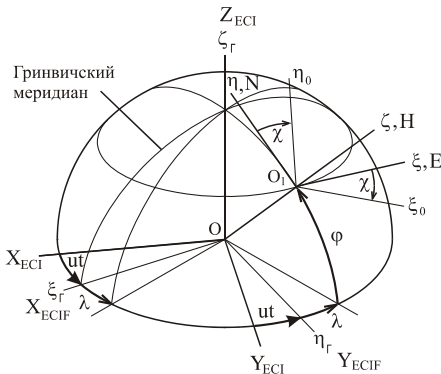


Рис.1.2. Системы координат

Относительно этой системы координат вместе с Землей вращается геоцентрическая земная система координат $O \xi_{\Gamma} \eta_{\Gamma} \zeta_{\Gamma}$. Ее обозначают **ЕСИФ** (*Earth-centered earth-fixed*), кратко обозначают ***e***. Угол поворота ее соответствует величине ut , где \mathbf{u} - угловая скорость вращения Земли, t – время. Ось $O\eta_{\Gamma}$ находится в плоскости гринвичского меридиана.

Сопровождающая система координат (сопровождающий трехгранник) имеет начало в точке на поверхности Земли, положение ко-

торой задано широтой φ и долготой λ . Если широта задана как угол между плоскостью экватора и геоцентрическим радиусом (вертикалью), она называется геоцентрической и обозначается φ' . Оси сопровождающего географического трехгранника $O_1\xi\eta\zeta$ (или O_1ENH) направлены так: ось $O_1\xi$ по касательной к параллели на восток, ось $O_1\eta$ направлена на Север, ось $O_1\zeta$ направлена по вертикали. Иногда этот трехгранник обозначают буквой **g**. Относительно нее повернута на угол χ в плоскости горизонта свободная в азимуте система координат. Если угол χ является путевым углом ортодромии, то $O_1\xi_0\eta_0\zeta$ - ортодромическая система координат. Связанную с объектом систему координат (на рис. не показана) будем обозначать $O_1x_c y_c z_c$, O_1y_c - продольная ось объекта, O_1x_c - поперечная ось объекта (на правый борт), O_1z_c - нормальная ось объекта (вверх). Такую систему координат иногда обозначают буквой **b** (от слова *body*).

Сопровождающие трехгранники

Сопровождающий трехгранник вращается в инерциальном пространстве с угловой скоростью, проекции которой можно выразить соответствующими соотношениями.

Географический сопровождающий трехгранник

Проекции угловой скорости вращения трехгранника (системы координат, базиса) относительно инерциального пространства (абсолютной угловой скорости) можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= -v_N / (R_2 + h); & h &= h_0 + v_\zeta t; \\ \omega_\eta &= v_E / (R_1 + h) + u \cos \varphi; & & \\ \omega_\zeta &= (v_E / (R_1 + h)) t g \varphi + u \sin \varphi; & \omega_\zeta &= \omega_\eta t g \varphi. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Кроме ранее введенных обозначений, здесь $v_N = v \cos \chi$ - северная составляющая вектора относительной скорости движения объекта, $v_E = v \sin \chi$ - восточная составляющая, χ - путевой угол, h - высота объекта, h_0 - ее начальное значение, v_ζ - вертикальная составляющая скорости, t - время. Иногда вектор угловой скорости представляют в виде суммы

$$\vec{\omega} = \vec{u} + \vec{\omega}^o,$$

где \vec{u} - вектор угловой скорости вращения Земли, а $\vec{\omega}^o$ - вектор угло-

вой скорости из-за перемещения объекта относительно Земли (относительная угловая скорость). Эти векторы можно записать в проекциях на оси сопровождающего базиса как

$$\vec{u} = [0, u_\eta, u_\xi]^T; \quad \vec{\omega}_\xi^o = [\omega_\xi^o, \omega_\eta^o, \omega_\zeta^o]^T. \quad (1.4)$$

Здесь $u_\eta = u \cos \varphi$, $u_\zeta = u \sin \varphi$;

$$\omega_\xi^o = -v_N / (R_2 + h), \quad \omega_\eta^o = v_E / (R_1 + h), \quad \omega_\zeta^o = v_E \operatorname{tg} \varphi / (R_1 + h).$$

Абсолютная линейная скорость равна сумме относительной линейной скорости и линейной скорости из-за вращения Земли. Проекции абсолютной линейной скорости представляют в следующем виде

$$V_N = V \cos \chi, \quad V_E = V \sin \chi, \quad V_N = v_N, \quad V_E = v_E + (R_1 + h)u \cos \varphi.$$

Отсюда следует форма записи проекций абсолютной угловой скорости географического сопровождающего трехгранника

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= -V_N / (R_2 + h); \\ \omega_\eta &= V_E / (R_1 + h); \\ \omega_\zeta &= V_E \operatorname{tg} \varphi / (R_1 + h); \end{aligned}$$

Если использовать выражение скорости изменения долготы

$$\dot{\lambda} = v_E / ((R_1 + h) \cos \varphi),$$

то (1.3) можно переписать в другом виде:

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= -V_N / (R_2 + h); \\ \omega_\eta &= (u + \dot{\lambda}) \cos \varphi; \\ \omega_\zeta &= (u + \dot{\lambda}) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ортодромический сопровождающий трехгранник

Выражения для проекций абсолютной угловой скорости ортодромического трехгранника можно получить перепроектированием проекций угловой скорости географического трехгранника [2]

$$\omega_{\xi o} = -u \cos \varphi \sin \chi - v / (R + h); \quad R - \text{радиус сферической Земли}$$

$$\omega_{\eta o} = u \cos \varphi \cos \chi;$$

$$\omega_{\zeta o} = u \sin \varphi;$$

Если есть боковое движение со скоростью $v_{\xi o}$:

$$\omega_{\xi_0} = -u \cos \varphi \sin \chi - v_{\eta_0} / R ;$$

$$\omega_{\eta_0} = u \cos \varphi \cos \chi + v_{\xi_0} / R ;$$

$$\omega_{\zeta_0} = u \sin \varphi - \frac{v_{\xi_0}}{R} \operatorname{tg} \Phi ,$$

где Φ – ортодромическая широта¹ [1].

Существуют другие варианты описания движения ортодромического сопровождающего трехгранника, в том числе с учетом эллиптичности Земли [1].

Матрица направляющих косинусов между осями гринвичской системы координат $0\varepsilon_{\Gamma}\eta_{\Gamma}\zeta_{\Gamma}$ и осями полусвободной (ортодромической) в азимуте системы координат $0\varepsilon_0\eta_0\zeta_0$ (рис.1.4) имеет вид:

Таблица 1.2. Направляющие косинусы между осями гринвичского и ортодромического трехгранников

$C^{g\varepsilon}$	ξ_{Γ}	η_{Γ}	ζ_{Γ}
ξ_0	$c_{11} = -\sin \varphi \cos \lambda \sin \varepsilon - \sin \lambda \cos \varepsilon;$	$c_{12} = -\sin \varphi \sin \lambda \sin \varepsilon + \cos \lambda \cos \varepsilon;$	$c_{13} = \cos \varphi \sin \varepsilon;$
η_0	$c_{21} = -\sin \varphi \cos \lambda \cos \varepsilon + \sin \lambda \sin \varepsilon;$	$c_{22} = -\sin \varphi \sin \lambda \cos \varepsilon - \cos \lambda \sin \varepsilon;$	$c_{23} = \cos \varphi \cos \varepsilon;$
ζ_0	$c_{31} = \cos \lambda \cos \varphi;$	$c_{32} = \sin \lambda \cos \varphi;$	$c_{33} = \sin \varphi.$

Матрица обозначена как $C^{g\varepsilon}$, где вторая буква индекса обозначает исходный трехгранник, а первая буква индекса – конечный трехгранник.

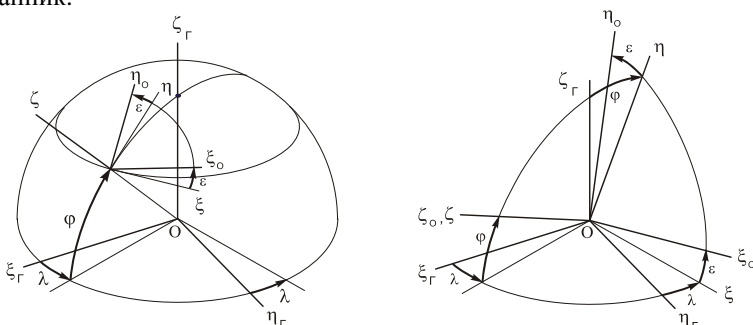


Рис.1.3. Гринвичский и ортодромический трехгранники

¹ В ортодромической системе координат ортодромия является экватором, полюс системы координат соответствует точке пересечения земной сферы с перпендикуляром к плоскости ортодромии, проведенном из центра Земли.

Трехгранник $O\xi_0\eta_0\zeta$ движется с относительной угловой скоростью

$\vec{\omega}^o$, связанной с путевой скоростью v соотношением $\vec{v} = \vec{\omega}^o \times \vec{R}$, где \vec{R} - радиус кривизны земного эллипсоида в плоскости траектории.

Проекции вектора $\vec{\omega}^o$ на оси трехгранника $O\xi_0\eta_0\zeta$ представим в виде:

$$\omega^o_{\xi_0} = -\frac{v\eta_0}{R_{\eta_0}} - \frac{v\xi_0}{a} e^2 c_{13} c_{23} \quad , \quad \omega^o_{\eta_0} = \frac{v\xi_0}{R_{\xi_0}} - \frac{v\eta_0}{a} e^2 c_{13} c_{23} .$$

Здесь R_{η_0} и R_{ξ_0} - радиусы кривизны нормальных сечений эллипсоида в плоскостях $O\eta_0\zeta$ и $O\xi_0\zeta$ соответственно, e^2 - квадрат эксцентриситета земного эллипсоида.

Величины, обратные радиусам кривизны, вычисляются по соотношениям:

$$\frac{1}{R_{\xi_0}} = \left(1 - \frac{1}{2} e^2 c_{33}^2 + \frac{1}{2} e^2 c_{13}^2 - \frac{h}{a} \right) / a ;$$

$$\frac{1}{R_{\eta_0}} = \left(1 - \frac{1}{2} e^2 c_{33}^2 + \frac{1}{2} e^2 c_{23}^2 - \frac{h}{a} \right) / a ,$$

где h - высота, a - большая полуось земного эллипсоида.

1.3. Гравитационное поле и поле силы тяжести Земли

В соответствии с законом всемирного тяготения все тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} , \tag{1.5}$$

где F — сила притяжения; M и m — массы двух взаимно притягивающихся тел (гравитирующие массы); r — расстояние между ними; G — коэффициент пропорциональности, называемый гравитационной постоянной и являющийся фундаментальной константой физики. С другой стороны, сила притяжения, действующая на материальную точку массы m , определяется формулой

$$\vec{F} = m\vec{g}' , \tag{1.6}$$

где \vec{g}' — гравитационное ускорение, или ускорение силы тяготения.

Сила притяжения \vec{F} и гравитационное ускорение имеют одинаковое направление. Сопоставляя формулы (1.5) и (1.6), находим

$$g' = G \frac{M}{r^2}. \quad (1.7)$$

Величина гравитационной постоянной $G = 6,6742 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{с}^2 \text{ кг})$. Как показано в табл.1.1., для эллипсоида ПЗ-90 произведение $GM \equiv K = 398600,44 \text{ км}^3/\text{с}^2$.

Приведенное выражение представляет простейшую модель гравитационного поля. Реальное поле имеет более сложный характер. Оно может быть представлено составляющими вектора \vec{g}' в плоскости меридиана.

Радиальная составляющая, направленная к центру Земли [1]

$$g'_r = -\frac{K}{r^2} \left[1 + \frac{3\mu}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi') \right]. \quad (1.8)$$

Здесь общий знак минус говорит о том, что составляющая направлена против направления радиуса из центра Земли, $\mu = 1,09 \cdot 10^{-3}$ - коэффициент, характеризующий распределение масс Земли, a - большая полуось эллипсоида, r - геоцентрический радиус, φ' - геоцентрическая широта.

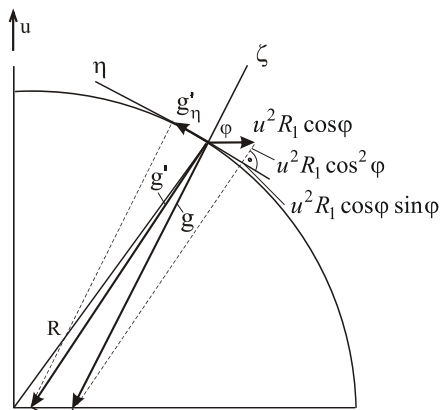


Рис.1.4. Проекции ускорений

Трансверсальная составляющая, направленная в плоскости горизонта к плоскости экватора (противоположно отсчету широты)

$$g'_\varphi = -\frac{K}{r^2} \cdot \frac{3\mu}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin 2\varphi'. \quad (1.9)$$

Сила тяжести есть равнодействующая силы тяготения и центробежной силы (силы инерции центростремительного ускорения из-за вращения Земли $\vec{W}_{\text{цс}} = \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{R})$).

Ускорение силы тяжести в общем случае соответствует выражению

$$\vec{g} = \vec{g}' - \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{R}). \quad (1.10)$$

Величина центростремительного ускорения $W_{\text{цс}} = u^2 R_E \cos \varphi$.

В [1] получены составляющие ускорения силы тяжести в следующем виде

$$g_r = -g_{\varphi 0} \frac{a^2}{(a+h)^2} (1 + \beta \sin^2 \varphi'),$$

$$g_{\varphi} = -g_{\varphi 0} \alpha \frac{a^2}{(a+h)^2} \sin 2\varphi'.$$
(1.11)

Здесь $g_{\varphi 0}$ - ускорение силы тяжести на экваторе, α - сжатие эллипсоида. Величины β и $g_{\varphi 0}$ имеют следующие значения

$$\beta = 0,005317, \quad g_{\varphi 0} = 978,049 \text{ см/с}^2.$$

Отношение величин

$$\frac{g_{\varphi}}{g_r} \approx \alpha \sin 2\varphi' \quad (1.12)$$

соответствует тангенсу угла между вектором \bar{g} ускорения силы тяжести и геоцентрическим радиусом вектором точки местоположения. В силу малости величины тангенса, можно принять, что он равен углу. Как видно из формулы, максимальный угол на широте 45° имеет величину 0,003356, что соответствует величине около 11,5 угловых минут.

Абсолютную величину ускорения силы тяжести $g = \sqrt{g_r^2 + g_{\varphi}^2}$ в силу малости (1.11) можно принять равной абсолютной величине g_r . Для расчетов величины ускорения силы тяжести иногда применяют формулу Гельмерта (1909 г.):

$$g = 9,78030(1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi),$$

где используют географическую широту φ .

Формула Кассиниса (1930 г.), называемая международной, имеет вид:

$$g = 9,78049 (1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi). \quad (1.13)$$

Для свободной в азимуте системы координат $\xi_0 \eta_0 \zeta$ трансверсальная составляющая гравитационного ускорения может быть представлена формулами

$$g'_{\xi\varphi} = \frac{-u^2 R_E \sin 2\varphi \sin \chi}{2}, \quad g'_{\eta\varphi} = \frac{u^2 R_E \sin 2\varphi \cos \chi}{2}. \quad (1.14)$$

Появление этих проекций можно увидеть из рис.1.4 (проекция g'_{η}).

На рис.1.5 представлены графики изменения ускорений, рассчитанные по формулам (1.9), (1.11).

С изменением высоты ускорение изменяется в соответствии с зависимостью

$$g(h) = \frac{g'_z}{(1+h/R)^2}.$$

Приращения ускорения силы тяжести можно рассчитать по формуле

$$\Delta g = -\frac{2g}{R} \Delta h.$$

Если Δg измеряется в мГал, а Δh в метрах, то $\Delta g = -0,3086\Delta h$. При увеличении высоты на 100 м сила тяжести уменьшится на 30,9 мГал. Для объектов, находящихся под водой, действует следующий закон изменения ускорения силы тяжести [11]

$$\delta g = 0,3086\Delta h - 0,0838\sigma \cdot \Delta h,$$

где $\sigma = 1,03 \text{ г/см}^3$ – плотность морской воды. С учетом приведенной плотности

$$\delta g = +0,225\Delta h.$$

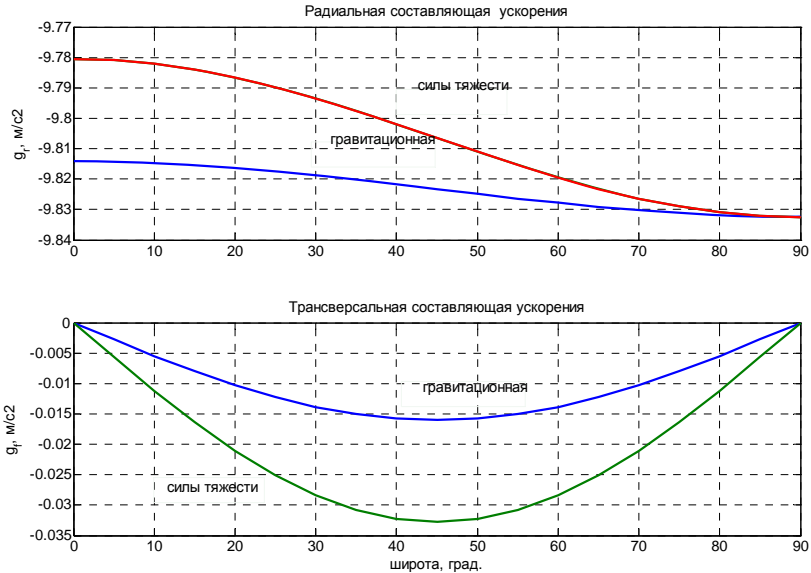


Рис.1.5. Графики проекций ускорений

При углублении в воду на 100 м сила тяжести увеличится на 22,5 мГал.

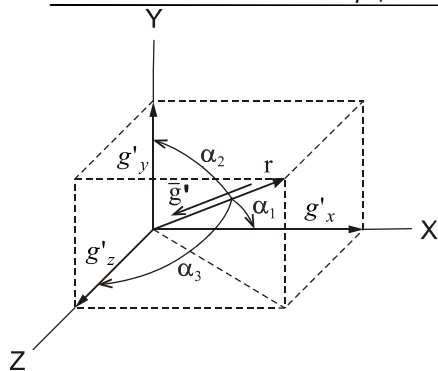


Рис.1.6. Проекция гравитационного ускорения

Иногда необходимо знать проекции гравитационного ускорения на оси инерциальной системы координат. Для этого сначала необходимо рассчитать модуль ускорения g' в точке с заданными инерциальными координатами X, Y, Z , а затем получить необходимые проекции в соответствии с рис. 1.6.

$$\bar{g} = -\frac{fM}{r^2} \bar{r}_0 = -\frac{fM}{r^3} \bar{r};$$

$$g'_x = -g' \cos \alpha_1 = -g' \frac{X}{r}; \quad g'_y = -g' \cos \alpha_2 = -g' \frac{Y}{r}; \quad g'_z = -g' \cos \alpha_3 = -g' \frac{Z}{r}; \quad (1.15)$$

Существуют более точные выражения (п. 4.1).

Аномалии гравитационного поля

Гравитационное поле Земли, следовательно, и поле силы тяжести, весьма неоднородно. Реальные значения составляющих поля отличаются от расчетного «нормального» поля. Отклонения величины ускорения могут достигать 0,05% и составить величину до 160 мГал. Направления вектора ускорения также могут меняться. Уклонение (отклонение) отвесной линии может достигать 40" (угловых секунд). На территории СНГ максимальные уклонения достигают 4". Картины изменения составляющих гравитационного поля представляют на соответствующих картах.

1.4. Акселерометры. Основное уравнение инерциальной навигации

Инерциальные навигационные системы в качестве измерителей используют инерциальные чувствительные элементы: акселерометры и гироскопы.

Акселерометры предназначены для измерения ускорения движения объекта, на котором они установлены. Рассмотрим принцип его работы.

В корпусе прибора (рис.1.7), установленного на подвижном объ-

екте, расположена инертная масса 1, движение которой ограничено пружиной 2. При действии ускорения движения объекта W , инертная масса вследствие инерции перемещается вдоль оси чувствительности x до тех пор, пока сила инерции не уравновесится силой упругости пружины. Но кроме силы инерции от действия ускорения W , на инертную массу действует также сила тяготения с гравитационным ускорением g' . Для уменьшения времени переходного процесса исполь-

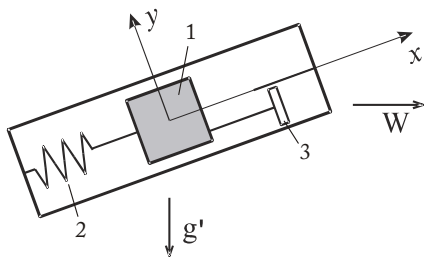


Рис.1.7. Осевой акселерометр

зуют демпфер 3. Выходной сигнал акселерометра (обычно электрический) соответствует перемещению инертной массы относительно корпуса акселерометра по оси x .

Составим уравнение движения инертной массы в корпусе, с которым связана система xy (связанная с объектом). Используем для этого **метод кинестатики**. В соответствии с принципом д'Аламбера, сумма активных сил, сил инерции и сил реакции связей равна нулю [3]:

$$\vec{F}_a + \vec{F}_R + \vec{F}_u = 0.$$

Поскольку инертная масса имеет лишь одну степень свободы относительно оси x , составим уравнение равенства проекций сил на эту ось:

$$F_{ax} = mg'_x - \text{силы тяготения,}$$

$$F_{Rx} = -cx - f\dot{x} - \text{реакций связей (пружины и демпфера),}$$

$$F_{ux} = -m(W_x + \ddot{x}) - \text{силы инерции.}$$

В этих выражениях m – масса, c – линейная жесткость пружины, f – линейный коэффициент демпфирования, \ddot{x} – относительное ускорение инертной массы (относительно корпуса).

В результате

$$\begin{aligned} -m(W_x + \ddot{x}) - cx - f\dot{x} + mg'_x &= 0, \\ m\ddot{x} + f\dot{x} + cx &= -m(W_x - g'_x) = -ma_x. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь $a_x = W_x - g'_x$ – называют кажущимся ускорением.

В общем случае [1]

$$\boxed{\vec{a} = \vec{W} - \vec{g}'}$$

- основное уравнение акселерометра
 - основное уравнение инерциальной навигации (1.17)

Основное уравнение подчеркивает важнейшую особенность акселерометра – инертная масса всегда находится под действием как силы инерции, так и силы тяготения.

Поскольку эту особенность обязательно необходимо учитывать при проектировании алгоритма работы ИНС, уравнение называют также основным уравнением инерциальной навигации.

Рассмотрим характерные примеры сигнала акселерометра.

Примеры:

Уравнение статики акселерометра можно записать из (1.16) в виде

$$x = -\frac{m}{c} a_x .$$

1. На рис. 1.8а акселерометр движется с ускорением W так, что ось чувствительности его горизонтальна. В этом случае

$$W_x = W, \quad g'_x = 0, \quad x = -\frac{m}{c} W \quad \text{т.к.} \quad a_x = W - 0 .$$

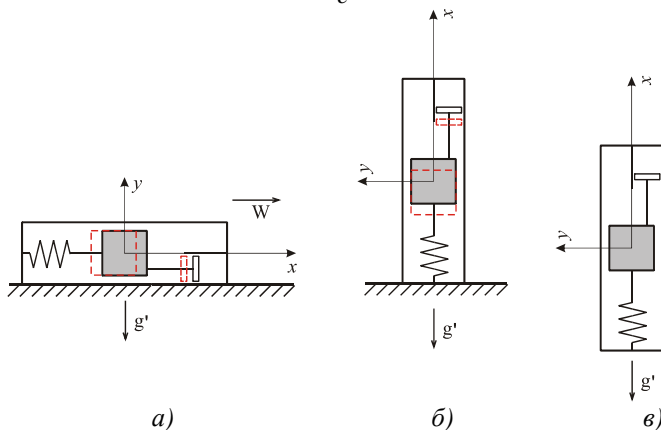


Рис.1.8. Поведение акселерометра

2. На рис. 1.8б акселерометр стоит на столе так, что ось чувствительности его вертикальна. Ускорение движения отсутствует. В этом случае

$$W_x = 0, \quad g'_x = -g', \quad x = -\frac{m}{c} g' \quad \text{т.к.} \quad a_x = 0 - g' .$$

3. На рис. 1.8в акселерометр свободно падает так, что ось чувствительности его вертикальна. В этом случае

$$x = 0 \quad \text{т.к.} \quad a_x = -g' + g', \quad W_x = -g', \quad g'_x = -g';$$

Эти примеры показывают, что для определения величины ускорения движения объекта необходимо в выходном сигнале акселерометра учитывать проекцию гравитационного ускорения.

Существует множество вариантов конструкций конструкций акселерометров. В настоящее время в ИНС применяют, в основном, маятниковые акселерометры компенсационного типа. Проектирование акселерометров - отдельное направление в навигационном приборостроении и в настоящем учебном пособии не рассматривается. Приведем только таблицу характеристик 1.3.

1.5. Обобщенная схема ИНС

В основе построения инерциальных навигационных систем (ИНС) лежит метод счисления пути. Суть его состоит в том, что сигналы измерителей скорости или ускорения, оси чувствительности которых удерживаются в заданной системе координат, интегрируются. Интегралы скорости соответствуют приращениям пути, интегралы ускорений соответствуют приращениям скорости. Складывая значения приращений с начальными значениями пути или скорости, получают текущие значения пройденного пути и скорости. В системах, где первичными измерителями являются акселерометры, для получения скорости сигнал акселерометра интегрируют один раз, а для получения пройденного пути этот интеграл (скорость) интегрируют второй раз. Зная направления проекций пройденного пути на оси системы координат, определяют координаты подвижного объекта.

Устройство ИНС, реализующей метод счисления пути, можно проиллюстрировать обобщенной схемой, приведенной на рис.1.9.

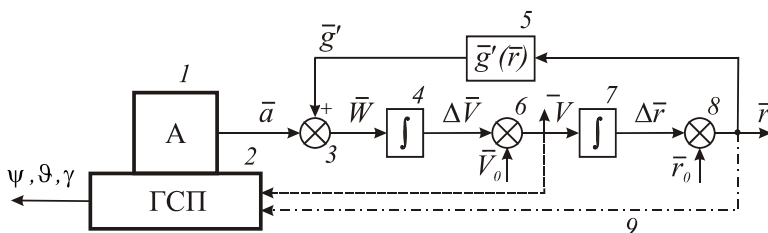


Рис.1.9. Обобщенная схема платформенной ИНС

На рис.1.9. показаны:

1 - ГСП – гиросtabilизированная платформа, удерживающая оси чувствительности акселерометров в заданной системе координат; 2 - А – блок акселерометров (трехосный акселерометр); 3,6,8 – сумматоры; 4,7 – интеграторы; 5 – вычислитель вектора гравитационного ускорения; 9 - обратные связи;

введены следующие обозначения:

\vec{a}, \vec{g}' - векторы кажущегося и гравитационного ускорений соответственно; \vec{W}, \vec{V} - векторы абсолютного ускорения и абсолютной скорости соответственно; $\Delta\vec{V}, \Delta\vec{r}$ - приращения абсолютной скорости и радиуса-вектора местоположения объекта; \vec{r} - радиус-вектор местоположения объекта; $\Delta\vec{V}_0, \Delta\vec{r}_0$ - начальные значения векторов; ψ, ϑ, γ - углы ориентации объекта (возможно, курс, тангаж, крен). Если в системе имеются обратные связи 9 по скорости или по координатам, систему называют замкнутой, если обратных связей нет – система разомкнутая.

В БИНС вместо гиросtabilизированной платформы используют блок гироскопов и акселерометров с вычислителем. Гироскопы с акселерометрами (блок инерциальных чувствительных элементов) при этом устанавливают жестко на борту объекта. На рис.1.10. показаны 1 – блок чувствительных элементов, выдающих информацию о векторе кажущегося ускорения \vec{a}_{xyz} в проекциях на оси связанной с объектом системы координат xyz , а также о векторе угловой скорости $\vec{\theta}_{xyz}$ в проекциях на оси той же системы координат. В вычислителе 2 происходит преобразование проекций ускорения из связанной системы в навигационную (например, географическую сопровождающую). Для этого по данным об угловой скорости (или другой информации) вычисляют направляющие косинусы между осями указанных систем координат. Из них также вычисляют углы положения объекта: курс ψ , крен ϑ , тангаж γ .

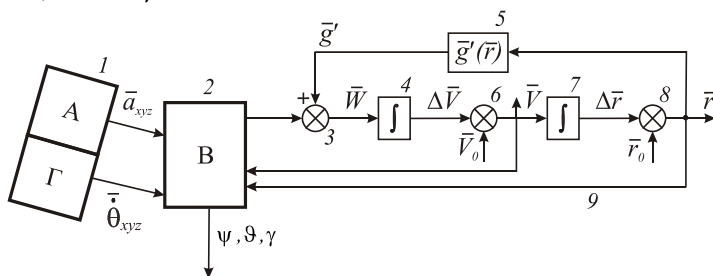


Рис.1.10. Обобщенная схема БИНС

Таблица 1.3. Основные технические характеристики прецизионных маятниковых компенсационных акселерометров.

Характеристика	Модель акселерометра, фирма-изготовитель.								
	А-4 Litton, QA-3000 Sundstrand (США)	А-12, А-15 РПКБ (Россия)	АК-6 «Авиарибор» (Россия)	КИ-67-11 «Ротор» (Россия)	КЕЛФ-67 «Электромеханика» (Россия)	АТ-П104 «Темп» (Россия)	АК-10 «Дельфин» (Россия)	А-4Т Litton, Sagem (Франция)	
Основная область применения	Авиационные ИНС							Корабельные ИНС	Наземные ИНС
Диапазон измерения, g	$\pm 10; \pm 20;$	$\pm 20;$	± 10	± 10	$\pm 20; \pm 40$	$\pm 10; \pm 20$	± 2	± 10	
Пороговая чувствительность, $\cdot 10^{-6}$ g	0.5	0.5	0.5	1	5	1	0.1	5	
Основная погрешность «нуля»: -в запуске, $\cdot 10^{-5}$ g/час -от запуска к запуску, $\cdot 10^{-5}$ g	0.5 5	2 3 ... 5	3 5	5 15	10 60	2 10	2.5 3 ... 5	10 10 ... 15	
Основная погрешность КП, $\cdot 10^{-6}$ %	0.5 ... 1	2	3 ... 5	3 ... 5	2	5	1	5	
Температурные погрешности									
-«нуля», $\cdot 10^{-5}$ g \cdot °C ⁻¹	1 ... 3	2	3		5	10	2		
-КП, $\cdot 10^{-4}$ · °C ⁻¹	1	0.5	1.8		1.5	5	0.5		
Диапазон рабочих температур, °C	-60 ... +80	-60 ... +80	-60 ... +85	-60 ... +80	-60 ... +80	-50 ... +85	-50 ... +70	-40 ... +55	
Габаритные размеры, мм (масса) ,г	$\varnothing 30 \times 20$ (50)	$\varnothing 25 \times 21$ (40)	(50)	(80)	(100)	$\varnothing 20 \times 24$ (45)	38×38×25 (115)	(70)	
Время готовности, с	30	60	30	30	120	60	250		
Цена, тыс.\$	3 ... 4	3 ... 4	2 ... 2.5	4 ... 5	1.5 ... 2	1.2			
Вид выходного сигнала ΔК	U=f	I=f	U=f	I=f	U=f	U=f	U=	U=f	

КП – коэффициент передачи, ΔК – аналоговый сигнал/кодовый сигнал, U= постоянное напряжение, I= – постоянный ток, f – частота

В БИНС используют различные гироскопические датчики. Они могут выдавать информацию о различных угловых параметрах. В таблице 1.4 приведены данные о типах используемых в настоящее время в БИНС гироскопических датчиков.

Таблица 1.4. Типы применяемых гироскопических датчиков

Тип гироскопа	Угловая скорость ухода	Выходные параметры
Поплавковые ДУС	до 0,01 °/час	Угловая скорость
Лазерные гироскопы	до 0,001 °/час	Угл. скор., Угол
Волоконно-оптические гироскопы	до 0,01 °/час	Угловая скорость
Динамически настраиваемые гироскопы	до 0,01 °/час	Угловая скорость
Микромеханические гироскопы	до 10 °/час	Угловая скорость
Твердотельные волновые гироскопы	до 0,01 °/час	Угл. скор., Угол
Сферические гироскопы с электростатическим подвесом ротора	до 10 ⁻⁵ °/час	Направляющие косинусы
Сферические гироскопы с магнитным подвесом ротора	до 10 ⁻⁴ °/час	Направляющие косинусы
Сферические гироскопы с воздушным подвесом ротора	до 0,01 °/час	Направляющие косинусы

Достоинства ИНС:

1. Измерение полного набора навигационных параметров – ускорения, скорости, координат, углов положения объекта (курс, крен, тангаж), угловых скоростей объекта и ряда других вспомогательных.
2. Полная автономность, т.е. возможность работать независимо ни от видимости ориентиров, маяков, светил, ни от положения или движения объекта; помехозащищенность (невозможно создать помехи, мешающие работе ИНС).
3. Высокая скорость определения и выдачи данных (100 Гц и более)
4. Невозмущаемость относительными ускорениями, т.е. отсутствие колебаний гиросtabilизированной платформы или ее аналитического аналога (в БИНС) при действии относительных (относительно Земли) ускорений. Как следствие, отсутствуют погрешности в выходных данных по всем навигационным

параметрам. При этом собственная частота колебаний погрешностей, вызванных различными возмущающими факторами, в основном, соответствует частоте колебаний маятника Шулера.

Недостатки ИНС:

1. Необходимость ввода начальных условий (начального положения платформы (объекта для БИНС), начальных значений скорости, начальных координат), что необходимо для использования метода счисления пути; необходимость учета формы Земли и параметров гравитационного поля в точке расположения подвижного объекта.
2. Требуется непрерывность работы (или после перерыва в работе необходимо вновь вводить начальные условия)
3. Нарастание ошибок со временем

1.5. Принцип работы БИНС

Рассмотрим принцип работы БИНС в инерциальной системе координат на примере плоской задачи. Пусть XOY – инерциальная система координат. Положение объекта, с которым связана система координат $x_cO_1y_c$, задано радиусом-вектором \vec{r} .

Гравитационное ускорение в точке O_1 соответствует вектору \vec{g}' . по формуле (1.7)

$$\vec{g}' = -\frac{GM}{r^2} \vec{r}_0 = -\frac{GM}{r^3} \vec{r},$$

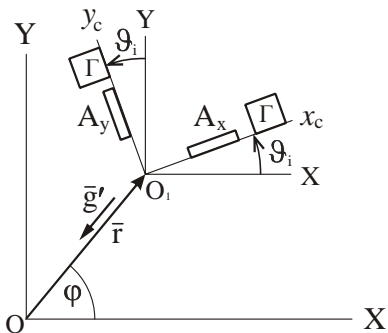


Рис.1.11. Положение объекта в инерциальной системе координат

где \vec{r}_0 - орт радиуса-вектора \vec{r} . Знак – учитывает, что ускорение направлено против направления радиуса-вектора.

На борту объекта жестко установлены акселерометры А и гироскопы Г.

В соответствии с основным уравнением (1.17)

$$\vec{W} = \vec{a} + \vec{g}'.$$

Отсюда выражения для проекций абсолютного ускорения в инерциальной

системе координат можно записать в виде

$$\ddot{X} = a_{xc}c_{11} + a_{yc}c_{12} + g'_X ;$$

$$\ddot{Y} = a_{xc}c_{21} + a_{yc}c_{22} + g'_Y .$$

В этих формулах a_{xc} и a_{yc} , проекции кажущегося ускорения, измеряемые акселерометрами, $c_{11} \dots c_{22}$ - направляющие косинусы между осями инерциальной и связанной систем координат. Для рис.1.11 матрица направляющих косинусов

C	x_c	y_c
X	$c_{11} = \cos \theta;$	$c_{12} = -\sin \theta;$
Y	$c_{21} = \sin \theta;$	$c_{22} = \cos \theta;$

Далее запишем проекции гравитационного ускорения:

$$g'_X = -\frac{GM}{r^2} \cos(rX), \quad g'_Y = -\frac{GM}{r^2} \cos(rY) .$$

Знак – учитывает, что проекция ускорения направлена против направления оси.

Направляющие косинусы из рис.1.11 можно записать

$$\cos(rX) = X / r, \quad \cos(rY) = Y / r .$$

После подстановки

$$g'_x = -\frac{GM}{r^3} X, \quad g'_y = -\frac{GM}{r^3} Y .$$

В векторно-матричной форме выражение для ускорения имеет вид

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = C\vec{a} - \frac{GM}{r^3} \vec{r}} .$$

Это соотношение лежит в основе построения и полноразмерной БИНС.

Зная вектор абсолютного ускорения, получим вектор абсолютной линейной скорости

$$\dot{\vec{r}} \equiv \vec{V} = \int_0^t \ddot{\vec{r}} dt + \dot{\vec{r}}_0 .$$

Аналогично получим радиус-вектор места $\vec{r} = \int_0^t \dot{\vec{r}} dt + \vec{r}_0 .$

Уравнения идеальной работы в скалярном виде в инерциальной системе координат

Работу рассмотренной схемы можно описать системой скалярных уравнений. Предположим, что в качестве гироскопического измерителя используется датчик угловой скорости. Угол поворота объекта получим как интеграл от угловой скорости с учетом начального значения угла

$$\mathcal{G} = \int_0^t \omega_z dt + \mathcal{G}_0 .$$

В дифференциальной форме это уравнение получает вид $\dot{\mathcal{G}}_i = \omega_z$. Выражения для кажущихся ускорений в инерциальной системе координат имеют вид

$$a_X = a_{xc} \cos \mathcal{G}_i - a_{yc} \sin \mathcal{G}_i,$$

$$a_Y = a_{xc} \sin \mathcal{G}_i + a_{yc} \cos \mathcal{G}_i.$$

Проекции абсолютной скорости получим в виде

$$V_X = \int_0^t (a_X + g'_X) dt + V_{X0}, \quad V_Y = \int_0^t (a_Y + g'_Y) dt + V_{Y0}.$$

В дифференциальной форме

$$\dot{V}_X = a_X + g'_X, \quad \dot{V}_Y = a_Y + g'_Y.$$

Аналогично можно записать выражения для вычисления координат

$$X = \int_0^t V_X dt + X_0, \quad Y = \int_0^t V_Y dt + Y_0.$$

**Уравнения идеальной работы
во вращающейся (земной) системе координат**

Подавляющее большинство инерциальных систем решают задачи навигации на земной поверхности, т.е. в сопровождающем трехграннике. Северный канал такой БИНС показан на рис. 1.12. Рассмотрим уравнения идеальной работы в географическом трехграннике.

Угол поворота объекта (связанного базиса $0x_c y_c$) в сопровождающем трехграннике обозначим \mathcal{G} . Гироскоп измеряет абсолютную угловую скорость ω_z . Переносная угловая скорость из-за перемещения объекта $\omega_\xi = -V_\eta / (R + h)$, где R – радиус Земли, h –

высота объекта. Исходя из положения, что абсолютная угловая скорость равна сумме переносной и относительной скорости, запишем следующие выражения.

$$\dot{\vartheta} = \omega_z - V_\eta / (R + h), \quad \vartheta_0 = 0; \quad (\vartheta = \int_0^t \dot{\vartheta} dt + \vartheta_0); \quad (1.18)$$

Эти уравнения можно назвать уравнениями ориентации.

В блоке вычисления направляющих косинусов и преобразования координат НК и ПК выполняется преобразование ускорений из связанной в навигационную систему координат

$$\begin{aligned} a_\eta &= -a_{xc} \cos \vartheta + a_{yc} \sin \vartheta, \\ a_\zeta &= a_{xc} \sin \vartheta + a_{yc} \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (1.19)$$

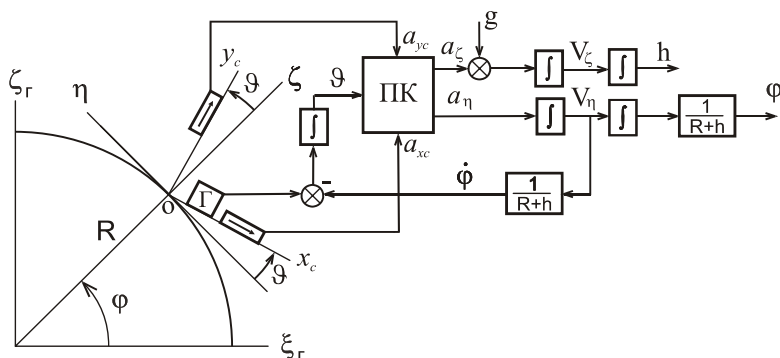


Рис.1.12. Северный канал БИНС

Из полученных проекций кажущегося ускорения, учитывая основное уравнение инерциальной навигации ($\bar{a} = \bar{W} - \bar{g}'$), после интегрирования получим северную составляющую скорости

$$\dot{V}_\eta = a_\eta, \quad V_{\eta 0} = 0; \quad (V_\eta = \int_0^t \dot{V}_\eta dt + V_{\eta 0}) \quad (1.20)$$

и вертикальную составляющую скорости

$$\dot{V}_\zeta = a_\zeta + g', \quad V_{\zeta 0} = 0; \quad (V_\zeta = \int_0^t \dot{V}_\zeta dt + V_{\zeta 0}). \quad (1.21)$$

Далее получаем широту и высоту в соответствии с очевидными выражениями

$$\dot{\varphi} = \frac{V_\eta}{R + h}, \quad \varphi_0 = 0; \quad (\varphi = \int_0^t \dot{\varphi} dt + \varphi_0); \quad \dot{h} = V_\zeta, \quad h_0 = 0. \quad (1.22)$$

2. Уравнения ориентации

Уравнениями ориентации называют дифференциальные уравнения, в результате решения которых получают параметры, характеризующие положение подвижного объекта относительно выбранной системы координат. Такими параметрами могут быть углы Эйлера – Крылова, направляющие косинусы, параметры Родрига-Гамильтона и др. Исторически первыми уравнениями ориентации были известные в теоретической механике кинематические уравнения Эйлера. Дополним эти уравнения учетом переносного движения сопровождающего трехгранника.

2.1. Уравнения ориентации Эйлера

Уравнения позволяют по измеренным проекциям абсолютной угловой скорости объекта и вычисленным проекциям угловой скорости сопровождающего трехгранника вычислить углы курса, тангажа и крена объекта.

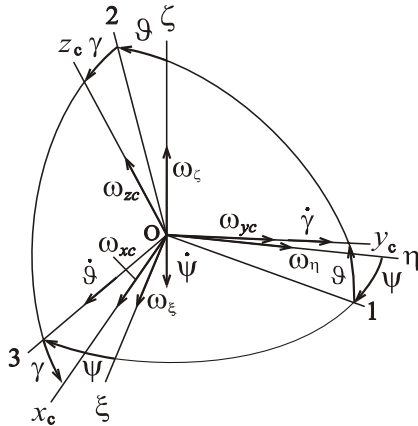


Рис.2.1. Углы и угловые скорости

На рис.2.1 $O\xi\eta\zeta$ - географический сопровождающий трехгранник, ось $O\eta$ - направлена на Север, $Ox_c y_c z_c$ - связанный с объектом трехгранник, ψ - угол курса, ϑ - угол тангажа, γ - угол крена; $\omega_{\xi}, \omega_{\eta}, \omega_{\zeta}$ - проекции угловой скорости сопровождающего трехгранника; $\omega_{xc}, \omega_{yc}, \omega_{zc}$ - проекции абсолютной угловой скорости объекта, измеряемые датчиками угловой скорости; $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\gamma}$ - проекции относительной угловой скорости.

Исходя из того, что абсолютная скорость равна сумме относительной и переносной скоростей

$$\vec{\omega}_{abc} = \vec{\omega}_{пер} + \vec{\omega}_{отн},$$

составим выражения проекций угловых скоростей.

Сумма проекций на ось $O1$ даст

$$\dot{\gamma} = \omega_{yc} + tg \mathcal{G}(\omega_{xc} \sin \gamma - \omega_{zc} \cos \gamma) - \frac{1}{\cos \mathcal{G}} (\omega_{\eta} \cos \psi + \omega_{\xi} \sin \psi). \quad (2.1)$$

Сумма проекций на ось $O2$ даст

$$\dot{\psi} = \omega_{xc} \sin \gamma - \omega_{zc} \cos \gamma + tg \mathcal{G}(\omega_{\eta} \cos \psi + \omega_{\xi} \sin \psi) + \omega_{\zeta}. \quad (2.2)$$

Сумма проекций на ось $O3$ даст

$$\dot{\mathcal{G}} = \omega_{xc} \cos \gamma + \omega_{zc} \sin \gamma + \omega_{\eta} \sin \psi - \omega_{\xi} \cos \psi. \quad (2.3)$$

Недостаток уравнений (2.1) и (2.2) – их некорректность при $\mathcal{G} = \pm 90^\circ$. Следовательно, использовать их можно только в ограниченном диапазоне углов \mathcal{G} или же необходимо исключать некорректную ситуацию дополнительными алгоритмами.

Уравнения могут быть представлены в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\mathcal{G}} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \gamma & 0 & -\cos \gamma \\ \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ tg \mathcal{G} \sin \gamma & 1 & -tg \mathcal{G} \cos \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{xc} \\ \omega_{yc} \\ \omega_{zc} \end{bmatrix} + \frac{1}{\cos \mathcal{G}} \begin{bmatrix} \sin \psi / \sin \mathcal{G} & \cos \psi / \sin \mathcal{G} & \cos \mathcal{G} \\ -\cos \psi / \cos \mathcal{G} & \sin \psi / \cos \mathcal{G} & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{\xi} \\ \omega_{\eta} \\ \omega_{\zeta} \end{bmatrix}$$

По данным о полученных после интегрирования углах курса, крена и тангажа вычисляют матрицу направляющих косинусов

C^{gb}	x_c	y_c	z_c	
ξ	$c_{11} = \cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi \sin \mathcal{G};$	$c_{12} = \cos \mathcal{G} \sin \psi$	$c_{13} = \cos \psi \sin \gamma - \sin \psi \cos \gamma \sin \mathcal{G};$	(2.4)
η	$c_{21} = -\cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \sin \mathcal{G};$	$c_{22} = \cos \mathcal{G} \cos \psi;$	$c_{23} = -\sin \psi \sin \gamma - \cos \gamma \cos \psi \sin \mathcal{G};$	
ζ	$c_{31} = -\cos \mathcal{G} \sin \gamma;$	$c_{32} = \sin \mathcal{G};$	$c_{33} = \cos \mathcal{G} \cos \gamma.$	

2.2. Уравнения ориентации Пуассона

Производная вектора \vec{e} в абсолютной системе координат, если вектор представлен в подвижной системе координат, определяется формулой

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{e}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{e}, \quad (2.5)$$

где первое слагаемое (т.н. локальная производная) описывает скорость изменения вектора (производную) в подвижной системе, а второе – его скорость, вызванную движением подвижной системы с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

На рис.2.2 показаны инерциальная и подвижная системы координат, $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ - орты инерциальной системы координат OXYZ, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты связанной системы координат $Ox_c y_c z_c$, $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости этой системы координат.

Введем матрицу направляющих косинусов

C^{bi}	X	Y	Z
x_c	c_{11}	c_{12}	c_{13}
y_c	c_{21}	c_{22}	c_{23}
z_c	c_{31}	c_{32}	c_{33}

Пользуясь этой матрицей, можно записать выражения

$$\vec{i}_0 = c_{11}\vec{i} + c_{21}\vec{j} + c_{31}\vec{k},$$

$$\vec{j}_0 = c_{12}\vec{i} + c_{22}\vec{j} + c_{32}\vec{k},$$

$$\vec{k}_0 = c_{13}\vec{i} + c_{23}\vec{j} + c_{33}\vec{k}.$$

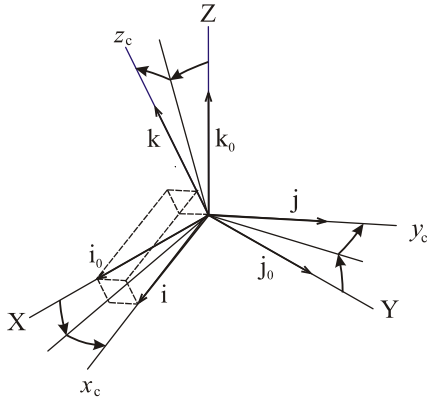


Рис.2.2. Инерциальная и связанная системы координат

В соответствии с (2.5)

$$\frac{d\vec{i}_0}{dt} = \dot{c}_{11}\vec{i} + \dot{c}_{21}\vec{j} + \dot{c}_{31}\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{xc} & \omega_{yc} & \omega_{zc} \\ c_{11} & c_{21} & c_{31} \end{vmatrix},$$

с другой стороны, скорость изменения орта инерциальной системы координат $\frac{d\vec{i}_0}{dt} = 0$. Аналогично

$$\frac{d\vec{j}_0}{dt} = \dot{c}_{12}\vec{i} + \dot{c}_{22}\vec{j} + \dot{c}_{32}\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{xc} & \omega_{yc} & \omega_{zc} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{vmatrix}, \quad \frac{d\vec{j}_0}{dt} = 0;$$

$$\frac{d\vec{k}_0}{dt} = \dot{c}_{13}\vec{i} + \dot{c}_{23}\vec{j} + \dot{c}_{33}\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{xc} & \omega_{yc} & \omega_{zc} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix}, \quad \frac{d\vec{k}_0}{dt} = 0.$$

Суммируя коэффициенты при ортах, получим 3 системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{c}_{11} = \omega_{zc}c_{21} - \omega_{yc}c_{31}, \\ \dot{c}_{21} = \omega_{xc}c_{31} - \omega_{zc}c_{11}, \\ \dot{c}_{31} = \omega_{yc}c_{11} - \omega_{xc}c_{21}; \end{cases} \begin{cases} \dot{c}_{12} = \omega_{zc}c_{22} - \omega_{yc}c_{32}, \\ \dot{c}_{22} = \omega_{xc}c_{32} - \omega_{zc}c_{12}, \\ \dot{c}_{32} = \omega_{yc}c_{12} - \omega_{xc}c_{22}; \end{cases} \begin{cases} \dot{c}_{13} = \omega_{zc}c_{23} - \omega_{yc}c_{33}, \\ \dot{c}_{23} = \omega_{xc}c_{33} - \omega_{zc}c_{13}, \\ \dot{c}_{33} = \omega_{yc}c_{13} - \omega_{xc}c_{23}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Это уравнения Пуассона. В матричном виде

$$\dot{C}^{bi} = \Omega_b^{bi} C^{bi} \quad (2.7)$$

где

$$C^{bi} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad \Omega_b^{bi} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{zc} & -\omega_{yc} \\ -\omega_{zc} & 0 & \omega_{xc} \\ \omega_{yc} & -\omega_{xc} & 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (2.7) можно транспонировать

$$\dot{C}^{biT} = C^{biT} \Omega_b^{biT}.$$

Отметим, что $\Omega_b^{biT} = -\Omega_b^{bi}$ и тогда

$$\dot{C}^{biT} = -C^{biT} \Omega_b^{bi} \quad (2.8)$$

Другие формы записи

$$\begin{aligned} \dot{C}^{bi} - \Omega_b^{bi} C^{bi} &= 0; \\ \dot{C}^{biT} + C^{biT} \Omega_b^{bi} &= 0. \end{aligned}$$

¹ Отметим, что в обозначении матрицы направляющих косинусов верхние индексы показывают название исходного базиса (правый индекс) и конечного базиса (левый индекс). В нашем примере C^{bi} обозначает преобразование от базиса \mathbf{i} к базису \mathbf{b} . В обозначении матрицы угловой скорости верхние индексы используют аналогично, а нижний индекс показывает, на какую систему координат проектируется угловая скорость.

Если учесть, что $C^{biT} = C^{ib}$, можно записать

$$\dot{C}^{ib} + C^{ib}\Omega_b^{bi} = 0 \quad \text{или} \quad \dot{C}^{ib} = C^{ib}\Omega_b^{ib}.$$

Свойства матрицы направляющих косинусов

Напомним основные свойства матриц направляющих косинусов.
Матрица направляющих косинусов ортогональна:

$$C^{ibT} \cdot C^{ib} = I, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ - единичная матрица;}$$

$C^{ibT} = C^{ib-1}$, т.е. транспонированная матрица есть обратная матрица.

Для матрицы C^{bi} (как и для другой любой матрицы направляющих косинусов) существуют соотношения для элементов строк

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 &= 1, \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 &= 1, \\ c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 &= 1; \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + c_{13}c_{23} &= 0, \\ c_{11}c_{31} + c_{12}c_{32} + c_{13}c_{33} &= 0, \\ c_{31}c_{21} + c_{32}c_{22} + c_{33}c_{23} &= 0. \end{aligned} \tag{2.9a}$$

Аналогичные соотношения можно привести и для элементов столбцов. Формулы (2.9) описывают условие масштаба (нормировки), (2.9a) – условие ортогональности осей системы координат.

В общем виде

$$c_{\alpha 1}c_{\beta 1} + c_{\alpha 2}c_{\beta 2} + c_{\alpha 3}c_{\beta 3} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{где символ Кронекера}$$

$$\delta_{\alpha\beta} = 1 \quad \text{при} \quad \alpha = \beta$$

$$\delta_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta.$$

Определитель матрицы направляющих косинусов равен 1:

$$\det(C)=1.$$

Раскроем определитель по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & l_{33} \end{vmatrix} = c_{11}(c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) + c_{12}(c_{23}c_{31} - c_{21}c_{33}) + c_{13}(c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}).$$

Сравнивая полученное выражение с первым элементом (2.8), можно записать

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}, \\ c_{12} &= c_{23}c_{31} - c_{21}c_{33}, \\ c_{13} &= c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Аналогично можно записать еще 2 тройки соотношений

$$\begin{aligned} c_{21} &= c_{12}c_{33} - c_{13}c_{32}, & c_{31} &= c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}, \\ c_{22} &= c_{13}c_{31} - c_{11}c_{33}, & c_{32} &= c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23}, \\ c_{23} &= c_{31}c_{12} - c_{32}c_{11}; & c_{33} &= c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}; \end{aligned} \quad (2.11)$$

т.е. каждый элемент равен своему алгебраическому дополнению.

Обобщенное уравнение Пуассона

Обобщенное уравнение Пуассона запишем в виде [5,13]

$$\dot{C}^{gb} = C^{gb}\Omega_b^{ib} - \Omega_g^{ig}C^{gb}, \quad (2.12)$$

$$\Omega_b^{ib} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zc} & \omega_{yc} \\ \omega_{zc} & 0 & -\omega_{xc} \\ -\omega_{yc} & \omega_{xc} & 0 \end{bmatrix} - \text{матрица проекций на оси связанного ба-}$$

зиса \mathbf{b} вектора угловой скорости связанной системы координат \mathbf{b} относительно инерциальной (i), этой матрице соответствует вектор $\bar{\omega}_b = [\omega_{xc} \ \omega_{yc} \ \omega_{zc}]^T$;

$$\Omega_g^{ig} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & 0 \end{bmatrix} - \text{матрица проекций на оси базиса } \mathbf{g} \text{ вектора}$$

угловой скорости географического сопровождающего базиса \mathbf{g} относительно инерциального i , этой матрице соответствует вектор

$$\bar{\omega}_g = [\omega_\xi \ \omega_\eta \ \omega_\zeta]^T.$$

Обобщенное уравнение применяется, когда необходимо определить направляющие косинусы одной вращающейся системы координат относительно другой вращающейся системы. В нашем случае в развернутом виде уравнение имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_{11} & \dot{c}_{12} & \dot{c}_{13} \\ \dot{c}_{21} & \dot{c}_{22} & \dot{c}_{23} \\ \dot{c}_{31} & \dot{c}_{32} & \dot{c}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zc} & \omega_{yc} \\ \omega_{zc} & 0 & -\omega_{xc} \\ -\omega_{yc} & \omega_{xc} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{\zeta} & \omega_{\eta} \\ \omega_{\zeta} & 0 & -\omega_{\xi} \\ -\omega_{\eta} & \omega_{\xi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

В скалярном виде

$$\begin{aligned} \dot{c}_{11} &= c_{12}\omega_{zc} - c_{13}\omega_{yc} + \omega_{\zeta}c_{21} - \omega_{\eta}c_{31}; \\ \dot{c}_{12} &= -c_{11}\omega_{zc} + c_{13}\omega_{xc} + \omega_{\zeta}c_{22} - \omega_{\eta}c_{32}; \\ \dot{c}_{13} &= c_{11}\omega_{yc} - c_{12}\omega_{xc} + \omega_{\zeta}c_{23} - \omega_{\eta}c_{33}; \\ \dot{c}_{21} &= c_{22}\omega_{zc} - c_{23}\omega_{yc} - \omega_{\zeta}c_{11} + \omega_{\eta}c_{31}; \\ \dot{c}_{22} &= -c_{21}\omega_{zc} + c_{23}\omega_{xc} - \omega_{\zeta}c_{12} + \omega_{\xi}c_{32}; \\ \dot{c}_{23} &= c_{21}\omega_{yc} - c_{22}\omega_{xc} - \omega_{\zeta}c_{13} + \omega_{\xi}c_{33}; \\ \dot{c}_{31} &= c_{32}\omega_{zc} - c_{33}\omega_{yc} - \omega_{\xi}c_{21} + \omega_{\eta}c_{11}; \\ \dot{c}_{32} &= -c_{31}\omega_{zc} + c_{33}\omega_{xc} + \omega_{\eta}c_{12} - \omega_{\xi}c_{22}; \\ \dot{c}_{33} &= c_{31}\omega_{yc} - c_{32}\omega_{xc} + \omega_{\eta}c_{13} + \omega_{\xi}c_{23}; \end{aligned} \tag{2.13}$$

Если известны направляющие косинусы, можно найти углы курса, крена, тангажа из (2.4)

$$\psi = \arctg\left(\frac{c_{12}}{c_{22}}\right), \quad \gamma = -\arctg\left(\frac{c_{31}}{c_{33}}\right), \quad \vartheta = \arcsin(c_{32}) \text{ или } \vartheta = \arctg\left(\frac{c_{32}}{\sqrt{1-c_{32}^2}}\right) \tag{2.14}$$

Вместо обобщенного уравнения Пуассона можно использовать два обычных уравнения Пуассона. Первое уравнение описывает движение связанного базиса \mathbf{b} относительно инерциального \mathbf{i} :

$$\dot{C}^{ib} = C^{ib}\Omega_b^{ib}.$$

Второе уравнение описывает движение сопровождающего базиса \mathbf{g} :

$$\dot{C}^{ig} = C^{ig}\Omega_g^{ig}.$$

Далее используют понятное соотношение

$$C^{ib} = C^{ig}C^{gb},$$

откуда искомая матрица
$$C^{gb} = (C^{ig})^{-1}C^{ib}. \tag{2.15}$$

Еще один вариант получения направляющих косинусов предполагает использование вектора ориентации или вектора конечного поворота [13] (см. п.2.4, формулы (2.25),(2.26)).

Контроль правильности вычисления направляющих косинусов основан на свойствах матрицы направляющих косинусов. Для правильно вычисленных направляющих косинусов должны выполняться условия масштаба (нормирования) (2.9) и ортогональности (2.9а). Если условия не выполняются, может быть выполнена коррекция [6]:

- если $1 - (c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + c_{i3}^2) = \Delta_i$, $i = 1, 2, 3$ корректируем значения направляющих косинусов $\check{c}_{i1} = c_{i1} - \frac{1}{2} \Delta_i c_{i1}$.

В общем виде, если обозначить C_i строку i матрицы направляющих косинусов, а C_j - другую строку этой же матрицы, то можно записать $\Delta_{ij} = C_i C_j^T$. Если $\Delta_{ij} \neq 0$, выполняем коррекцию [6]:

- нормализацию $\check{C}_i = C_i - \frac{1}{2} \Delta_{ii} C_i$,

- ортогонализацию $\check{C}_i = C_i - \frac{1}{2} \Delta_{ij} C_j$, $\check{C}_j = C_j - \frac{1}{2} \Delta_{ij} C_i$.

Общие формулы для строк и столбцов можно найти в [13].

2.3. Уравнения с параметрами Родрига-Гамильтона

В этих уравнениях информацию об угловом положении объекта содержат параметры Родрига-Гамильтона, которые являются компонентами кватерниона Λ , описывающего этот поворот (см. приложение 1). Начальные значения параметров кватерниона определяют по известным начальным значениям углов курса ψ_0 , тангажа ϑ_0 и крена γ_0 (см. п1.3).

$$\lambda_0 = \cos \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2} + \sin \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2},$$

$$\lambda_1 = \cos \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2} + \sin \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2},$$

$$\lambda_2 = \cos \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2} - \sin \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2},$$

$$\lambda_3 = \cos \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2} - \sin \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2}.$$

Матрица направляющих косинусов через параметры кватерниона может быть представлена в следующем виде

$$C^{gb} \begin{array}{c|ccc} & x_c & y_c & z_c \\ \hline \xi & 2\lambda_0^2 + 2\lambda_1^2 - 1 & 2(-\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ \eta & 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) & 2\lambda_0^2 + 2\lambda_2^2 - 1 & 2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) \\ \zeta & 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) & 2\lambda_0^2 + 2\lambda_3^2 - 1 \end{array} \quad (2.16)$$

В соответствии с (2.14)

$$\psi = \arctg\left(\frac{2(-\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}\right), \quad \gamma = -\arctg\left(\frac{2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}\right),$$

$$\vartheta = \arcsin(2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)) \quad \text{или} \quad \vartheta = \arctg\left(\frac{2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)}{\sqrt{1 - 4(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)^2}}\right). \quad (2.17)$$

Дифференциальное уравнение, описывающее изменение параметров Родрига-Гамильтона в зависимости от проекций абсолютной угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и проекций переносной угловой скорости $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$, может быть записано

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_x - \omega_\xi) & -(\omega_y - \omega_\eta) & -(\omega_z - \omega_\zeta) \\ \omega_x - \omega_\xi & 0 & \omega_z + \omega_\zeta & -(\omega_y + \omega_\eta) \\ \omega_y - \omega_\eta & -(\omega_z + \omega_\zeta) & 0 & \omega_x + \omega_\xi \\ \omega_z - \omega_\zeta & \omega_y + \omega_\eta & -(\omega_x + \omega_\xi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Если обозначить матрицу угловых скоростей Ω , то уравнение можно записать в компактной векторно-матричной форме

$$\dot{\Lambda}^{gb} = \frac{1}{2} \Omega \cdot \Lambda^{gb}.$$

Если в уравнении (2.18) пренебречь проекциями переносной угловой скорости, получим уравнение, описывающее изменение кватерниона в инерциальной системе координат.

Вместо кинематического уравнения (2.18) можно использовать 2 кинематических уравнения и операцию перемножения кватернионов, аналогично (2.15).

Для решения уравнений применяют широко известные численные методы первого, второго, третьего, четвертого порядка [8] или специализированные методы [9].

Контроль точности вычислений проводят по отклонению нормы кватерниона (п1.1) от 1:

$$\Delta = 1 - (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2).$$

Если $\Delta < \Delta_d$, т.е. вычисленная норма отличается от 1 в допуске Δ_d , параметры кватерниона уточняют по формуле

$$\check{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\sqrt{1 - \Delta}},$$

или по формуле $\check{\Lambda} = \Lambda + \frac{1}{2}\Delta \cdot \Lambda$ [13], которая соответствует разложению в ряд предыдущей формулы.

2.4. Уравнения с параметрами вектора ориентации

Параметры Родрига-Гамильтона, Кейли-Клейна, координаты вектора ориентации, координаты вектора конечного поворота относятся к группе векторных параметров [14] и все они основываются на известной теореме Эйлера:

любое вращательное движение твердого тела эквивалентно плоскому вращению вокруг некоторой оси и может быть задано конечным поворотом вокруг этой оси.

Из этой теоремы следует, что поворот одной системы координат (связанной) относительно другой (исходной) в любой момент может быть описан некоторым единичным вектором \vec{e} (называемым иногда вектором Эйлера), перпендикулярным плоскости конечного поворота, и углом ϕ на который осуществляется поворот. Различные кинематические параметры, относящиеся к группе векторных, являются некоторыми функциями \vec{e} и θ [13,14].

Вектор Эйлера (вектор ориентации)

$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} = \theta \vec{e} = \begin{bmatrix} \theta e_x \\ \theta e_y \\ \theta e_z \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

где e_x, e_y, e_z - направляющие косинусы орта \vec{e} в подвижном базисе.

Вектор конечного поворота $\vec{\Theta}$ по направлению совпадает с вектором Эйлера, а по величине равен $2tg \frac{\theta}{2}$:

$$\vec{\Theta} = \begin{bmatrix} \Theta_x \\ \Theta_y \\ \Theta_z \end{bmatrix} = 2tg \frac{\theta}{2} \vec{e} = \begin{bmatrix} 2e_x tg \frac{\theta}{2} & 2e_y tg \frac{\theta}{2} & 2e_z tg \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}^T.$$

Кинематическое уравнение, описывающее изменения вектора конечного поворота во времени, имеет вид:

$$\frac{d\bar{\Theta}}{dt} = \bar{\omega} + \frac{1}{2}\bar{\Theta} \times \bar{\omega} + \frac{1}{4}(\bar{\omega} \cdot \bar{\Theta})\bar{\Theta}, \quad \bar{\Theta}(t_0) = \bar{\Theta}_0. \quad (2.20)$$

Здесь вектор $\bar{\omega}$ описывает угловую скорость связанной системы координат θ_{xyz} относительно исходной. Если измерителями являются гироскопические измерители угловой скорости, то $\bar{\omega}$ - вектор абсолютной угловой скорости относительно инерциальной системы координат. Как кинематические параметры используются проекции (координаты) вектора конечного поворота на оси подвижной системы координат.

В скалярном виде получим

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_x &= \omega_x + \frac{1}{2}(\omega_y \theta_z - \omega_z \theta_y) + \frac{1}{4}\theta_x(\omega_x \theta_x + \omega_x \theta_y + \omega_z \theta_z), \\ \dot{\theta}_y &= \omega_y + \frac{1}{2}(\omega_z \theta_x - \omega_x \theta_z) + \frac{1}{4}\theta_y(\omega_x \theta_x + \omega_x \theta_y + \omega_z \theta_z), \\ \dot{\theta}_z &= \omega_z + \frac{1}{2}(\omega_x \theta_y - \omega_y \theta_x) + \frac{1}{4}\theta_z(\omega_x \theta_x + \omega_x \theta_y + \omega_z \theta_z). \end{aligned}$$

Кинематическое уравнение для вектора Эйлера $\bar{\phi}$ имеет вид:

$$\frac{d\bar{\phi}}{dt} = \bar{\omega} + \frac{1}{2}(\bar{\phi} \times \bar{\omega}) + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\phi \sin \phi}{1 - \cos \phi}\right) \bar{\phi} \times (\bar{\phi} \times \bar{\omega}); \quad \bar{\phi}(t_0) = \bar{\phi}_0, \quad (2.21)$$

где $\bar{\omega}$ - вектор угловой скорости поворота. Отметим, что $\frac{\sin \phi}{1 - \cos \phi} = \text{ctg} \frac{\phi}{2}$, разложением коэффициента при третьем слагаемом

(2.21) в степенной ряд до первого порядка относительно величины ϕ можно показать, что

$$\frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\phi \sin \phi}{1 - \cos \phi}\right) \approx \frac{1}{12}.$$

Уравнение (2.21) нелинейное и вырождается при $\phi = 2\pi k$, ($k = 0, 1, \dots$).

В качестве кинематических параметров используют проекции вектора Эйлера на оси подвижной системы координат.

Уравнение (2.21) может быть записано в векторно-матричной форме

$$\frac{d\bar{\phi}}{dt} = \bar{\omega} - \frac{1}{2}\Omega\bar{\phi} + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\phi}{2} \text{ctg} \frac{\phi}{2}\right) \Phi^2 \bar{\omega}, \quad (2.22)$$

$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix}; \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}; \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix}.$$

На малых интервалах времени h обычно выполняется условие $|\vec{\phi}| \ll 1$.

Тогда нелинейный член уравнения, который имеет порядок $(\omega h)^3$, можно не учитывать и рассматривать уравнение

$$\frac{d\vec{\phi}}{dt} = \vec{\omega} - \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}\vec{\phi}. \quad (2.23)$$

С учетом интегрального характера первичной информации численные методы решения уравнения (2.23) целесообразно строить на основе

метода последовательных приближений, когда $\vec{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\phi}^{(n)}$.

Нулевое приближение: $\vec{\phi}^{(0)} = 0$.

Первое приближение: $\vec{\phi}^{(1)} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega(\tau) d\tau$.

Второе приближение: $\vec{\phi}^{(2)} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Omega(\tau') \int_{t_{i-1}}^{\tau'} \omega(\tau) d\tau d\tau'$.

и т.д.

Если в качестве измерителей используют интегрирующие гироскопы (или интегрирующие выходы лазерного гироскопа, твердотельного волнового гироскопа и др.), то для численного интегрирования можно использовать простейший одношаговый алгоритм (интервал интегрирования равен периоду съема информации) третьего порядка точности [9]

$$\vec{\phi}_i = \vec{\theta}_i + \frac{1}{12} \mathbf{\Theta}_{i-1} \vec{\theta}_i,$$

$$\vec{\theta}_i = \begin{bmatrix} \theta_{x,i} \\ \theta_{y,i} \\ \theta_{z,i} \end{bmatrix}; \mathbf{\Theta}_{i-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{z,i-1} & \theta_{y,i-1} \\ \theta_{z,i-1} & 0 & -\theta_{x,i-1} \\ -\theta_{y,i-1} & \theta_{x,i-1} & 0 \end{bmatrix},$$

где $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ - показания интегрирующих гироскопов, если гироскопы имеют ортогональные оси чувствительности, или результаты приведения показаний к ортогональным осям, если оси чувствительности дат-

чиков не ортогональны. Ошибка численного метода пропорциональна величине $(\omega h)^4$.

Могут применяться и другие методы различных порядков и различной шаговости (см.п.4.5).

Вектор ориентации и вектор конечного поворота часто более удобны для анализа вращения твердого тела, чем например, матрица направляющих косинусов или параметры Родрига-Гамильтона. После их вычисления переходят к матрице направляющих косинусов или параметрам Родрига-Гамильтона (кватерниону).

Вычисление кватерниона $\Lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ через вектор ориентации $\vec{\phi} = [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ (2.19) достаточно просто, хотя и требует вычисления тригонометрических функций:

$$\lambda_0 = c_{\phi 2}; \quad \lambda_1 = \frac{\phi_x}{\phi} \cdot s_{\phi 2}; \quad \lambda_2 = \frac{\phi_y}{\phi} \cdot s_{\phi 2}; \quad \lambda_3 = \frac{\phi_z}{\phi} \cdot s_{\phi 2}, \quad (2.24)$$

где для краткости обозначено $c_{\phi 2} = \cos \frac{\phi}{2}$, $s_{\phi 2} = \sin \frac{\phi}{2}$, $\phi = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}$.

Вычисление матрицы направляющих косинусов может быть выполнено по выражению (2.16) после вычисления элементов кватерниона (2.24) или непосредственно через компоненты вектора ориентации (2.19)

$$C^{ib} = \begin{bmatrix} \phi_x^2 + c_\phi(1 - \phi_x^2) & \phi_x\phi_y(1 - c_\phi) + \phi_zs_\phi & \phi_x\phi_z(1 - c_\phi) - \phi_ys_\phi \\ \phi_x\phi_y(1 - c_\phi) - \phi_zs_\phi & \phi_y^2 + c_\phi(1 - \phi_y^2) & \phi_y\phi_z(1 - c_\phi) + \phi_xs_\phi \\ \phi_x\phi_z(1 - c_\phi) + \phi_ys_\phi & \phi_y\phi_z(1 - c_\phi) - \phi_xs_\phi & \phi_z^2 + c_\phi(1 - \phi_z^2) \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

где обозначено $c_\phi = \cos \phi$, $s_\phi = \sin \phi$.

Матрицу (2.25) можно записать компактно, используя формулу Родригеса:

$$C^{ib} = P + (I - P)\cos \phi + Q \sin \phi, \quad (2.26)$$

где

$$P = \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}^T = \begin{bmatrix} \phi_x^2 & \phi_x\phi_y & \phi_x\phi_z \\ \phi_x\phi_y & \phi_y^2 & \phi_y\phi_z \\ \phi_x\phi_z & \phi_y\phi_z & \phi_z^2 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Однако, в отличие от параметров Родрига-Гамильтона, уравнения с вектором ориентации (2.22) являются в общем случае нелинейными и решение этих уравнений вырождается при $\phi = 2\pi k$, ($k = 0, 1, \dots$). Это

затруднение исчезает при использовании рекуррентной процедуры .

Когда найдены компоненты вектора Эйлера $\phi_{i,x}, \phi_{i,y}, \phi_{i,z}$, на i -м интервале интегрирования, вычисляется матрица направляющих косинусов ΔC_i , описывающая поворот от исходной системы к связанной. Для этого используется соотношение (с учетом малого угла ϕ) [13]

$$\Delta C = e^{\Phi} = I + \Phi + \frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{1}{6}\Phi^3 + \dots = I + \Phi \frac{1}{\phi} \sin \phi + \Phi^2 \frac{1}{\phi^2} (1 - \cos \phi), \quad (2.27)$$

где I – единичная матрица размера 3×3 , Φ – матрица из (2.22). Матрицу направляющих косинусов C_i определяют путем перемножения

$$C_i = C_{i-1} \Delta C_i. \quad (2.28)$$

Если входной информацией является абсолютная угловая скорость, измеряемая датчиками угловой скорости (вектор $\vec{\omega}$ и соответствующая ему матрица Ω), то вектор Эйлера покажет поворот относительно исходного инерциального базиса i , а определяемая матрица направляющих косинусов может быть обозначена $C \equiv C^{ib}$.

Аналогичная рекуррентная процедура может быть использована при вычислении кватерниона ориентации

$$\Lambda_i = \Lambda_{i-1} \circ \Delta \Lambda_i, \quad (2.29)$$

где приращение кватерниона на шаге интегрирования $\Delta \Lambda_i$ определяют по приращению вектора ориентации по (2.24).

Если необходимо определять поворот связанного базиса b относительно вращающегося географического сопровождающего базиса g , то тогда вместо указанных в (2.22) вектора и матрицы используют вектор относительной угловой скорости

$$\vec{\omega}^o = \vec{\omega} - (C^{gb})^T \vec{\omega}_g, \quad \vec{\omega}_g = [\omega_\xi \quad \omega_\eta \quad \omega_\zeta]^T,$$

и соответствующую ему матрицу

$$\Omega^o = \Omega - (C^{gb})^T \Omega_g^{ig}, \quad \text{где } \Omega_g^{ig} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычисления по формулам (2.22), (2.23) в этом случае дают матрицу направляющих косинусов C^{gb} .

3. Представления скорости и ускорения объекта

Представление скорости

Как уже упоминалось, абсолютной называют скорость в инерциальной системе координат. Относительной называют скорость в системе координат, перемещающейся относительно абсолютной системы. Это перемещение может быть как поступательным, так и вращательным. Представлен вектор скорости может быть в проекциях на оси разных систем координат.

В алгоритмах ИНС чаще всего рассматривают в качестве относительной скорость во вращающемся сопровождающем трехграннике $O\xi\eta\zeta$ ($OENH$), обозначаемом иногда буквой \mathbf{g} :

$v_\xi \equiv v_E$ - восточная составляющая;

$v_\eta \equiv v_N$ - северная составляющая;

$v_\zeta \equiv v_H$ - вертикальная составляющая.

Для получения абсолютной линейной скорости к относительной скорости добавляют переносную линейную скорость

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{v}^{nep}. \quad (3.1)$$

В рассматриваемом примере переносной является скорость из-за вращения Земли. Эта скорость имеет только восточную составляющую $v_{\xi 3} = ru \cos \varphi$, $r = R + h$ (для геоцентрической системы координат,

R - радиус Земли, h - высота). Таким образом, составляющие абсолютной линейной скорости в проекциях на оси географического трехгранника

$$V_\xi = v_\xi + ru \cos \varphi, \quad V_\eta \equiv v_\eta, \quad V_\zeta \equiv v_\zeta.$$

Вертикальная составляющая скорости соответствует скорости изменения высоты (или глубины) $V_\zeta = \dot{h}$.

В векторной форме относительную скорость записывают в виде

$$\vec{v}_g = [v_E, v_N, \dot{h}]^T.$$

Вектор переносной линейной скорости представим в виде $\vec{v}_3 = [ru \cos \varphi, 0, 0]^T$.

Абсолютную линейную скорость можно получить как производную радиуса-вектора в инерциальной системе координат

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}.$$

В инерциальной системе координат i радиус-вектор представляют в виде $\vec{r}_i = [X, Y, Z]^T$, в сопровождающем базисе $\vec{r}_g = [0, 0, r]^T$.

Если радиус-вектор представлен в сопровождающем базисе, абсолютную скорость записывают в виде

$$\vec{V}_g = \frac{d\vec{r}_g}{dt} + (\vec{u}_g + \vec{\omega}_g^o) \times \vec{r}_g. \quad (3.2)$$

Здесь $\frac{d\vec{r}_g}{dt}$ - производная радиуса-вектора в сопровождающем базисе (локальная производная), $\vec{u}_g = [0, u \cos \varphi, u \sin \varphi]^T$ - вектор угловой скорости вращения Земли, $\vec{\omega}_g^o = [-\frac{v_N}{r}, \frac{v_E}{r}, \frac{v_E}{r} \operatorname{tg} \varphi]^T$ - вектор угловой скорости сопровождающего базиса из-за перемещения относительно Земли. Сумма

$$\vec{\omega}_g = \vec{u}_g + \vec{\omega}_g^o$$

обозначает абсолютную угловую скорость сопровождающего базиса, представленную в проекциях на оси сопровождающего базиса g .

Представление ускорения

При записи абсолютного ускорения в подвижной системе координат абсолютное ускорение \vec{W} есть сумма относительного ускорения \vec{v} , переносного ускорения \vec{W}^{nep} и кориолисового ускорения \vec{W}^{kop} :

$$\vec{W} = \vec{v} + \vec{W}^{nep} + \vec{W}^{kop}.$$

Составляющие ускорения

$\vec{W}^{nep} = \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r})$ - центростремительное ускорение из-за вращения Земли;

$\vec{W}^{kop} = 2\vec{u} \times \vec{v}$ - кориолисово ускорение.

Рассмотрим абсолютное ускорение объекта, перемещающегося на поверхности Земли или около нее, т.е. в сопровождающем базисе.

$$\vec{W}_g \equiv \frac{d\vec{V}_g}{dt} \equiv \frac{d^2\vec{r}_g}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}_g.$$

Далее индекс g для упрощения записи употреблять не будем, молчаливо подразумевая его наличие. Дифференцируя (3.2), получим

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} \right) + \frac{d}{dt} (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{r} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (3.3)$$

Учтем, что $\vec{u} = Const$ ($\vec{u} \times \vec{u} = 0$) и подставим в последнее слагаемое выражение (3.2):

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \vec{\omega}^o \times \vec{r} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \left[\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{r} \right]. \quad (3.4)$$

Учтем, что $\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{h}}$, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{r} = \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + \vec{u} \times \vec{r} + \vec{\omega}^o \times \vec{r}$. (3.5)

Тогда

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} \right) = \frac{\tilde{d}^2\vec{r}}{dt^2} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \dot{\vec{h}} = \ddot{\vec{h}} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \dot{\vec{h}}, \text{ так как } \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{h}}.$$

Преобразуем далее (3.3):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} \right) + \frac{d}{dt} (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{r} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \\ &= \ddot{\vec{h}} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \dot{\vec{h}} + \frac{d}{dt} \vec{u} \times \vec{r} + \frac{d}{dt} \vec{\omega}^o \times \vec{r} + \vec{u} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}^o \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \end{aligned}$$

Учтем, что $\frac{d}{dt} \vec{u} = 0$ и подставим (3.5):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \ddot{\vec{h}} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \dot{\vec{h}} + \frac{d}{dt} \vec{\omega}^o \times \vec{r} + \vec{u} \times \left(\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + \vec{u} \times \vec{r} + \vec{\omega}^o \times \vec{r} \right) + \vec{\omega}^o \times \left(\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + \vec{u} \times \vec{r} + \vec{\omega}^o \times \vec{r} \right) = \\ &= \ddot{\vec{h}} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \dot{\vec{h}} + \frac{d}{dt} \vec{\omega}^o \times \vec{r} + \vec{u} \times \dot{\vec{h}} + \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r}) + \vec{u} \times (\vec{\omega}^o \times \vec{r}) + \vec{\omega}^o \times \dot{\vec{h}} + \vec{\omega}^o \times (\vec{u} \times \vec{r}) + \vec{\omega}^o \times (\vec{\omega}^o \times \vec{r}) = \\ &= \ddot{\vec{h}} + 2(\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \dot{\vec{h}} + \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r}) + \vec{\omega}^o \times (\vec{\omega}^o \times \vec{r}) + \vec{u} \times (\vec{\omega}^o \times \vec{r}) + \vec{\omega}^o \times (\vec{u} \times \vec{r}) + \frac{d}{dt} \vec{\omega}^o \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Преобразуем последнее слагаемое, учитывая, что $\vec{\omega}^o \times \vec{\omega}^o = 0$:

$$\frac{d}{dt} \vec{\omega}^o \times \vec{r} = \left(\frac{\tilde{d}}{dt} \vec{\omega}^o + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{\omega}^o \right) \times \vec{r} = \left(\frac{\tilde{d}}{dt} \vec{\omega}^o + \vec{u} \times \vec{\omega}^o \right) \times \vec{r} = \frac{\tilde{d}}{dt} \vec{\omega}^o \times \vec{r} + (\vec{u} \times \vec{\omega}^o) \times \vec{r}.$$

Учтем также такое преобразование:

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} \times \vec{\omega}^o) \times \vec{r} + \vec{\omega}^o \times (\vec{u} \times \vec{r}) &= -\vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}^o) + \vec{\omega}^o \times (\vec{u} \times \vec{r}) = \\
 &= -\vec{u}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}^o) + \vec{\omega}^o(\vec{r} \cdot \vec{u}) + \vec{u}(\vec{\omega}^o \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega}^o \cdot \vec{u}) = \\
 &= \vec{\omega}^o(\vec{r} \cdot \vec{u}) - \vec{r}(\vec{\omega}^o \cdot \vec{u}) = \vec{\omega}^o(\vec{u} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{u} \cdot \vec{\omega}^o) = \vec{u} \times (\vec{\omega}^o \times \vec{r}).
 \end{aligned}$$

В итоге из (3.6), учитывая, что

$\vec{u} + \vec{\omega}^o = \vec{\omega}$ - абсолютная угловая скорость базиса \mathbf{g} ,

$\vec{\omega}^o \times \vec{r} = \vec{v}_z$ - горизонтальная составляющая относительной линейной

скорости, $\frac{d}{dt} \vec{\omega}^o = \vec{\varepsilon}$ - тангенциальное ускорение,

получим формулу абсолютной линейной скорости в проекциях на оси сопровождающего базиса \mathbf{g} ($O\xi\eta\zeta$)

$$\boxed{\vec{W}_g = \ddot{h} + 2\vec{\omega} \times \dot{h} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{u} \times \vec{v}_z + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}} \quad (3.7)$$

Рассмотрим содержание слагаемого $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$:

$$\frac{d}{dt} \vec{\omega}^o = \vec{\varepsilon} = \left[-\frac{\dot{v}_N}{r}, \frac{\dot{v}_E}{r}, \left(\frac{v_E}{r} \operatorname{tg} \varphi \right)' \right]^T \quad (\text{штрих означает производную}).$$

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\xi}_0 & \vec{\eta}_0 & \vec{\zeta}_0 \\ -\frac{\dot{v}_N}{r} & \frac{\dot{v}_E}{r} & \left(\frac{v_E}{r} \operatorname{tg} \varphi \right)' \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix}' = \vec{\xi}_0 \dot{v}_E + \vec{\eta}_0 \dot{v}_N = \dot{\vec{v}}_z$$

- горизонтальная составляющая относительного ускорения.

В формуле (3.7) $2\vec{\omega} \times \dot{h}$ - кориолисово ускорение, вызванное изменением высоты в сопровождающем базисе;

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ - центростремительное ускорение;

$2\vec{u} \times \vec{v}_z$ - кориолисово ускорение, возникающее при горизонтальном движении.

Уравнение (3.7) может быть преобразовано к следующему виду

$$\boxed{\vec{W}_g = \frac{d}{dt} \vec{v} + (2\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{v} + \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r})} \quad (3.8)$$

или

$$\boxed{\vec{W}_g = \frac{d}{dt} \vec{v} + (\vec{u} + \vec{\omega}) \times \vec{v} + \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r})} \quad (3.9)$$

Такие формулы приведены, например, в [1].

Эти формулы можно также получить другим путем.

Представим формулу абсолютной скорости (3.2) в виде

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{u} \times \vec{r} + \vec{\omega}^o \times \vec{r}. \quad (3.10)$$

В соответствии с ранее введенными обозначениями, (3.10) можно записать в виде

$$\vec{V} = \dot{\vec{h}} + \vec{u} \times \vec{r} + \vec{v}_2 = \vec{v} + \vec{u} \times \vec{r}. \quad (3.11)$$

Таким образом, вектор абсолютной линейной скорости в сопровождающем базисе \mathbf{g} равен сумме относительной линейной скорости \vec{v} в этом базисе (относительно Земли) и переносной линейной скорости $\vec{v}^{nep} = \vec{u} \times \vec{r}$ из-за вращения Земли.

Возьмем производную от (3.11)

$$\vec{W} = \frac{d}{dt} \vec{v} + \frac{d}{dt} (\vec{u} \times \vec{r}) = \frac{d}{dt} \vec{v} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{v} + \frac{d}{dt} \vec{u} \times \vec{r} + \vec{u} \times \frac{d}{dt} \vec{r}.$$

Учтем, что $\frac{d}{dt} \vec{u} = 0$ и $\frac{d}{dt} \vec{r} = \vec{v} + \vec{u} \times \vec{r}$. Тогда

$$\vec{W} = \dot{\vec{v}} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{v} + \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{u} \times \vec{r}).$$

Отсюда получим формулу, соответствующую (3.8)

$$\boxed{\vec{W} = \dot{\vec{v}} + (2\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{v} + \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r})}.$$

Учитывая выражение для ускорения силы тяжести $\vec{g} = \vec{g}^i - \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r})$, можно записать выражение кажущегося ускорения

$$\boxed{\vec{a}_g = \dot{\vec{v}} + (2\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{v} - \vec{g}}. \quad (3.13)$$

Такая формула приведена, например, в [6].

Второе слагаемое иногда представляют через определитель

$$\begin{aligned} (2\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{\xi}_0 & \vec{\eta}_0 & \vec{\zeta}_0 \\ 2u_\xi + \omega_\xi^o & 2u_\eta + \omega_\eta^o & 2u_\zeta + \omega_\zeta^o \\ v_\xi & v_\eta & v_\zeta \end{vmatrix} = \\ &= \vec{\xi}_0 \left[(2u_\eta + \omega_\eta^o) v_\zeta - (2u_\zeta + \omega_\zeta^o) v_\eta \right] + \\ &+ \vec{\eta}_0 \left[(2u_\zeta + \omega_\zeta^o) v_\xi - (2u_\xi + \omega_\xi^o) v_\zeta \right] + \\ &+ \vec{\zeta}_0 \left[(2u_\xi + \omega_\xi^o) v_\eta - (2u_\eta + \omega_\eta^o) v_\xi \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\vec{\xi}_0, \vec{\eta}_0, \vec{\zeta}_0$ - орты сопровождающего базиса.

Иногда используют векторно-матричную форму записи

$$\frac{d\vec{v}_g}{dt} + (\Omega_g^{ig} + \Omega_g^{ie})\vec{v}_g = C^{gb}\dot{\vec{a}}_b + \vec{g}_g, \quad \vec{v}_g(t_0) = \vec{v}_{g,0}; \quad (3.14)$$

где

$$(\Omega_g^{ig} + \Omega_g^{ie}) = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{v_E}{R_E} \operatorname{tg} \varphi + 2u \sin \varphi\right) & \frac{v_E}{R_E} + 2u \cos \varphi \\ \frac{v_E}{R_E} \operatorname{tg} \varphi + 2u \sin \varphi & 0 & \frac{v_N}{R_N} \\ -\frac{v_E}{R_E} - 2u \cos \varphi & -\frac{v_N}{R_N} & 0 \end{bmatrix};$$

\vec{g}_g - вектор силы тяжести в точке нахождения объекта, \vec{a}_b - вектор кажущегося ускорения в связанном базисе.

Отметим, что

$$\Omega_g^{ig} = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{v_E}{R_E} \operatorname{tg} \varphi + u \sin \varphi\right) & \frac{v_E}{R_E} + u \cos \varphi \\ \frac{v_E}{R_E} \operatorname{tg} \varphi + u \sin \varphi & 0 & \frac{v_N}{R_N} \\ -\frac{v_E}{R_E} - u \cos \varphi & -\frac{v_N}{R_N} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_g^{ie} = \begin{bmatrix} 0 & -u \sin \varphi & u \cos \varphi \\ u \sin \varphi & 0 & 0 \\ -u \cos \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Абсолютное ускорение можно также получить путем дифференцирования вектора абсолютной скорости, записанного во вращающейся системе координат [3]

$$\vec{W}_{\xi\eta\zeta} = \dot{\vec{V}} + \vec{\omega} \times \vec{V}.$$

В проекциях

$$\begin{aligned} W_\xi &= \dot{V}_\xi + \omega_\eta V_\zeta - \omega_\zeta V_\eta, \\ W_\eta &= \dot{V}_\eta + \omega_\zeta V_\xi - \omega_\xi V_\zeta, \\ W_\zeta &= \dot{V}_\zeta + \omega_\xi V_\eta - \omega_\eta V_\xi. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь, учитывая радиусы кривизны земного эллипсоида,

$$\omega_{\zeta} = -\frac{v_N}{R_2 + h} = -\frac{V_N}{R_2 + h}, \quad \omega_{\eta} = u \cos \varphi + \frac{v_E}{R_1 + h} = \frac{V_E}{R_1 + h},$$

$$\omega_{\zeta} = u \sin \varphi + \frac{v_E}{R_1 + h} \operatorname{tg} \varphi = \frac{V_E}{R_1 + h} \operatorname{tg} \varphi.$$

Учитывая, что $V_{\zeta} \equiv V_E = v_E + R_1 u \cos \varphi$, получим

$$\dot{V}_{\zeta} = \dot{v}_E - \frac{R_1}{R_2} v_N u \sin \varphi \approx \dot{v}_E - v_N u \sin \varphi. \quad \text{Учтем также, что}$$

$$\dot{V}_{\eta} \equiv \dot{v}_N, \quad \dot{V}_{\zeta} \equiv \dot{v}_{\zeta} \equiv \dot{h}.$$

После подстановки формул в (3.13) и преобразований получим

$$W_{\zeta} = \dot{v}_E - (u \sin \varphi + \omega_{\zeta}) v_N + \left(2u \cos \varphi + \frac{v_E}{R_1 + h}\right) v_{\zeta};$$

$$W_{\eta} = \dot{v}_N + (u \sin \varphi + \omega_{\zeta}) v_E + u^2 (R_1 + h) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{v_N \cdot v_{\zeta}}{R_1 + h}; \quad (3.16)$$

$$W_{\zeta} = \dot{v}_{\zeta} - \frac{v_N^2}{R_2 + h} - \frac{v_E^2}{R_1 + h} - 2uv_E \cos \varphi - u^2 (R_1 + h) \cos^2 \varphi.$$

4. Алгоритмы БИНС

Как видно из ранее изложенного, алгоритмы функционирования БИНС могут отличаться видом системы координат, принятой за основную, видом уравнений ориентации, используемой формой записи ускорений, избранным методом численного интегрирования и др. БИНС могут отличаться используемыми гироскопическими датчиками. Поэтому алгоритмы БИНС весьма разнообразны. Рассмотрим некоторые примеры.

4.1. БИНС в инерциальной системе координат

Данный алгоритм реализует метод счисления пути, в первую очередь, в инерциальной системе координат.

В блоке чувствительных элементов акселерометры и гироскопы могут быть в минимальном количестве (3 одноосных акселерометра, 3 датчика угловой скорости), а могут иметь избыточную сложную структуру (см. п. 4.6), механизмы автокомпенсации помех. Алгоритмы предварительной обработки сигналов могут содержать элементы автокомпенсации помех или корректировки измерений по результатам калибровки параметров модели сигналов (см. гл.10).

Технические характеристики некоторых российских БИНС

Шифр системы Тип гироскопа	Точность определения, СКО			Время выставки		Масса системы, кг	Потребляемая мощность, Вт	Наработка на отказ, час	Фирма
	Координаты, км	Скорость, м/с	Курс, угл. мин	Тангаж, Крен, угл. мин	Режим заданного курса, мин				
БИНС-90 КЛГ	1,85	1,0	6	2-4 2-4	3	5	15	10 000	МИЭА
БИНС-СП КЛГ	1,25	1,0	6	3 3	1	5	18	6 000	АВИА ПРИБОР
СБКВ-2 ДНГ	-	0,6	60	15	1	-	8	80 60	РПКБ
БИНС-ТВГ ТВГ	0,9	0,5	3-5	1-2	0,5	3	10	180 180	РПКБ
БИНС-Т КЛГ	0,9	0,5	3-5	2-3	0,5	4	9	70 70	РПКБ

Обозначения: КЛГ – кольцевой лазерный гироскоп, ДНГ – динамически настраиваемый гироскоп, ТВГ – твердотельный волновой гироскоп, МИЭА – Московский институт электромеханики и автоматики, РПКБ – Раменское приборостроительное конструкторское бюро

Технические характеристики некоторых зарубежных БИНС

Шифр системы Тип гироскопа	Точность определения				Время выставки		Масса системы, кг	Потребляемая мощность, Вт	Наработка на отказ, час	Фирма
	Координаты, км	Скорость, м/с	Курс, угл. мин	Тангаж, Крен, угл. мин	Режим заданного курса, мин	Режим гироскопа сирования, мин				
SINS-1000 ВОГ	1,8	1,0	4	2		10	8	30		Vibtel Industriel
H-423 ЛГ GG-1300	1,5 за 1 час	0,76			0,5	4	ИИБ 8,2 Всего 23	140	3100	Honeywell (USA)
LINS-300 ЛГ	1,8 за 1 час	0,3	4				ИИБ <20 кг	150	2000	British Aerospace (Велико- британия)
Sigma 40 ЛГ	0,25 за 1 час		3·сек φ (ско)	1 (ско)		6	25	70	20000	SAGEM (Франция)

Обозначения: ЛГ –лазерный гироскоп, ВОГ –волоконно-оптический гироскоп