

**Ю. Ф. ЛАЗАРЄВ  
П. М. БОНДАР**

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ  
ЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТІВ  
СИСТЕМ ОРІЄНТАЦІЇ**

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»

**Ю. Ф. Лазарєв,  
П. М. Бондар**

**Основи теорії  
чутливих елементів  
систем орієнтації**

**Підручник**

*Затверджено Міністерством освіти і науки України  
як підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів,  
які навчаються за напрямком підготовки "Приладобудування"*

Київ  
НТУУ «КПІ»  
2011

УДК 62-752.4(075.8)+531.383(075.8)  
ББК 22.213я73  
Л17

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України  
(лист № 1.11-288 від 17.01.2011 р.)*

**Рецензенти:**

*С. М. Онищенко*, д-р фіз.-мат. наук, проф.,  
Інститут математики НАН України,  
акад. Міжнародної академії навігації та управління рухом

*С. І. Черняк*, д-р техн. наук,  
КП «Центральне конструкторське бюро Арсенал»

*В. О. П'ятецький*, канд. фіз.-мат. наук, доц.,  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

**Відповідальний редактор**

*М. Д. Гераїмчук*, д-р техн. наук, проф.,  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»

**Лазарєв Ю. Ф.**

**Л17** Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації [Текст]: підруч.  
/ Ю. Ф. Лазарєв, П. М. Бондар. – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 644 с. –  
Бібліогр.: с.626-628. – 500 пр.  
ISBN 978-966-434-0

Розглянуто питання організації прикладного (інженерного) теоретичного дослідження на прикладі чутливих елементів систем орієнтації, методи теоретичного дослідження нелінійних систем і приклади їх застосування. Головну увагу зосереджено на застосуванні наближених методів, широко застосовуваних в інженерній практиці. Викладено основи прикладної теорії гіроскопів і теорії чутливих елементів систем орієнтації, що супроводжується розрахунками і прикладами. Значну увагу приділено побудові програмних моделей за допомогою комп'ютерної системи Matlab і демонструванню можливостей моделювання поведінки розглядуваних пристроїв та приладів. Ці самі моделі покладено в основу практичних робіт, які виконуються на комп'ютерній техніці. Необхідні тексти програм наведено у додатку.

Для студентів технічних і природничих інженерних спеціальностей університетів. Може стати корисним інженерам і аспірантам.

УДК 62-752.4(075.8)+531.383(075.8)  
ББК 22.213я73

ISBN 978-966-434-0

© Ю. Ф. Лазарєв, П. М. Бондар  
© НТУУ «КПІ» (ПБФ), 2011

# З М І С Т

Передмова	3
Вступ. Навігація, орієнтація, гіроскопи – практика і теорія	5
Список скорочень	11
<b>Частина 1. ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНИХ ІНЖЕНЕРНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ</b>	<b>12</b>
Розділ 1. Основи побудови математичних моделей механічних систем	15
1.1. Елементи векторної і матричної алгебри	15
1.1.1. Векторна алгебра	15
1.1.2. Форми подання векторів	16
1.1.3. Матрична алгебра	19
1.1.4. Матрична форма подання векторів	22
1.2. Кінематика поворотів твердого тіла	25
1.2.1. Задання положення тіла у просторі	25
1.2.2. Кути Ейлера	28
1.2.3. Знаходження матриці напрямних косинусів	30
1.2.4. Недоліки застосування кутів Ейлера	33
1.2.5. Теорема Ейлера	35
1.2.6. Вектор повороту Гіббса	38
1.2.7. Початкові відомості про кватерніони	39
1.2.8. Подання поворотів за допомогою кватерніонів	43
1.2.9. Диференціювання вектора, заданого в обертовій системі координат	49
1.2.10. Визначення проєкцій кутової швидкості	52
1.2.11. Швидкість і прискорення точки в її складному русі	53
1.2.12. Швидкість і прискорення точок твердого тіла	55
1.3. Кінематичні рівняння орієнтації	55
1.3.1. Рівняння орієнтації Пуассона	55
1.3.2. Рівняння орієнтації Ейлера	56
1.3.3. Кватерніонне рівняння орієнтації	56
1.3.4. Матричний аналог кватерніонного рівняння орієнтації	59
1.3.5. Рівняння орієнтації штучного супутника Землі	59
1.4. Головні динамічні величини	61
1.4.1. Імпульс і момент імпульсу	61
1.4.2. Геометрія мас твердого тіла	64
1.4.3. Еліпсоїд інерції	66
1.4.4. Кінетична енергія	68
1.5. Форми законів динаміки	69
1.5.1. Форми запису закону імпульсу	69
1.5.2. Форми запису закону моменту імпульсу	69
1.5.3. Формалізм Лагранжа. Рівняння у формі Жільбера	71
1.5.4. Метод кінетостатики і принцип Даламбера	72
Задачі	73
Контрольні запитання	77
Розділ 2. Складання математичних моделей	79
2.1. Маятник за поступального руху основи	79
2.2. Симетричний зрівноважений гіроскоп	82
2.2.1. Рівняння симетричного зрівноваженого гіроскопа в осях Резаля	82
2.2.2. Рівняння симетричного зрівноваженого гіроскопа форми Булгакова	84
2.3. Симетричний гіромаятник	87
2.3.1. Рівняння гіромаятника у кутах осциляції	87
2.3.2. Рівняння гіромаятника у кутах Ейлера	89
2.4. Гіроскоп у кардановому підвісі	89
2.4.1. Рівняння гіроскопа у кардановому підвісі на нерухомій основи	90
2.4.2. Рівняння Ейлера–Ішлинського. Моменти реакцій у в'язях	93
2.5. Наближені рівняння триступневих гіроскопів і методи їх складання	98
2.5.1. Способи безпосереднього складання прецесійних рівнянь	100
2.5.2. Опорні системи координат. Визначення положення основи	101
2.5.3. Прецесійні рівняння ГКП на рухомій основи	103
2.5.4. Гіромаятник на рухомій основи	107
2.5.5. Маятниковий гірокомпас на рухомій основи	109
2.6. Двоступневий гіроскоп на обертовій основи	112
Задачі	113
Контрольні запитання	114
Розділ 3. Методи теоретичного дослідження	115

3.1. Вступ у теорію коливань	115
3.2. Методи теоретичного дослідження лінійних стаціонарних систем	123
3.2.1. Теоретичне дослідження вільного руху	123
3.2.2. Теоретичне дослідження вимушених коливань. Метод комплексних амплітуд	124
3.2.3. Вимушені коливання гіроскопа у кардановому підвісі	130
3.3. Дослідження стійкості руху нелінійних систем	134
3.3.1. Досліджування стійкості за Ляпуновим	135
3.3.2. необхідна і достатня умова стійкості дзиги (обертового снаряда)	142
3.3.3. Стійкість стаціонарних рухів	146
3.3.4. Стійкість регулярної прецесії дзиги	153
3.3.5. Дослідження стійкості за структурою сил	155
3.4. Наближені методи дослідження нелінійних і нестаціонарних систем	167
3.4.1. Методи лінеаризації	168
3.4.2. Метод збурень	182
3.4.3. Метод усереднення	192
Контрольні запитання	213
<b>Частина 2. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ</b>	<b>215</b>
Розділ 4. Нелінійні властивості маятника	215
4.1. Точне дослідження власних коливань. Неізохронність власних коливань	216
4.2. Дослідження власних коливань методами лінеаризації	220
4.3. Амплітудно-частотні характеристики вимушених коливань	223
4.4. Випрямний ефект фізичного маятника за вібрації точки його підвісу	226
4.5. Параметричні коливання фізичного маятника за вертикальної вібрації	230
Завдання	238
Контрольні запитання	240
Розділ 5. Теорія пасивного віброзахисту	241
5.1. Постановка задачі віброзахисту	241
5.2. Теорія лінійної амортизації	242
5.3. Дія удару на лінійну систему амортизації	244
5.4. Внутрішнє тертя у матеріалі під час деформацій пружних елементів	250
5.5. Віброзахисні системи із внутрішнім тертям	255
5.6. Системи амортизації із сухим тертям	258
Контрольні запитання	261
Розділ 6. Метод фазової площини. Автоколивання	262
6.1. Фазові портрети лінійних систем	265
6.2. Фазові портрети нелінійних систем	268
6.3. Перехідний процес і автоколивання торпеди з курсу	269
6.3.1. Теоретичне дослідження	270
6.3.2. Моделювання на ЕОМ	276
Контрольні запитання	279
<b>Частина 3. ПРИКЛАДНА ТЕОРІЯ ГІРОСКОПІВ</b>	<b>280</b>
Розділ 7. Симетричний зрівноважений гіроскоп	280
7.1. Визначення і властивості гіроскопа	280
7.2. Рівняння руху симетричного зрівноваженого гіроскопа	285
7.3. Поняття прецесії	288
7.4. Вільний рух симетричного зрівноваженого гіроскопа	291
7.5. Симетричний зрівноважений гіроскоп під дією сталого моменту сил	295
7.6. Поняття швидкого гіроскопа. Псевдорегулярна прецесія	299
7.7. Земля як гіроскоп	300
7.8. Прецесійні рівняння. Наближена теорія гіроскопа	303
7.9. Вплив тертя на поведінку гіроскопа	307
7.10. Моделювання поведінки симетричного зрівноваженого гіроскопа	313
Завдання	320
Задачі	322
Контрольні запитання	324
Розділ 8. Гіромаятник	326
8.1. Вільний рух гіромаятника. Точні дослідження	328
8.2. Регулярні прецесії гіромаятника	335
8.3. Вільний рух гіромаятника. Наближені дослідження. Метод компресії	338
8.4. Вплив тертя на поведінку гіромаятника	343
Завдання	348

Задачі	349
Контрольні запитання	350
<b>Розділ 9. Гіроскоп у кардановому підвісі на нерухомій основі</b>	<b>351</b>
9.1. Вільний рух гіроскопа у кардановому підвісі. Дрейф Магнуса	354
9.1.1. Дослідження руху за прецесійною моделлю	355
9.1.2. Дослідження руху за лінеаризованою моделлю	355
9.1.3. Метод зображувальної точки Ніколаї. Компресія рівнянь	358
9.1.4. Точне дослідження повних рівнянь гіроскопа у кардановому підвісі	360
9.1.5. Дрейф Магнуса	364
9.1.6. Фізична причина дрейфу Магнуса	366
9.1.7. Моделювання поведження гіроскопа у кардановому підвісі	371
9.2. Дія на гіроскоп у кардановому підвісі сталих моментів сил і сил тертя	374
9.2.1. Рух гіроскопа у кардановому підвісі під дією сталих моментів сил	374
9.2.2. Рух ГКП під дією моментів сил в'язкого тертя	378
9.2.3. Рух ГКП під дією моментів сил сухого тертя. Метод Ніколаї	380
9.3. Дія на гіроскоп у кардановому підвісі періодичних моментів сил	385
9.3.1. Усталені вимушені коливання	385
9.3.2. Дрейфи ГКП під дією періодичних моментів сил	387
9.3.3. Дрейф ГКП через динамічну незбалансованість ротора	397
9.4. Дія на гіроскоп у кардановому підвісі моментів сил по головній осі	399
9.4.1. Рух гіроскопа у кардановому підвісі із закритим гіромотором	400
9.4.2. Розгін ротора асинхронним гіродвигуном	401
9.4.3. Рух гіроскопа у кардановому підвісі з відкритим гіромотором	402
9.4.4. Фізична причина руху ГКП під дією моментів по головній осі	403
Завдання	405
Задачі	406
Контрольні запитання	407
<b>Частина 4. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМ ОРІЄНТАЦІЇ</b>	<b>408</b>
<b>Розділ 10. Математичні моделі моментів сил під час руху основи</b>	<b>409</b>
10.1. Момент пружного дисбалансу. Принцип однакової жорсткості	409
10.2. Момент сил сухого тертя	412
Контрольні запитання	418
<b>Розділ 11. Чутливі елементи на основі двоступеневого гіроскопа</b>	<b>419</b>
11.1. Головна властивість двоступеневого гіроскопа	420
11.2. Двоступеневий гірокомпас	423
11.2.1. Деякі основні похибки	425
11.2.2. Вібраційна похибка	427
11.2.3. Моделювання поведження двоступеневого гірокомпаса	433
11.3. Гіротахометр	438
11.4. Інші двоступеневі чутливі елементи	442
Завдання	443
Контрольні запитання	444
<b>Розділ 12. Чутливі елементи на основі триступеневого ГКП</b>	<b>446</b>
12.1. ГКП на обертовій основі під впливом моментів сил тертя	448
12.2. Дрейфи гіроскопа в кардановому підвісі за хитавиці основи	456
12.2.1. Аналіз похибок гіроскопа в кардановому підвісі як вказівника напрямку	456
12.2.2. Дрейф за хитавиці через тертя по осях	461
12.2.3. Дрейф за хитавиці через момент привідного двигуна гіромотора	463
12.2.4. Моделювання поведження гіроскопа в кардановому підвісі	465
12.3. Гіроскоп напрямку	470
12.3.1. Карданова похибка	473
12.3.2. Забезпечення стійкості власних коливань	476
12.3.3. Віражна похибка	479
12.3.4. Похибка за хитавиці	485
12.3.5. Застосування теореми про тілесний кут	491
Завдання	494
Контрольні запитання	496
<b>Розділ 13. Чутливі елементи на основі маятникових гіроскопів</b>	<b>497</b>
13.1. Гіромаятник як гіровертикаль	497
13.1.1. Швидкісна похибка і перехідний процес	498
13.1.2. Балістична похибка. Умова незбурюваності	508
13.1.3. Моделювання поведження гіромаятника	511

13.2. Маятниковий гірокомпас	522	
13.2.1. Швидкісна похибка і перехідний процес	523	
13.2.2. Балістична похибка. Умова незбурюваності	526	
13.2.3. Інтеркардинальна похибка	527	
13.2.4. Моделювання поведження маятникового гірокомпаса	530	
Завдання	540	
Контрольні запитання	542	
<b>Розділ 14. Чутливі елементи на основі осциляторних гіроскопів</b>	<b>543</b>	
14.1. Двоступеневий роторний вібраційний гіроскоп	543	
14.1.1. Принцип дії та рівняння руху роторного вібраційного гіроскопа	543	
14.1.2. Роторний вібраційний гіроскоп як вимірювач кутової швидкості	545	
14.1.3. Роторний вібраційний гіроскоп як вимірювач кутів повороту	550	
14.2. Триступеневий роторний вібраційний гіроскоп	551	
14.2.1. Триступеневий роторний вібраційний гіроскоп вимірювач кутів повороту	552	як
14.2.2. Триступеневий ДНГ як вимірювач кутової швидкості	560	
14.3. Мікромеханічні осциляторні гіроскопи	562	
14.3.1. Принципи побудови осциляторних гіроскопів	562	
14.3.2. Одномасовий осциляторний вібраційний гіроскоп	565	
14.3.3. Мікромеханічний гіроскоп на обертовій основі	567	
14.3.4. Власні коливання інерційної маси	568	
14.3.5. Вимушені коливання інерційної маси	572	
14.3.6. Вплив поступальних прискорень	580	
Контрольні запитання	5	586
<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ</b>		<b>587</b>
<b>ДОДАТКИ</b>		<b>590</b>
Додаток 1. Комплекс програм моделювання поведження фізичного маятника у разі поступальної вібрації точки його підвісу		590
Додаток 2. Комплекс програм моделювання руху торпеди		593
Додаток 3. Комплекс програм моделювання поведження симетричного зрівноваженого гіроскопа		599
Додаток 4. Комплекс програм моделювання поведження гіромаятника		605
Додаток 5. Комплекс програм моделювання поведження гіроскопа у кардановому підвісі на нерухомій основі		609
Додаток 6. Програма моделювання поведження двоступеневого гірокомпаса на рухомій основі		615
Додаток 7. Комплекс програм моделювання ГКП та гіроскопа напрямку на рухомій основі		617
Додаток 8. Програми моделювання поведження гіромаятника як гіровертикалі та маятникового гірокомпаса на рухомій основі		623
<b>АБЕТКОВИЙ ПОКАЖЧИК</b>		<b>629</b>